Actividades PAU propuestas en los bloques

Bloque II. Interacción gravitatoria

1. La nave espacial lunar *Prospector* permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina:

***a)* La velocidad lineal de la nave y el periodo del movimiento.**

***b)* La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.**

Datos: constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^2; masa de la Luna $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; radio medio lunar, $R_L = 1\,740$ km.

a) Obtenemos la velocidad de la nave mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{G M_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1\,740 + 100) \cdot 10^3\ \text{m}}} =$$

$= 1\,633{,}4$ m/s

b) Obtenemos la velocidad de escape a la atracción de la Luna desde la altura de 100 km mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1\,740 + 100) \cdot 10^3\ \text{m}}} =$$

$= 2\,310$ m/s

2. Una sonda espacial se encuentra estacionada en una órbita circular terrestre a una altura sobre la superficie terrestre de $2{,}26\,R_T$, donde R_T es el radio de la Tierra.

***a)* Calcula la velocidad de la sonda en la órbita de estacionamiento.**

***b)* Comprueba que la velocidad que la sonda necesita, a esa altura, para escapar de la atracción de la Tierra es, aproximadamente, 6,2 km s^{-1}.**

Datos: gravedad en la superficie de la Tierra, $g = 9{,}81$ m s^{-2}; radio medio terrestre, $R_T = 6\,370$ km.

a) Obtenemos la velocidad de la sonda en la órbita mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{G M_T}{(2{,}26 + 1)\, R_T}} = \sqrt{g}\sqrt{\frac{R_T}{3{,}26}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 6\,370 \cdot 10^3\ \text{m}}{3{,}26}} = 4\,378\ \text{m/s}$$

b) La velocidad de escape a esa altura es:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T + 2{,}26\, R_T}} = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{R_T}{3{,}26}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 6\,370 \cdot 10^3\ \text{m}}{3{,}26}} = 6\,192\ \text{m/s}$$

3. Responde:

***a)* Compara las fuerzas de atracción gravitatoria que ejercen la Luna y la Tierra sobre un cuerpo de masa *m* que se halla situado en la superficie de la Tierra. ¿A qué conclusión llegas?**

***b)* Si el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es de 100 kp, ¿cuál sería el peso de ese mismo cuerpo en la superficie de la Luna?**

Datos: la masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna; la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es de 60 radios terrestres; el radio de la Luna es 0,27 veces el radio de la Tierra.

a) Las fuerzas de atracción de la Tierra y la Luna sobre un cuerpo en la superficie terrestre son, respectivamente:

$$F_T = G\,\frac{M_T m}{R_T^2}; \qquad F_L = G\,\frac{M_L m}{d^2}$$

Como la masa terrestre es 81 veces la de la Luna y la distancia entre centros es de $60\,R_T$, resulta que la fuerza de la Luna sobre la masa *m* en la superficie es:

$$F_L = G\,\frac{M_T m}{81 \cdot 59^2\, R_T^2} = \frac{F_T}{81 \cdot 59^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}\, F_T$$

Es decir, la fuerza de atracción de la Luna sobre el cuerpo es del orden de la millonésima parte de la fuerza terrestre. Aún así, no la debemos considerar despreciable, pues su efecto es visible por ejemplo, en las mareas.

b) La intensidad del campo gravitatorio en la Tierra es $g_T = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2}$ y en la Luna $g_L = G\,\dfrac{M_L}{R_L^2} = G\,\dfrac{M_T}{81 \cdot 0{,}27^2\, R_T^2} = 0{,}17\, g_T$.

Si el peso en la Tierra es de 100 kp, significa que:

$P_T = m\,g_T = 100$ kp

así que en la Luna:

$P_L = m\,g_L = 0{,}17\, m\,g_T = 0{,}17 \cdot 100$ kp $= 17$ kp

4. Un astronauta con 100 kg de masa (incluyendo el traje) está en la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica, con 2,4 km de diámetro y densidad media 2,2 g cm^{-3}. Determina con qué velocidad debe impulsarse el astronauta para abandonar el asteroide. ¿Cómo se denomina rigurosamente tal velocidad? El astronauta carga ahora con una mochila de masa 40 kg; ¿le será más fácil salir del planeta? ¿Por qué?

Datos: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}.

La velocidad de escape del astronauta desde la superficie del asteroide es $v = \sqrt{\dfrac{2 G M_a}{R_a}}$. Como disponemos de la densidad del asteroide y de la forma geométrica del mismo, podemos afirmar que $M_a = d_a V_a = d_a \cdot \dfrac{4}{3}\pi R_a^3$.

La velocidad es entonces:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_a}{R_a}} = \sqrt{\frac{2 G d_a \cdot \frac{4}{3}\pi R_a^3}{R_a}} = \sqrt{\frac{8}{3} G d_a \pi R_a^2} =$$

$= \sqrt{\frac{8}{3} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 2{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot \pi \cdot (2\,400\ \mathrm{m})^2} =$

$= 2{,}66$ m/s

Si el astronauta carga la mochila, la velocidad de escape seguirá siendo la misma, pues no depende de la masa del objeto que escapa.

5. Las distancias de la Tierra y de Marte al Sol son, respectivamente, 149,6 · 10⁶ km y 228,0 · 10⁶ km. Suponiendo que las órbitas son circulares y que el periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365 días,

***a)* ¿Cuál será el periodo de revolución de Marte?**

***b)* Si la masa de la Tierra es 9,6 veces la de Marte y sus radios respectivos son 6 370 km y 3 390 km, ¿cuál será el peso en Marte de una persona de 70 kg?**

Datos: gravedad en la superficie terrestre, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

a) Aplicamos la Tercera Ley de Kepler a estos dos planetas:

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_M^2}{r_M^3}$$

donde T son los periodos de rotación de Marte y Tierra y r es la distancia al centro de giro, en este caso el Sol. El periodo de revolución de Marte es, entonces:

$$T_M = \sqrt{\frac{T_T^2\, r_M^3}{r_T^3}} = \sqrt{\frac{365^2 \cdot (228 \cdot 10^6)^3}{(149 \cdot 10^6)^3}} = 691 \text{ días}$$

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superfice marciana es, respecto al de la Tierra:

$$g_M = G\,\frac{M_M}{R_M^2} = G\,\frac{9{,}6\,M_T}{1{,}88^2\,R_T^2} = 2{,}72\,g_T$$

Luego el peso de una persona de 70 kg en Marte es:

$$P_M = m\,g_M = 2{,}72\,m\,g_T = 2{,}72 \cdot 70\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 1865\ \mathrm{N}$$

6. Un satélite gira alrededor de la Tierra en una órbita circular. Tras perder cierta energía, continúa girando en otra órbita circular cuyo radio es la mitad que el original. ¿Cuál es su nueva energía cinética (relativa a la energía cinética inicial)?

La energía de un cuerpo que se mantiene en una órbita cerrada o energía de enlace es $E_m = -\frac{G M_T m}{2a}$, donde a es el radio de la órbita. Si el satélite cambia a una órbita de radio $a/2$, la nueva energía de enlace será:

$$E_m = -\frac{G M_T m}{2a/2} = -\frac{G M_T m}{a}$$

es decir, el doble que en la órbita anterior.

7. La órbita de Venus, en su recorrido alrededor del Sol, es prácticamente circular. Calcula el trabajo desarrollado por la fuerza de atracción gravitatoria hacia el Sol a lo largo de media órbita. Si esa órbita, en lugar de ser circular, fuese elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

El trabajo que realiza la fuerza de gravedad al desplazar Venus en su órbita corresponde a la integral de la fuerza de atracción entre las dos masas, $F = G\,\frac{M_{\mathrm{Sol}} M_{\mathrm{Venus}}}{r_{S-V}^2}$, por el diferencial d$r$. En una trayectoria cerrada el trabajo realizado será nulo, dado que el campo gravitatorio es conservativo. Si solo tenemos en cuenta media órbita e integramos resulta:

$$W = \int_{2\pi r}^{\pi r} F\,\mathrm{d}r = -G M m \int_{2\pi r}^{\pi r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = G M m \left(\frac{1}{r}\right)_{2\pi r}^{\pi r} = G\,\frac{M m}{2\pi r}$$

Si integrásemos para la otra media órbita el resultado sería $W = -G\,\frac{M m}{2\pi r}$, de modo que en la órbita cerrada el trabajo sería nulo.

Bloque III. Interacción electromagnética

1. Dos pequeñas esferas iguales, de 5 N de peso cada una, cuelgan de un mismo punto fijo mediante hilos idénticos, de 10 cm de longitud y de masa despreciable. Si se suministra a cada una de estas esferas una carga eléctrica positiva de igual cuantía, se separan de manera que los hilos forman entre sí un ángulo de 60° en la posición de equilibrio.

Calcula:

***a)* El valor de la fuerza electrostática ejercida entre las cargas de las esferas en la posición de equilibrio.**

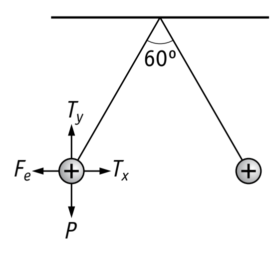
***b)* El valor de la carga de las esferas.**

Datos: constante de la ley de Coulomb, $K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$

b) Las esferas están sometidas a las fuerzas gravitatoria y eléctrica. En el equilibrio la suma de las fuerzas es nula. Las cargas tienen el mismo signo, pues se repelen.

$T_x = F_e$

$T_y = P$



Según la figura observamos que:

T sen 30º $= qE$

$T \cos 30º = m g$

de donde $\quad q = \frac{m g}{E}$ tg 30º

Por otra parte, el campo eléctrico es $E = K\,\frac{q}{d^2}$, donde d es la distancia entre cargas en la posición de equilibrio. Para obtener d, basta con conocer el ángulo entre los hilos y la longitud del mismo, $d = 0{,}1$ m.

Con esas dos ecuaciones, obtenemos:

$$q^2 = \frac{P}{K}\,d^2 \text{ tg } 30º = \frac{5\ \mathrm{N}}{9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}} \cdot (0{,}1\ \mathrm{m})^2 \cdot \text{tg } 30º \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ q = 1{,}79 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

a) La fuerza de repulsión entre cargas es $F = qE$, o:

$$F = K\frac{q_1 q_2}{d^2} = K\frac{q_2}{d^2} =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{(1{,}79 \cdot 10^{-6}\ \text{C})^2}{(0{,}1\ \text{m})^2} = 2{,}88\ \text{N}$$

2. ¿Puede existir diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de una región en la cual la intensidad de campo eléctrico es nula? ¿Qué relación general existe entre el vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico? Razona las respuestas.

Consultar Apartados 6.5 y 6.6 del libro del alumno.

3. Tenemos una carga de $4 \cdot 10^{-3}$ C en el origen y otra de $-4 \cdot 10^{-3}$ C en el punto $3\vec{u}_x - 4\vec{u}_y$ m. Determina:

a) El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas.

b) El campo eléctrico en dicho punto.

c) La energía potencial eléctrica de la carga en el origen.

Datos: $K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2}$.

a) El punto medio entre las cargas es (3/2, 2), es decir, la distancia entre las cargas y el centro es de 2,5 m.

El potencial entre cargas en el punto medio será la suma de los potenciales que crean ambas cargas, es decir, cero, pues se anulan uno a otro.

$$V_1 = K\frac{q_1}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{4\ .\ 10^{-3}\ \text{C}}{2{,}5\ \text{m}} = 14{,}4 \cdot 10^6\ \text{V}$$

$$V_2 = K\frac{q_2}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{-4\ .\ 10^{-3}\ \text{C}}{2{,}5\ \text{m}} = -14{,}4 \cdot 10^6\ \text{V}$$

b) Por la misma razón, el campo eléctrico en el punto entre las dos cargas es nulo.

c) La energía potencial eléctrica de la carga en el origen es $E_p = K\frac{q_1 q_2}{r}$, donde r es la distancia entre cargas, es decir, 5 m.

$$E_p = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-3}\ \text{C} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{C}}{5\ \text{m}} = -2{,}88 \cdot 10^3\ \text{J}$$

la energía potencial es negativa, lo que significa que el campo ejerce una acción de atracción entre cargas.

4. Un electrón es lanzado con una velocidad de $2 \cdot 10^6\ \text{m s}^{-1}$ paralelamente a las líneas de un campo eléctrico uniforme de $5\,000\ \text{V m}^{-1}$. Determina:

a) La distancia que ha recorrido el electrón cuando su velocidad se ha reducido a $0{,}5 \cdot 10^6\ \text{m s}^{-1}$.

b) La variación de la energía potencial que ha experimentado el electrón en ese recorrido.

Datos: valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del electrón, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) La distancia que recorre el electrón es, según las ecuaciones de cinemática:

$$s = \frac{1}{2}\frac{v_f^2 - v_0^2}{a}$$

La fuerza a la que está sometido el electrón por la acción del campo es $F = \frac{E}{q}$. Como conocemos el campo, la carga y la masa del electrón, podemos hallar su aceleración:

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{Eq}{m_e} = \frac{-5\,000\ \text{V/m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = -8{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{m/s}^2$$

es decir, el electrón se frena.

Así, la distancia recorrida por el electrón es:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{(0{,}5 \cdot 10^6\ \text{m/s})^2 - (2 \cdot 10^6\ \text{m/s})^2}{-8{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{m/s}^2} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

b) La variación de la energía potencial es igual a $q\ \Delta V$. Como el campo es $E = V/d$, resulta que:

$$\Delta E_p = q\ \Delta V = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5\,000\ \text{V/m} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m} =$$

$$= -1{,}68 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

5. Un protón penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme. Explica qué tipo de trayectoria describirá el protón si su velocidad es:

a) Paralela al campo.

b) Perpendicular al campo.

c) ¿Qué sucede si el protón se abandona en reposo en el campo magnético?

d) ¿En qué cambiarían las respuestas anteriores si en lugar de un protón fuera un electrón?

Consultar el Apartado 6.6. de la Unidad 6 del libro del alumno.

6. Un conductor rectilíneo indefinido transporta una corriente de 10 A en el sentido positivo del eje *Oz*. Un protón, que se mueve a $2 \cdot 10^5\ \text{m s}^{-1}$, se encuentra a 50 cm del conductor. Calcula el módulo de la fuerza ejercida sobre el protón si su velocidad:

a) Es perpendicular al conductor y está dirigida hacia él.

b) Es paralela al conductor.

c) Es perpendicular a las direcciones definidas en los apartados *a)* y *b)*.

d) ¿En qué casos, de los tres anteriores, el protón ve modificada su energía cinética?

Datos: permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2$; valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

La fuerza a la que está sometido el protón es la del campo magnético que crea la corriente.

$$F = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

La fuerza total dependerá de la orientación del campo respecto a la velocidad del protón.

a) si la velocidad del protón es perpendicular al campo la fuerza magnética será $F = qvB = qv\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$.

Sustituyendo:

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{5}\ \text{m/s} \cdot \frac{\mu_0 \cdot 10\ \text{A}}{2\pi \cdot 0{,}5\ \text{m}} =$$

$$= 1{,}28 \cdot 10^{-19}\ \text{N}$$

b) Si la velocidad del protón es paralela al campo la fuerza magnética es nula.

c) A efectos de módulo es el mismo caso que el apartado *a)*, solo que la dirección de la fuerza es diferente.

Bloque IV. Ondas y óptica geométrica

1. El periodo de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa es de $2 \cdot 10^{-3}$ s. Sabiendo, además, que dos puntos consecutivos, cuya diferencia de fase vale 2 rad, están separados una distancia de 10 cm, calcula:

a) La longitud de onda.

b) La velocidad de propagación.

Si consideramos los dos estados de vibración en un instante dado resulta que:

$$y(x_1, t) = A\cos(2\pi ft - kx_1) \qquad y(x_2, t) = A\cos(2\pi ft - kx_2)$$

a) Conocemos la diferencia de fase y la distancia entre los dos estados de vibración, de modo que:

$$\delta = (2\pi ft - kx_1) - (2\pi ft - kx_2) = k(x_2 - x_1)$$

de donde:

$$k = \frac{\delta}{(x_2 - x_1)} = \frac{2\ \text{rad}}{10\ \text{cm}} = 0{,}2\ \text{cm}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = 10\pi\ \text{cm}$$

b) La velocidad de propagación de la onda es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{10\pi\ \text{cm}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 5\pi . 10^{4}\ \text{cm/s}$$

2. Una onda en una cuerda de 0,01 kg m^{-1} de densidad lineal viene dada por la ecuación:

$$\boldsymbol{y(x, t) = 0{,}2\ \text{sen}(\pi x + 100\pi t)\ \text{m}}$$

Calcula:

a) La frecuencia de la onda.

b) La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

c) La potencia que transporta la onda.

a) La frecuencia de la onda es, según la ecuación $\omega = 100\pi$.

b) La velocidad de propagación es:

$$v = \frac{dy}{dt} = 20\pi\cos(\pi x + 100\pi t)$$

c) La potencia que transporta la onda viene dada por la energía de la onda en la unidad $P = \frac{E}{t}$. Como la energía de la onda es $E = \frac{1}{2}kA^2 = 2m\pi^2 f^2 A^2$, y la densidad lineal de masa es $d_L = \frac{m}{\lambda}$ podemos expresar la potencia que transporta la onda en un periodo como:

$$P = \frac{E}{T} = \frac{2m\pi^2 f^2 A^2}{T} = \frac{2d_L\pi^2 f^2 A^2}{T}\lambda = 2d_L\pi^2 f^2 A^2 v$$

Sustituyendo:

$$P = 2 \cdot 0{,}01\ \text{kg/m} \cdot \pi^2 \cdot (50\ \text{Hz})^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 20\pi\ \text{m/s} = 1\,240\ \text{W}$$

3. Una onda armónica que se propaga por un medio unidimensional tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de propagación de 350 m s^{-1}.

a) ¿Qué distancia mínima hay, en un cierto instante, entre dos puntos del medio que oscilan con una diferencia de fase de 60°?

b) ¿Cuál es la diferencia de fase de oscilación, en un cierto punto, para un intervalo de tiempo de 10^{3} s?

a) La velocidad de propagación y la frecuencia nos informan acerca de la ecuación de onda,

$$f = 500\ \text{Hz}; \qquad v = 350\ \text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{350\ \text{m/s}}{350\ \text{s}^{-1}} = 0{,}7\ \text{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}7} = \frac{20\pi}{7}\ \text{m}^{-1}$$

Así que la ecuación de onda queda así:

$$y(x, t) = A\cos\left(1\,000\pi t - \frac{20\pi}{7}x\right)$$

Considerando los dos estados de vibración en un instante dado:

$$y(x_1, t) = A\cos\left(1\,000\pi t - \frac{20\pi}{7}x_1\right)$$

$$y(x_2, t) = A\cos\left(1\,000\pi t - \frac{20\pi}{7}x_2\right)$$

$$\delta = \left(1\,000\pi t - \frac{20\pi}{7}x_1\right) - \left(1\,000\pi t - \frac{20\pi}{7}x_2\right) =$$

$$= \frac{20\pi}{7}(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{7}{20\pi} = 0{,}12\ \text{m}$$

b) Al igual que en el apartado anterior, consideramos un estado de oscilación en dos instantes de tiempo distintos:

$$y(x, t_1) = A\cos\left(1\,000\pi t_1 - \frac{20\pi}{7}x\right)$$

$$y(x, t_2) = A\cos\left(1\,000\pi t_2 - \frac{20\pi}{7}x\right)$$

La diferencia de fase es:

$$\delta = \left(1\,000\pi t_1 - \frac{20\pi}{7}x\right) - \left(1\,000\pi t_2 - \frac{20\pi}{7}x\right) =$$

$$1\,000\pi(t_1 - t_2) = 1\,000\pi \cdot 10^{3} \Rightarrow \delta = 10^{6} \cdot \pi$$

4. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura *R*. Realiza el diagrama de rayos para construir la imagen de un objeto situado delante del espejo a una distancia igual a:

a) El doble del radio de curvatura.

b) Un cuarto del radio de curvatura.

c) Indica en cada caso la naturaleza de la imagen formada.

a) Ver Figura 10.18, página 254 del libro de texto.

La imagen es real, de menor tamaño que el objeto e invertida.

b) Ver Figura 10.22, página 255 del libro de texto.

La imagen es virtual, de mayor tamaño que el objeto y derecha.

5. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) En un sistema óptico centrado formado por espejos, ¿qué características presentan las imágenes reales y las virtuales?

b) Pon un ejemplo de cada una de ellas utilizando espejos esféricos. Explica el tipo de espejo esférico utilizado en cada caso.

a) En cualquier espejo, plano o esférico, las imágenes virtuales son siempre derechas y las imágenes reales son invertidas.

b) En un espejo plano, la imagen siempre es virtual, derecha y de igual tamaño que el objeto. Se forma al otro lado del espejo.

Espejo cóncavo:

- Si el objeto está situado más allá del centro de curvatura, la imagen es real, menor e invertida.
- Si el objeto se sitúa entre el centro de curvatura y el foco, la imagen es de mayor tamaño que el objeto, real e invertida.
- Si el objeto está entre el foco y el espejo, la imagen es virtual, mayor y derecha.

Espejo convexo:

- La imagen siempre es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

6. Un rayo de luz que viaja por un medio con velocidad de $2,5 \cdot 10^8$ m/s incide con un ángulo de 30°, con respecto a la normal, sobre otro medio donde su velocidad es de $2 \cdot 10^8$ m/s. Calcula el ángulo de refracción.

De acuerdo con las leyes de Snell de la refracción, la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es una constante característica de los dos medios:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

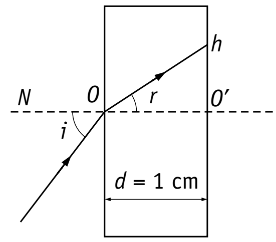
Al introducir en la ecuación los datos del enunciado, se obtiene el ángulo de refracción:

$$\frac{\text{sen } 30°}{\text{sen } r} = \frac{2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}};$$

$$\frac{\text{sen } 30°}{\text{sen } r} = 1,25; \qquad \text{sen } r = \frac{\text{sen } 30°}{1,25} = 0,4$$

$$r = \text{arc sen } 0,4 = 23,6°$$

La velocidad de la luz disminuye cuando pasa al segundo medio, es decir, pasa de un medio menos refringente a otro más refringente; en consecuencia, el rayo refractado se acerca a la normal: el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia.



Para el rayo rojo:

$$\text{tg } r_R = \frac{h_R}{d}; \qquad h_R = d \text{ tg } r_R = 1 \text{ cm} \cdot \text{tg } 38,2° = 0,79 \text{ cm}$$

Para el rayo violeta:

$$\text{tg } r_V = \frac{h_V}{d}; \qquad h_V = d \text{ tg } r_V = 1 \text{ cm} \cdot \text{tg } 32,8° = 0,64 \text{ cm}$$

Como el índice de refracción del color rojo es menor que el del color violeta, el rayo rojo se acerca menos a la normal, es decir, se desvía menos que el rayo violeta.

7. Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es convergente y con distancia focal de 10 cm; la segunda, situada a 50 cm de distancia de la primera, es divergente y con 15 cm de distancia focal. Un objeto de tamaño 5 cm se coloca a una distancia de 20 cm delante de la lente convergente:

***a)* Obtenga gráficamente mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.**

***b)* Calcule la posición de la imagen producida por la primera lente.**

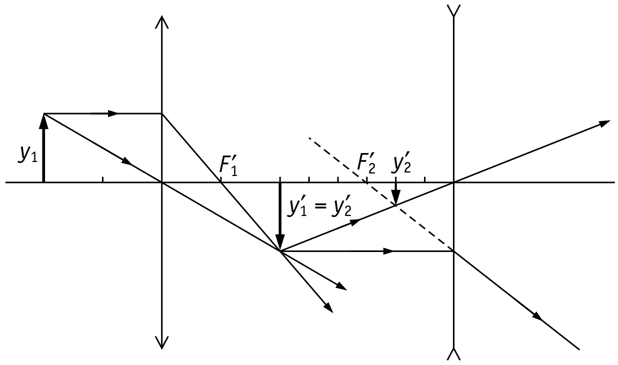
***c)* Calcule la posición de la imagen producida por el sistema óptico.**

***d)* ¿Cuál es el tamaño y la naturaleza de la imagen formada por el sistema óptico?**

De acuerdo con el enunciado, disponemos de los siguientes datos:

$f'_1 = 10$ cm; $f'_2 = -15$ cm; $y_1 = 5$ cm; $s_1 = -20$ cm

a) La imagen gráfica se obtiene trazando los rayos de trayectorias conocidas (Epígrafe 10.6). La imagen formada por la primera lente actúa como objeto de la segunda lente.



La imagen final es virtual, invertida y de menor tamaño que el objeto.

b) La posición de la imagen producida por la primera lente se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1}; \qquad \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{1}{10\text{ cm}}; \qquad s'_1 = 20\text{ cm}$$

Como la distancia imagen es positiva, esta imagen es real.

c) La imagen producida por la primera lente actúa como objeto en la segunda lente. Como la imagen se forma 20 cm detrás de la primera lente, y la distancia que separa ambas lentes es de 50 cm, la distancia objeto para la segunda lente es: $s_2 = -30$ cm.

La imagen final se obtiene aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2}; \qquad \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{-15\text{ cm}}; \qquad s'_2 = -10\text{ cm}$$

Como la distancia imagen es negativa, la imagen es virtual, se forma a la izquierda de la segunda lente y a 10 cm de ella.

d) El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral. Para la primera lente se cumple:

$$M_L = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1}; \qquad y'_1 = \frac{y_1 s'_1}{s_1} = \frac{5\text{ cm} \cdot 20\text{ cm}}{-20\text{ cm}} = -5\text{ cm}$$

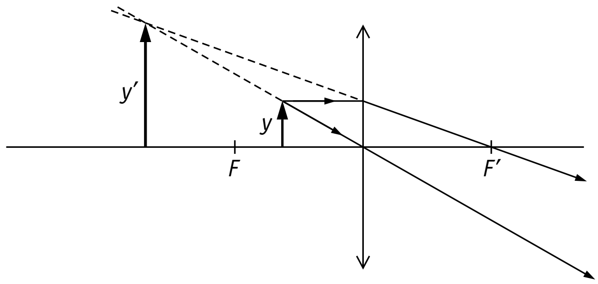
Para la segunda lente: $y_2 = y'_1$

$$M_L = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2}; \qquad y'_2 = \frac{y_2 s'_2}{s_2} = \frac{-5\text{ cm} \cdot (-10\text{ cm})}{-20\text{ cm}} = -1{,}7\text{ cm}$$

El signo negativo indica que la imagen es invertida, además, como hemos visto es virtual, y tiene menor tamaño que el objeto.

8. Para una lente convergente, explica si hay alguna posición del objeto para la que la imagen sea virtual y derecha, y otra para la que la imagen sea real, invertida y del mismo tamaño que el objeto.

En las lentes convergentes sólo se obtienen imágenes virtuales cuando el objeto se sitúa dentro de la distancia focal, es decir, entre el foco y la lente



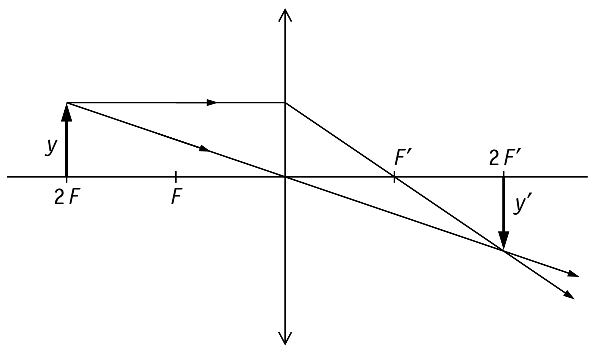
Si la imagen es real, invertida y del mismo tamaño que el objeto, el aumento lateral es:

$$M_L = \frac{s'}{s} = -1; \qquad s' = -s$$

La ecuación fundamental de las lentes delgadas permite calcular la posición del objeto para que la imagen tenga esas características:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{-2}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad s = -2f'$$

Por tanto, el objeto debe situarse a una distancia de la lente igual dos veces la distancia focal.



9. Una lente convergente forma una imagen derecha y de tamaño doble de un objeto real. Si la imagen queda a 60 cm de la lente, ¿cuál es la distancia del objeto a la lente y la distancia focal de la lente?

Como la imagen es derecha, también es virtual y la distancia imagen negativa:

$s' = -60$ cm

Como la imagen es de tamaño doble que el objeto, el aumento lateral es igual a 2:

$$M_L = \frac{s'}{s} = 2; \qquad s = \frac{s'}{2} = \frac{-60\text{ cm}}{2} = -30\text{ cm}$$

El objeto está situado 30 cm delante de la lente.

La ecuación fundamental de las lentes delgadas nos permite calcular la distancia focal de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-60\text{ cm}} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{f'}; \qquad f' = 60\text{ cm}$$

De estos resultados deducimos que la imagen se forma en el foco imagen y el objeto está situado en el punto medio de la distancia focal.

10. La potencia de una lente es de 5 dioptrías.

a) Si a 10 cm a su izquierda se coloca un objeto de 2 mm de altura, hallar la posición y el tamaño de la imagen.

b) Si dicha lente es de vidrio (n = 1,5) y una de sus caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la otra? ¿De qué tipo de lente se trata?

Como la potencia de la lente es positiva, se trata de una lente convergente, cuya distancia focal imagen es:

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{5\ \text{m}^{-1}} = 0{,}2\ \text{m}$$

a) Según el enunciado, disponemos de los siguientes datos:

$s = -10$ cm; $\quad y = 2$ mm

La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10\ \text{cm}} = \frac{1}{20\ \text{cm}}; \qquad s' = -20\ \text{cm}$$

La imagen se forma 20 cm delante de la lente, por tanto, es virtual.

El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$y' = \frac{ys'}{s} = \frac{0{,}2\ \text{cm} \cdot (-20\ \text{cm})}{-10\ \text{cm}} = 0{,}4\ \text{cm} = 4\ \text{cm}$$

Como el aumento es positivo, la imagen es derecha.

b) Sabemos que la lente es convergente, pero veamos qué tipo de lente convergente es. El radio de curvatura de la otra cara de la lente lo obtenemos a partir de la ecuación de la distancia focal imagen:

$$P = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right);$$

$$5\ \text{m}^{-1} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{0{,}1\ \text{m}} - \frac{1}{R_2}\right); \qquad R_2 = \infty$$

Como el radio de esta cara es infinito, la cara es plana y la lente es plano convexa.

Bloque V. Introducción a la física moderna

1. Una muestra de material radiactivo posee una actividad de 115 Bq inmediatamente después de ser extraída del reactor donde se formó. Su actividad 2 horas después resulta ser 85,2 Bq.

a) Calcule el periodo de semidesintegración de la muestra.

b) ¿Cuántos núcleos radiactivos existían inicialmente en la muestra?

Dato: 1 Bq = 1 desintegración/segundo.

a) Previamente calculamos la constante de desintegración λ:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}; \qquad \text{L}\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\lambda t;$$

$$\lambda = \frac{\text{L}\left(\frac{A}{A_0}\right)}{t} = -\frac{\text{L}\left(\frac{85{,}2\ \text{Bq}}{115\ \text{Bq}}\right)}{2\ \text{horas}} = 0{,}150\ \text{horas}^{-1}$$

Ya podemos calcular el periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\text{L}\ 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{0{,}150\ \text{horas}^{-1}} = 4{,}62\ \text{horas}$$

b) El número de núcleos radiactivos que existían inicialmente se obtiene a partir del valor de la actividad inicial:

$$A_0 = \frac{115\ \text{desintegraciones}}{1 s} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{hora}} =$$

$$= 4{,}14 \cdot 10^5\ \text{desintegraciones/hora}$$

$$A_0 = \lambda N_0$$

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^5\ \text{desintegraciones/hora}}{0{,}150\ \text{horas}^{-1}} =$$

$$= 2{,}76 \cdot 10^6\ \text{desintegraciones}$$

Como cada núcleo produce una desintegración, en la muestra inicial existían $2{,}76 \cdot 10^6$ núcleos radiactivos.

2. El isótopo de fósforo $^{32}_{15}$P, cuya masa es 31,9739 u, se transforma por emisión beta en cierto isótopo estable de azufre (Z = 16), de masa 31,9721 u. El proceso, cuyo periodo de semidesintegración es 14,28 días, está acompañado por la liberación de cierta cantidad de energía en forma de radiación electromagnética. Con estos datos:

a) Escriba la reacción nuclear y calcule la energía y la frecuencia de la radiación emitida.

b) Calcule la fracción de átomos de fósforo desintegrados al cabo de 48 horas para una muestra formada inicialmente solo por átomos de fósforo $^{32}_{15}$P.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js; 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J;
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) La reacción nuclear es la siguiente:

$$^{32}_{15}\text{P} \rightarrow {}^{32}_{16}\text{S} + {}^{0}_{-1}\text{X}$$

Para que se conserven el número atómico y el número másico en la reacción la partícula X debe ser un electrón. Un neutrón del núcleo se convierte en un protón, un electrón y una partícula, sin carga y sin masa en reposo, llamada antineutrino $\bar{\nu}_e$. Por tanto, la reacción completa es:

$$^{32}_{15}\text{P} \rightarrow {}^{32}_{16}\text{S} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}_e$$

A partir de las masas atómicas, calculamos la variación de masa de la reacción:

$$\Delta m = m_s + m_e - m_p$$

La masa del electrón es:

$$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \frac{1\ \text{u}}{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 0{,}00055\ \text{u}$$

$\Delta m = 31{,}9721\ \text{u} + 0{,}00055\ \text{u} - 31{,}9739\ \text{u} = -1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{u}$

Esta pérdida de masa en la reacción se convierte en energía que se libera en el proceso:

$E = \Delta m\, c^2 =$
$= 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/u} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1})^2 =$
$= 1{,}87 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$

La frecuencia de la radiación emitida es:

$$E = hf; \qquad f = \frac{E}{h} = \frac{1{,}87 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 2{,}82 \cdot 10^{20}\ \text{Hz}$$

b) Calculamos la constante de desintegración λ a partir del periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\text{L } 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{(14{,}28 \cdot 24)\ \text{horas}} = 2{,}02 \cdot 10^{-3}\ \text{horas}^{-1}$$

Ahora calculamos la fracción de átomos desintegrados a partir de la ecuación fundamental de la radiactividad:

$N = N_0\, e^{-\lambda t}$

$$\text{L}\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t = -2{,}02 \cdot 10^{-3}\ \text{horas}^{-1} \cdot 48\ \text{horas} = -0{,}097$$

$$\frac{N}{N_0} = 0{,}91; \qquad N = 0{,}91\, N_0$$

Como quedan sin desintegrar el 91% de los núcleos, se han desintegrado el 9% de los átomos de fósforo.

3. Determina el número másico y el número atómico del isótopo que resultará del $^{238}_{92}U$ después de emitir tres partículas alfa y dos beta.

El número másico es $A = 238$. El nuevo número másico será:

$A' = 238 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 226.$

El número atómico es $Z = 92$. El nuevo número atómico será:

$Z' = 92 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 88.$

Así, el resultado de la emisión de 3α y 2β es $^{226}_{88}Ra$.

4. En una experiencia del efecto fotoeléctrico, la función de trabajo de un material es W_e, la constante de Planck h, la frecuencia incidente f y la velocidad de la luz c.

La longitud de onda umbral para la emisión de fotoelectrones es:

a) $\dfrac{W_e}{hf}$; ***b)*** $\dfrac{W_e}{h}$; ***c)*** $\dfrac{c}{W_e}$; ***d)*** $\dfrac{hc}{W_e}$

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente.

La opción correcta es la *d)*: $W_e = \dfrac{h_c}{\lambda_o}$; $\lambda_o = \dfrac{h_c}{W_e}$

5. Cuando se bombardea un blanco de ^7_3Li con protones rápidos se produce 7 4Be ^7_4Be más una partícula ligera.

a) **Escribe la ecuación de esta reacción nuclear e identifica razonadamente la partícula ligera.**

b) **Calcula la mínima energía cinética que deben tener los protones para que pueda producirse esta reacción.**

Expresa el resultado en MeV y en J.

Datos: masas atómicas: $m_{Li} = 7{,}016004$ u; $m_{Be} = 7{,}016929$ u; $m_n = 1{,}008665$ u; $m_p = 1{,}007276$ u.

a) $^7_3Li + ^1_1H \rightarrow ^7_3Be + ^1_0n$ (La partícula ligera es un neutrón)

b) $\Delta m = m_{Be} + m_p - (m_{Li} + m_H) = 7{,}016929\ \text{u} + 1{,}008665\ \text{u} -$
$- (7{,}016004\ \text{u} + 1{,}007276\ \text{u}) = 0{,}002314\ \text{u}$

$E = 0{,}002314\ \text{u} \cdot 931{,}5\ \text{MeV/u} = 2{,}155491\ \text{MeV}$

$E = 2{,}155491 \cdot 10^6\ \text{eV} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} = 3{,}45 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$