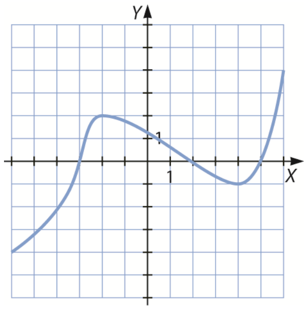
Aplicaciones de la derivada. Representación de funciones

11

ACTIVIDADES

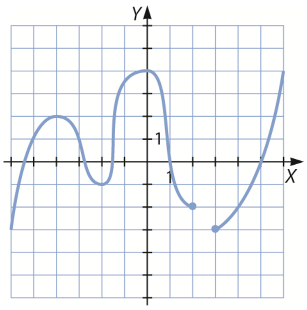
1. Dibuja la gráfica de una función creciente en $(-\infty, -2] \cup (4, \infty]$ y decreciente en el resto.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



2. Dibuja la gráfica de una función con dos máximos y un mínimo y cinco puntos de corte con los ejes *X* e *Y*.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



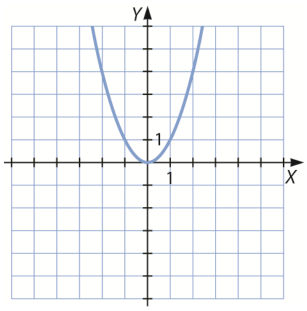
3. Dibuja la gráfica de $f(x) = x^2$. A partir de ella, encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas.

a) $f(x) = (x - 1)^2$

b) $f(x) = (x + 2)^2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 3$



$f(x) = x^2$ decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

a) $f(x) = (x - 1)^2$

En este caso se trata de una traslación de la función original una unidad a la derecha, el intervalo de decrecimiento en este caso será $(-\infty, 1)$ y el de crecimiento será $(1, +\infty)$.

b) $f(x) = (x + 2)^2$

En este caso se trata de una traslación de la función original dos unidades a la izquierda, por lo que el intervalo de decrecimiento será $(-\infty, -2)$ y el de crecimiento será $(-2, +\infty)$.

c) $f(x) = x^2 + 1$

Esta función es el resultado de trasladar una unidad hacia arriba la función original, por lo que el intervalo de decrecimiento en este caso será $(-\infty, 0)$ y el de crecimiento será $(0, +\infty)$.

d) $f(x) = x^2 - 3$

En este caso, como en el apartado anterior, se produce una traslación en vertical de tres unidades hacia abajo, con lo que el intervalo de decrecimiento en este caso será $(-\infty, 0)$ y el de crecimiento será $(0, +\infty)$.

4. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$

a) La derivada es $f'(x) = 4x + 4$ y $4x + 4 = 0 \to x = -1$.

Vemos que $4x + 4 < 0 \to x \in (-\infty, -1)$ → En este intervalo la función decrece.

$4x + 4 > 0 \to x \in (-1, +\infty)$ → En este intervalo la función crece.

b) La derivada es $f'(x) = -2x + 6$ y $-2x + 6 = 0 \to x = 3$. Vemos que:

$-2x + 6 > 0 \to x \in (-\infty, 3)$ → En este intervalo la función crece.

$-2x + 6 < 0 \to x \in (3, +\infty)$ → En este intervalo la función decrece.

5. Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$

a) Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, que se anula en $x = 0$ y $x = 2$.

Es creciente a la izquierda de 0 y decreciente a la derecha → Máximo en (0, 0).

Es decreciente a la izquierda de 2 y creciente a la derecha → Mínimo en (2, –4).

b) Su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x - 3)(x + 2)$ y se anula en $x = 3$ y $x = -2$.

Es creciente a la izquierda de –2 y decreciente a la derecha → Máximo en (–2, 45).

Es decreciente a la izquierda de 3 y creciente a la derecha → Mínimo en (0, –80).

6. Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones utilizando la segunda derivada.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ c) $f(x) = x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ d) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 4x$

a) Su primera derivada es $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, que es igual a 0 en $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Su segunda derivada es $f''(x) = 12x^2 - 8 = 4(3x - 2)$.

Para $x = -\sqrt{2}$: $f''(-\sqrt{2}) = 4(3(-\sqrt{2})^2 - 2) = 4(6 - 2) = 16 > 0$ → Mínimo en $x = -\sqrt{2}$.

Para $x = \sqrt{2}$: $f''(\sqrt{2}) = 4\left(3(\sqrt{2})^2 - 2\right) = 4(6 - 2) = 16 > 0$ → Mínimo en $x = \sqrt{2}$.

Para $x = 0$: $f''(0) = 4(3(0)^2 - 2) = 4(0 - 2) = -8 < 0$ → Máximo en $x = 0$.

b) Su primera derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x-2)$, que es igual a 0 en $x = 0$ y $x = 2$.

Su segunda derivada es $f''(x) = 6x + 6 = 6(x-1)$.

Para $x = 0$: $f''(0) = 6(0-1) = -6 < 0 \rightarrow$ Máximo en $x = 0$.

Para $x = 2$: $f''(2) = 6(2-1) = 6 > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = 2$.

c) Su primera derivada es $f'(x) = 2x + 9$, que es igual a 0 en $x = \frac{-9}{2}$.

Su segunda derivada es $f''(x) = 2$.

Para $x = \frac{-9}{2}$: $f''\left(\frac{-9}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = \frac{-9}{2}$.

d) Su primera derivada es $f'(x) = 6x^2 + 18x - 4$ que se anula para $x = \frac{-9+\sqrt{105}}{6}$ y $x = \frac{-9-\sqrt{105}}{6}$.

Su segunda derivada es $f''(x) = 12x + 18$.

Para $x = \frac{-9+\sqrt{105}}{6}$: $f''\left(\frac{-9+\sqrt{105}}{6}\right) > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = \frac{-9+\sqrt{105}}{6}$.

Para $x = \frac{-9-\sqrt{105}}{6}$: $f''\left(\frac{-9-\sqrt{105}}{6}\right) < 0 \rightarrow$ Máximo en $x = \frac{-9-\sqrt{105}}{6}$.

7. Considera la siguiente función racional.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Estudia su crecimiento y encuentra sus máximos y mínimos.

Su primera derivada es $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Vemos que es una función racional cuyo denominador es siempre positivo, así que estudiamos el signo del numerador.

$x(x+2) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Por tanto, en estos intervalos la función es creciente.

$x(x+2) < 0 \rightarrow x \in (-2, 0)$. Por tanto, en este intervalo la función es decreciente.

Para calcular los valores de x tales que $f'(x) = 0$, hacemos $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0$, que es equivalente en este caso a calcular $x(x+2) = 0$. Esta ecuación se cumple en $x = 0$ y $x = -2$.

Su segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2x(x+2)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1) - 2x(x+2)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

Para $x = 0$: $f''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2 > 0 \rightarrow$ Mínimo en $x = 0$.

Para $x = -2$: $f''(-2) = \frac{2}{(-2+1)^3} = -2 < 0 \rightarrow$ Máximo en $x = -2$.

8. Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones.

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

a) Analizamos el signo de $f''(x)$:

$f'(x) = 21x^2 - 2x - 1$ $f''(x) = 42x - 2$

Buscamos los puntos donde $f''(x)$ se anula, que son los posibles puntos de inflexión:

$f''(x) = 42x - 2 = 0 \to x = \dfrac{1}{21}$

Analizamos el signo de $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de $\dfrac{1}{21}$:

Para $x < \dfrac{1}{21}$: $f''(0) = -2 < 0 \to f(x)$ es convexa.

Para $x > \dfrac{1}{21}$: $f''(1) = 26 > 0 \to f(x)$ es cóncava.

b) Analizamos el signo de $f''(x)$:

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ $f''(x) = \dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

Buscamos los puntos donde $f''(x)$ se anula, que son los posibles puntos de inflexión:

$f''(x) = \dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \to x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Analizamos el signo de $f''(x)$ en $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x$:

Para $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $f''(-2) < 0 \to f(x)$ es convexa.

Para $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$: $f''(0) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

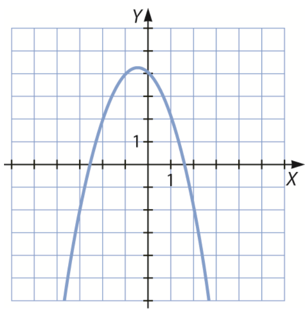
Para $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x$: $f''(2) < 0 \to f(x)$ es cóncava.

9. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.

a) $f(x) = -x^2 - x + 4$ b) $f(x) = -x - 5x^2$

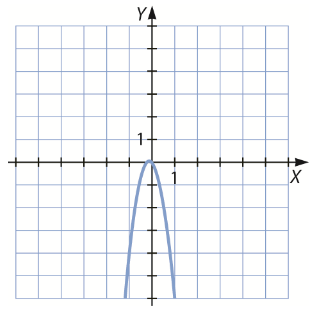
a) $f'(x) = -2x - 1$ $f''(x) = -2$

$f''(x) < 0$ para todo valor de x, por tanto es siembre convexa.



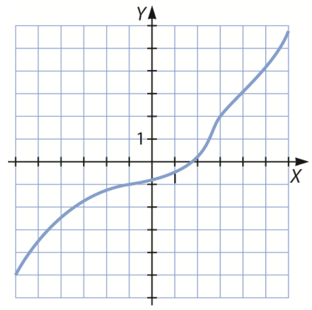
b) $f'(x) = -1 - 10x$ $f''(x) = -10$

$f''(x) < 0$ para todo valor de x, por tanto es siembre convexa.



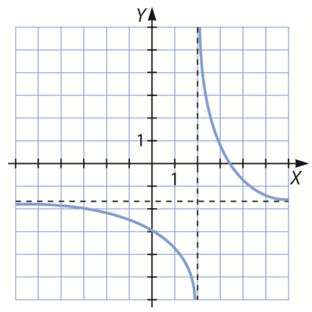
10. Dibuja la gráfica de una función siempre creciente que no tenga asíntotas.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



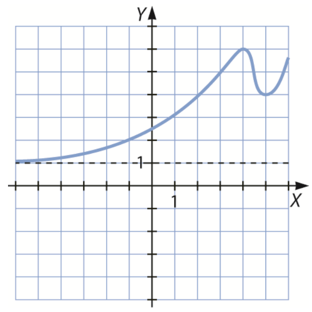
11. Dibuja la gráfica de una función siempre decreciente que tenga una asíntota vertical y otra horizontal.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



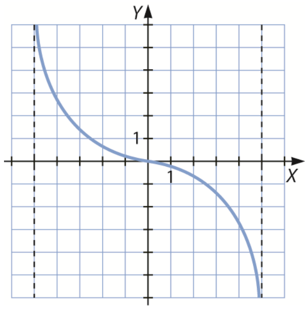
12. Dibuja la gráfica de una función siempre positiva con un máximo en (4, 6).

Respuesta abierta. Por ejemplo:



13. **Dibuja la gráfica de una función cuyo dominio sea $[-5, 5]$, pase por el origen y tal que $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -\infty$.**

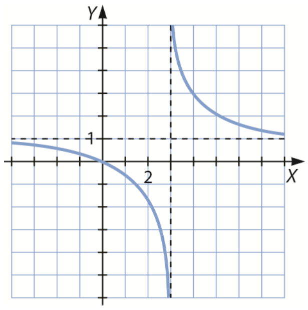
Respuesta abierta. Por ejemplo:



14. **Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones que se describen a continuación.**

- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{3\}$.**
- **Corta a los ejes en el punto (0, 0).**
- **Tiene una asíntota vertical en el punto $x = 3$ y una horizontal de altura $y = 1$.**
- **Es siempre decreciente.**
- **Es convexa en $(-\infty, 3)$ y cóncava en $(3, +\infty)$.**
- **No tiene puntos de inflexión.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



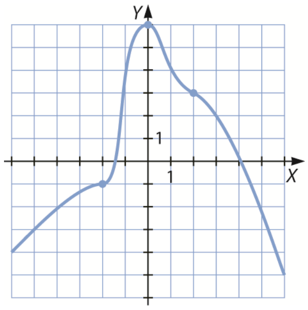
15. **Representa gráficamente una función que cumpla todas las condiciones que se describen a continuación.**

- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Corta al eje X en el punto $(-2, 0)$ y al eje Y en el punto (0, 1).**
- **Tiene dos asíntotas horizontales, $y = 3$ e $y = -2$.**
- **Es siempre creciente.**
- **Es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$.**
- **Tiene un punto de inflexión en $(-1, 0)$.**

No existe una función cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$ con un punto de inflexión en $x = -1$; el punto de inflexión debería estar en $x = 1$.

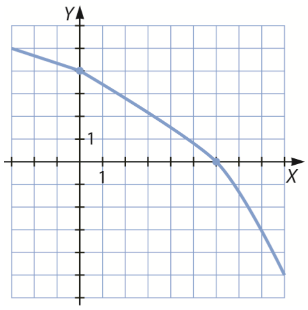
16. **Dibuja la gráfica de una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$, que pasa por $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, es creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $(0, \infty)$ y tiene un máximo en $(0, 6)$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



17. **Dibuja la gráfica de una función con dominio $\mathbb{R}$, cuyos puntos de corte son $(0, 4)$ y $(6, 0)$, y tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

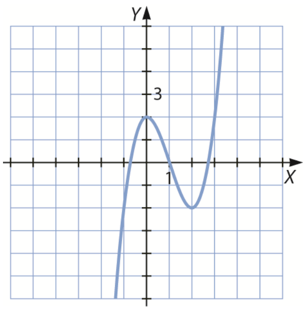


18. **Representa gráficamente estas funciones.**

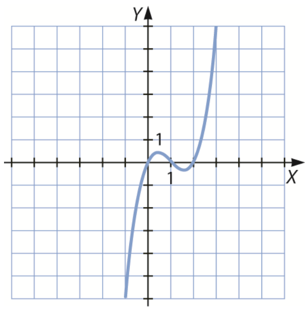
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

a)



b)

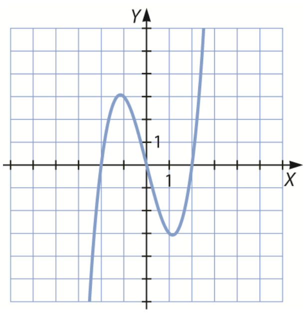


19. **Representa gráficamente estas funciones.**

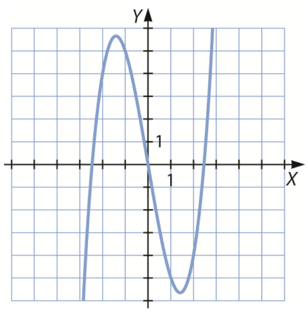
a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $f(x) = x^3 - 6x$

a)



b)



20. Determina cuántas y cuáles son las asíntotas de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

a) ▪ Asíntotas verticales:

El denominador se anula en $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{x-2} = \infty \rightarrow f$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

▪ Asíntotas horizontales:

Como grado$(3x)$ = grado$(x - 2) \rightarrow$ Existe asíntota horizontal en $y = k$, donde $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x-2} = 3 \rightarrow y = 3$.

▪ Asíntotas oblicuas:

No existe asíntota oblicua porque grado$(3x)$ = grado$(x - 2) = 1$.

b) ▪ Asíntotas verticales:

El denominador se anula en $x = \pm 1$:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \infty \rightarrow f$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \infty \rightarrow f$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

▪ Asíntotas horizontales:

Como grado(x^2) = grado$(x^2 - 1) \rightarrow$ Existe asíntota horizontal en $y = k$, donde $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1 \rightarrow y = 1$.

▪ Asíntotas oblícuas:

No existe asíntota oblicua porque grado(x^2) = grado$(x^2 - 1) = 1$.

21. Determina las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

b) $f(x) = x + \dfrac{x}{2-x}$

a) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x} = 1 \rightarrow m = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2}{x+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2 - x^2 - x}{x+1}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow n = -1$

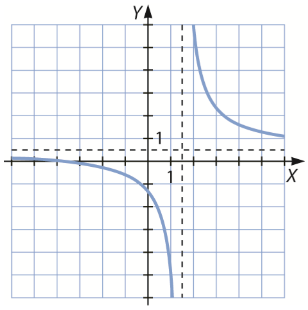
Por lo tanto la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

b) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \dfrac{x}{2-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x - x^2}{x(2-x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-x}{2-x} = 1 \rightarrow m = 1$

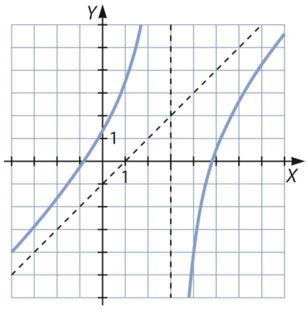
$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[x + \dfrac{x}{2-x} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x}{2-x}\right] = -1 \rightarrow n = -1$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x - 1$.

22. **Representa la función $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-3}$.**



23. **Representa la función $f(x) = x - \dfrac{x+4}{x-3}$.**



SABER HACER

24. **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de $f(x)$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Analizamos el dominio de $f(x)$ para saber dónde puede haber discontinuidades:

$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

Analizamos el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Tenemos que ver dónde se anula $f'(x)$. Para ello analizamos dónde se anulan cada una de las partes que la componen:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2 = 0 \to x = -1 \\ -\dfrac{2}{x^3} \neq 0 \end{array}\right\} \to \text{En } x = -1\ f'(x) \text{ no toma el valor de la primera función. Por tanto, } f'(x) \text{ nunca se anula.}$$

Analizamos el signo de $f'(x)$ si $x < -2$, $-2 \leq x < 0$ y $x > 0$:

Para $x < -2$: $f'(-3) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

Para $-2 \leq x < 0$: $f'(-1) > 0 \to f(x)$ es creciente.

Para $x > 0$: $f'(1) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

25. **La función $g(x) = 100 + 5x + x^2$ proporciona el gasto en euros de una empresa para fabricar x unidades. Si cada unidad tiene un precio de venta de 30 €, calcula la función beneficio y cuántas unidades hay que producir para que sea máximo.**

Para empezar, si se entiende que la empresa gana 30 € por cada unidad, el ingreso vendrá dado por $f(x) = 30x$, mientras que el gasto será $g(x)$.

Por lo tanto, el beneficio será $b(x) = f(x) - g(x) = 30x - 100 - 5x - x^2 = 25x - x^2 - 100$.

Primero se calcula $b'(x) = 25 - 2x$ y se observa que el candidato a máximo o mínimo es $x = \frac{25}{2}$.

Se calcula ahora $b''(x) = -2$ y se ve entonces que $x = \frac{25}{2}$ es un máximo.

Como $\frac{25}{2} = 1{,}25$ no es un número entero, se mira el valor de $b(12)$ y $b(13)$ y, siendo el beneficio $b(12) = (13) = 56$, se concluye que para maximizar el beneficio se deben fabricar 12 o 13 unidades.

26. **Halla el valor de a para que en $x = 2$ haya un mínimo para $f(x) = x^2 + ax + a$.**

Se calcula la derivada de la función $f'(x) = 2x + a$ y se impone la condición de que $f'(2) = 0$:

$2 \cdot 2 + a = 0 \rightarrow a = -4$, así que el candidato será $a = -4$.

Se comprueba que es un mínimo mirando que la segunda derivada es positiva:

$f''(x) = 2 \rightarrow f''(2) = 2 > 0$. Con $a = -4$, $x = -2$ es un mínimo.

27. **Averigua cómo son las funciones cuya derivada se representa con una recta de pendiente 3.**

Se sabe que la derivada de la función es una recta con pendiente 3, por lo que será de la forma $f'(x) = 3x + n$.

La función será de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, pues su derivada es $f'(x) = 2ax + b$.

Se tiene entonces que $2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$, y $b = n$, por lo que las funciones que cumplan las condiciones del enunciado tendrán como ecuación: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + nx + c$ con $n, c \in \mathbb{R}$

28. **Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice es (3, −8), sabiendo que corta al eje *Y* en (0, 1).**

Una parábola tendrá como ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, y como pasa por el (0, 1), al sustituir, se obtiene $c = 1$.

Al ser el punto (3, −8) el vértice de la parábola:

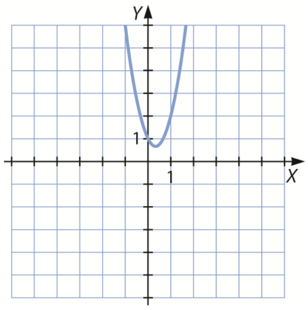
- Es un punto de ella $\rightarrow$ $a3^2 + b3 + 1 = -8$
- Será un máximo o un mínimo global $\rightarrow f'(3) = 0 \rightarrow$ $6a + b = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} a3^2 + b3 + 1 = -8 \\ 6a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 9a + 3b = -1 \\ b = -6a \end{array}\right\} \rightarrow 9a - 18a = -9 \rightarrow a = 1, b = -6$$

Por tanto, $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

29. **Representa la derivada de $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.**

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$



30. **Estudia la concavidad y la convexidad de la función.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Analizamos el dominio de $f(x)$ para saber dónde puede haber discontinuidades:

$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq -2 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{6}{x^4} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

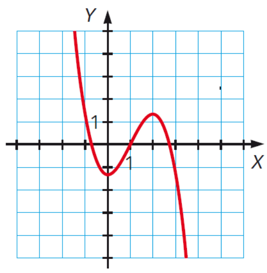
Tenemos que ver dónde se anula $f''(x)$. En este caso, $f''(x) \neq 0$ para cualquier x, por tanto, analizamos el signo de $f''(x)$ si $x < -2$, $-2 \leq x < 0$ y $x > 0$:

Para $x < -2$: $f'' > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

Para $-2 \leq x < 0$: $f''(-1) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

Para $x > 0$: $f'(1) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

31. **Estudia la concavidad o convexidad en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$.**



En $x = -1$ la función es cóncava.

En $x = 1$ la función tiene un punto de inflexión.

En $x = 2$ la función es convexa.

32. Determina si la función $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^2-1}$ tiene asíntotas horizontales y estudia su posición.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-x^2}{x^2-1} = -1 \to$ f tiene una asíntota horizontal en $y=-1$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la derecha, se dan valores muy grandes a x, y se estudia su valor:

Para $x = 1\,000$: $f(1000) = \dfrac{2-(1000)^2}{(1000)^2-1} = \dfrac{2-1\,000\,000}{1\,000\,000-1} = \dfrac{-999\,998}{999\,999} = -0{,}999998 > -1$

Por la derecha, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la izquierda, se dan valores muy pequeños a x, y se estudia su valor:

Para $x = -1\,000$: $f(-1000) = \dfrac{2-(-1000)^2}{(-1000)^2-1} = \dfrac{-999\,998}{999\,999} = -0{,}999998 > -1$

Por la izquierda, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

33. Calcula las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^3+3x^2+2}$ y estudia su posición.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{2x^3+3x^2+2} = \dfrac{1}{2} \to$ f tiene una asíntota horizontal en $y = \dfrac{1}{2}$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la derecha, se dan valores muy grandes a x, y se estudia su valor:

Para $x = 1\,000$: $f(1000) = \dfrac{(1000)^3}{2(1000)^3+3(1000)^2+2} = \dfrac{1\,000\,000\,000}{2\,003\,000\,002} = 0{,}49925\ldots < \dfrac{1}{2}$

Por la derecha, la gráfica está situada por debajo de la asíntota.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota por la izquierda, se dan valores muy pequeños a x, y se estudia su valor:

Para $x = -1\,000$: $f(-1000) = \dfrac{(-1000)^3}{2(-1000)^3+3(-1000)^2+2} = \dfrac{1\,000\,000\,000}{1\,996\,999\,998} = 0{,}5007\ldots > \dfrac{1}{2}$

Por la izquierda, la gráfica está situada por encima de la asíntota.

34. Determina si la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ tiene asíntotas verticales y estudia su posición.

Las asíntotas verticales aparecen cuando el denominador vale 0. En este caso:

$x^2-4 = (x+2)(x-2) = 0 \to x = \pm 2$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \infty \to$ Tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \infty \to$ Tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = -2$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a -2 por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x = -2{,}01$: $f(-2{,}01) = \dfrac{-2{,}01+1}{(-2{,}01)^2-4} < 0 \to \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = -2$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a -2por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x = -1{,}99$: $f(-1{,}99) = \dfrac{-1{,}99+1}{(-1{,}99)^2-4} > 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = 2$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a 2por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x = 1{,}99$: $f(1{,}99) = \dfrac{1{,}99+1}{(1{,}99)^2-4} < 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = 2$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a 2 por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x = 2{,}01$: $f(2{,}01) = \dfrac{2{,}01+1}{(2{,}01)^2-4} > 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

35. Calcula las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2-x-6}$ y estudia su posición.

Las asíntotas verticales aparecen cuando el denominador vale 0. En este caso:

$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 3 \longrightarrow$ Tiene dos asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x-2}{x^2-x-6} = \infty \rightarrow$ Tiene asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x-2}{x^2-x-6} = \infty \rightarrow$ Tiene asíntota vertical en $x = 3$.

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = -2$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a -2 por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x = -2{,}01$: $f(-2{,}01) = \dfrac{3(-2{,}01)-2}{(-2{,}01)^2+2{,}01-6} < 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = -2$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a -2 por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x = -1{,}99$: $f(-1{,}99) = \dfrac{3(-1{,}99)-2}{(-1{,}99)^2+1{,}99-6} > 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = 3$ por la izquierda, se dan valores muy cercanos a 3 por la izquierda a x, y se estudia su valor:

Para $x = 2{,}99$: $f(2{,}99) = \dfrac{3(2{,}99)-2}{(2{,}99)^2-2{,}99-6} < 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

Para determinar la situación de la gráfica respecto de la asíntota $x = 3$ por la derecha, se dan valores muy cercanos a 3 por la derecha a x, y se estudia su valor:

Para $x = 3{,}01$: $f(3{,}01) = \dfrac{3(3{,}01)-2}{(3{,}01)^2-3{,}01-6} > 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

ACTIVIDADES FINALES

36. Decide si estas funciones crecen o decrecen en los puntos que se indican.

a) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 1$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$ en $x = -2$

c) $f(x) = 2^x + 3\ln x - 8$ en $x = 4$

d) $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$ en $x = 9$

a) $f'(x) = -6x^2 + 6x - 1$

$f'(1) = -1 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en $x = 1$.

b) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)x - (2x^2 - 3x + 1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2}$

$f'(-2) = \dfrac{9}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = -2$.

c) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{3}{x}$

$f'(4) = 16 \ln 2 + \dfrac{3}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 4$.

d) $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$f'(9) = \dfrac{5}{2} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 9$.

37. Di si las siguientes funciones crecen o decrecen en los puntos que se indican.

a) $f(x) = sen\ x$ en $x = \pi$

b) $f(x) = sen\ x + tg\ x$ en $x = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1 + sen\ x}{x^2 - 1}$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$

d) $f(x) = sen^2\ x + cos^2\ x$ en $x = 0$

a) $f'(x) = cos\ x \rightarrow f'(\pi) = cos\ \pi = -1 < 0 \rightarrow$ La función decrece en $x = \pi$.

b) $f'(x) = cos\ x + 1 + tg^2 x \rightarrow f'(0) = cos\ 0 + 1 + tg^2\ 0 = 2 > 0 \rightarrow$ La función crece en $x = 0$.

c) $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)cos\ x - 2x(sen\ x + 1)}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0 \rightarrow$ La función decrece en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

d) $f(x) = sen^2 x + cos^2 x = 1\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Función constante en todo su dominio y no crece ni decrece en $x = 0$.

38. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones. ¿Existe algún máximo o mínimo?

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x$

d) $f(x) = -3x - x^2$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

f) $f(x) = 3x^2 - 2x$

a) $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 2$.

En $(-\infty, 2)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x = 2$ es un mínimo.

b) $f'(x) = -2x \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

Por tanto, $x = 0$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x - 8 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 2$.

En $(-\infty, 2)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x = 2$ es un mínimo.

d) $f'(x) = -3 - 2x \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = -\frac{3}{2}$.

En $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

Por tanto, $x = -\frac{3}{2}$ es un máximo.

e) $f'(x) = 2x - 6 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 3$.

En $(-\infty, 3)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(3, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x = 3$ es un mínimo.

f) $f'(x) = 6x - 2 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{1}{3}$.

En $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

Por tanto, $x = \frac{1}{3}$ es un mínimo.

39. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones, y encuentra los posibles máximos o mínimos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

c) $f(x) = x^3 - 3x$

d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 1$ y $x = 3$. Divide el dominio en 3 intervalos.

En $(-\infty, 1)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(1, 3)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(3, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x = 1$ tiene un máximo y en $x = 3$ un mínimo.

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ y $x = 3$. Divide el dominio en 3 intervalos.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(-1, 3)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(3, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x = -1$ tiene un máximo y en $x = 3$ un mínimo.

c) $f'(x)=3x^2-3 \to f'(x)=0$ cuando $x=\pm 1$.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(-1, 1)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(1, +\infty)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=-1$ tiene un máximo y en $x=1$ un mínimo.

d) $f'(x)=6x^2+6x-36 \to f'(x)=0$ cuando $x=2$ y $x=-3$.

En $(-\infty, -3)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(-3, 2)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x=-3$ tiene un máximo, y en $x=2$ un mínimo.

e) $f'(x)=6x^2+6x+6>0 \to f'(x)>0\ \forall x \in \mathbb{R}$

La función es creciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

40. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones.

a) $f(x)=x^4-4x$ b) $f(x)=9x^4-2x^3-6x^2$ c) $f(x)=\frac{3x^4}{4}-x^3-3x^2+6$ d) $f(x)=x^4-2x^2$

a) $f'(x)=4x^3-4 \to f'(x)=0$ cuando $x=1$.

En $(-\infty, 1)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(1, +\infty)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

b) $f'(x)=36x^3-6x^2-12x \to f'(x)=0$ cuando $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{2}{3}$.

En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ es creciente en este intervalo.

c) $f'(x)=3x^3-3x^2-6x \to f'(x)=0$ cuando $x=0$, $x=-1$ y $x=2$.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(-1, 0)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, 2)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(2, +\infty)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

d) $f'(x)=4x(x+1)(x-1) \to f'(x)=0$ cuando $x=0$, $x=-1$ y $x=1$.

En $(-\infty, -1)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(-1, 0)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, 1)$ $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(1, +\infty)$ $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente en este intervalo.

41. Estudia el crecimiento de estas funciones.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

b) $f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

En $(-\infty, 0)$ $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

En $(-\infty, 0)$ la función no está definida.

En $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en este intervalo.

42. Analiza en qué intervalos crece y en cuáles decrece cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3\,sen\,2x$ c) $f(x) = e^{2x-1}$

b) $f(x) = 2^{x+1}$ d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x + 5$

a) $f'(x) = 6\cos 2x \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

En los intervalos $\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En los intervalos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

b) $f'(x) = 2^{x+1}\ln 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, la función es creciente en toda la recta real.

c) $f'(x) = 2e^{2x-1} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, la función es creciente en toda la recta real.

d) $f'(x) = -\ln 4 \cdot 4^{-x} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, la función es decreciente en toda la recta real.

43. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln x$ d) $f(x) = \log_2 \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$

c) $f(x) = \log_2(x^3 + 1)$ f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right)$

a) $\text{Dom}\, f(x) = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

b) $x^2+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\rightarrow f'(x)=0\rightarrow x=0$$

$f(x)$ decrece en $(-\infty, 0)$ porque $f'(-1)=-1<0$ y crece en $(0, +\infty)$ porque $f'(1)=-1>0$.

c) $x^3+1>0\rightarrow x>-1\rightarrow \text{Dom } f(x)=(-\infty,-1)$

$f'(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)\ln 2}>0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

d) $\text{Dom } f(x)=(0,+\infty)$

$f'(x)=-\dfrac{1}{x\log 2}<0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre decreciente.

e) $\dfrac{1}{x^2+1}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{-2x}{x^2+1}\rightarrow f'(x)=0\rightarrow x=0$$

En $(-\infty,0)$ $f'(x)>0\rightarrow$ La función es creciente.

En $(0,+\infty)$ $f'(x)<0\rightarrow$ La función es decreciente.

$f(x)$ tiene un máximo en $x=0$.

f) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{x+1}>0\rightarrow x>-1\rightarrow \text{Dom } f(x)=(-1,+\infty)$

$f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}<0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre decreciente.

44. Determina los intervalos donde las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x)=\begin{cases}x-3 & \text{si } x\le 1\\ 3-2x & \text{si } x>1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si } x<0\\ 3x^2+5x-2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}+3 & \text{si } x>0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-9 & \text{si } x\le 2\\ 8-3x & \text{si } x>2\end{cases}$

a) $f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\le 1\\ -2 & \text{si } x>1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f \text{ creciente} & \text{si } x\le 1\\ f \text{ decreciente} & \text{si } x>1\end{cases}$

b) $f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<0\\ 6x+5 & \text{si } x\ge 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(x)>0 & \text{si } x<0\\ f'(x)>0 & \text{si } x\ge 0\end{cases}\rightarrow f \text{ crece } \forall x\in\mathbb{R}$

c) $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{si } x\le 0\\ x & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(x)>0 & \text{si } x\le 0\\ f'(x)>0 & \text{si } x>0\end{cases}\rightarrow f \text{ crece } \forall x\in\mathbb{R}$

d) $f'(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{si } x\le 2\\ -3 & \text{si } x>2\end{cases}\rightarrow\left.\begin{cases}f'(x)<0 & \text{si } x<-1\rightarrow f \text{ decrece}\\ f'(x)>0 & \text{si } -1<x\le 2\rightarrow f \text{ crece}\\ f'(x)<0 & \text{si } 2<x\rightarrow f \text{ decrece}\end{cases}\right\}\rightarrow f \text{ tiene un mínimo en } x=-1$

45. **Analiza en qué intervalos crece y en cuáles decrece cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(x) = 0$ cuando $x = 0$.

Como el denominador es siempre positivo, solo comprobamos el signo del numerador, por lo que:

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0) \rightarrow$ En este intervalo $f(x)$ decrece.

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \rightarrow x \in (0, +\infty) \rightarrow$ En este intervalo $f(x)$ crece.

b) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$ $f'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

c) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre creciente.

d) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$ $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2} < 0$ en todo el dominio, por lo que $f(x)$ es siempre decreciente.

46. **¿Es cierto que la función $f(x) = x^3$ es siempre creciente? ¿Qué ocurre en el origen de coordenadas?**

$f'(x) = 3x^2$

Si $x \neq 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow$ La función no es creciente ni decreciente en este punto.

47. **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = |3x+2|$ en $x = 1$ y $x = -4$

b) $f(x) = |-x+3|$ en $x = 0$ y $x = 5$

c) $f(x) = |-(x-3)|$ en $x = -1$ y $x = 2$

d) $f(x) = \left|\dfrac{3x}{2} + 1\right|$ en $x = -2$ y $x = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} -3x-2 & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ 3x+2 & \text{si } x \geq -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ 3 & \text{si } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ decrece en } \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right). \\ f(x) \text{ crece en } \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right). \end{cases}$

En $x = 1$ crece y en $x = -4$ decrece.

b) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 3 \\ 3-x & \text{si } x \leq 3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ crece en } (3, +\infty). \\ f(x) \text{ decrece en } (-\infty, 3). \end{cases}$

En $x = 0$ decrece y en $x = 5$ crece.

c) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 3 \\ 3-x & \text{si } x \leq 3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ crece en } (3, +\infty). \\ f(x) \text{ decrece en } (-\infty, 3). \end{cases}$

En $x = -1$ decrece y en $x = 2$ decrece.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x-2}{2} & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3x+2}{2} & \text{si } x \geq -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{2} & \text{si } x < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{2} & \text{si } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ decrece en } \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right). \\ f(x) \text{ crece en } \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right). \end{cases}$

En $x = -2$ crece y en $x = 0$ crece.

48. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = |x^2 - 3|$ en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 4$

b) $f(x) = |-x^2 + 3x|$ en $x = -2$, $x = 2$ y $x = 6$

c) $f(x) = \left|\dfrac{x+7}{4}\right|$ en $x = -10$, $x = -5$ y $x = 1$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \le -\sqrt{3} \\ 3 - x^2 & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x^2 - 3 & \text{si } \sqrt{3} \le x \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -\sqrt{3} \\ -2x & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 2x & \text{si } \sqrt{3} \le x \end{cases}$

En $x = -3$: $f'(-3) = -6 < 0 \to f(x)$ decrece.

En $x = -1$: $f'(-1) = 2 > 0 \to f(x)$ crece.

En $x = 4$: : $f'(4) = 8 > 0 \to f(x)$ crece.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \le 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x^2 - 3x & \text{si } 3 \le x \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \le 0 \\ 3 - 2x & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

En $x = -2$: $f'(-2) = -7 < 0 \to f(x)$ decrece.

En $x = 2$: $f'(2) = -1 < 0 \to f(x)$ decrece.

En $x = 6$: $f'(6) = 9 > 0 \to f(x)$ crece.

c) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+7}{4} & \text{si } x < -7 \\ \dfrac{x+7}{4} & \text{si } x \ge -7 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} & \text{si } x < -7 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x > -7 \end{cases} \to \begin{cases} f(x) \text{ decrece en } (-\infty, -7). \\ f(x) \text{ crece en } (-7, +\infty). \end{cases}$

En $x = -10$ decrece, en $x = -5$ y $x = 1$ crece.

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = |x^2 - x - 5|$

b) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

c) $f(x) = \left|\dfrac{x}{x^2 + 1}\right|$

d) $f(x) = -\sqrt{|x|}$

e) $f(x) = |\ln x|$

f) $f(x) = \ln(|x| + 1)$

a) $f(x) = |x^2 - x - 5| = \begin{cases} x^2 - x - 5 & \text{si } x \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right) \\ -x^2 + x + 5 & \text{si } x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right) \to \begin{cases} 2x - 1 > 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 < 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ -2x + 1 & \text{si } x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \to \begin{cases} -2x + 1 > 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ -2x + 1 < 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Por lo que la función decrece en $\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$.

b) $f(x)=\left|\frac{1}{x}\right|=\begin{cases}-\frac{1}{x} & \text{si } x<0\\ \frac{1}{x} & \text{si } x\geq 0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{si } x<0\\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(x)>0 & \text{si } x<0\\ f'(x)<0 & \text{si } x>0\end{cases}$

Por tanto, la función crece en el intervalo (–∞, 0) y decrece en el intervalo (0, +∞).

c) $f(x)=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\begin{cases}-\frac{x}{x^2+1} & \text{si } x<0\\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{si } x<0\\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(x)<0 & \text{en } x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)\\ f'(x)>0 & \text{en } x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\end{cases}$

La función decrece en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

d) $f(x)=-\sqrt{|x|}=\begin{cases}-\sqrt{-x} & \text{si } x<0\\ -\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x<0\\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(x)<0 \text{ si } x>0\\ f'(x)>0 \text{ si } x<0\end{cases}$

La función crece en el intervalo (–∞, 0) y decrece en (0, +∞).

e) $f(x)=|\ln x|=\begin{cases}-\ln x & \text{si } 0<x\leq 1\\ \ln x & \text{si } x>1\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & \text{si } 0<x<1\\ \frac{1}{x} & \text{si } x>1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(x)<0 \text{ si } 0<x<1\\ f'(x)>0 \text{ si } x>1\end{cases}$

La función decrece en el intervalo (0, 1) y crece en (1, +∞).

f) $f(x)=\ln(|x|+1)=\begin{cases}\ln(1-x) & \text{si } x<0\\ \ln(x+1) & \text{si } x\geq 0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{1-x} & \text{si } x<0\\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(x)<0 \text{ si } (-\infty,0)\\ f'(x)>0 \text{ si } (0,+\infty)\end{cases}$

La función decrece en el intervalo (–∞, 0) y crece en el intervalo (0, +∞).

50. Determina los máximos y los mínimos de las siguientes funciones utilizando la segunda derivada.

a) $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

b) $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$

c) $f(x)=\frac{x^2+9}{x}$

d) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+4}$

e) $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$

f) $f(x)=\frac{8x}{x^2+1}$

a) $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=0$ y $x=2$.

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3} \rightarrow \begin{cases}\text{En } x=0 \rightarrow f''(0)=-2<0\\ \text{En } x=2 \rightarrow f''(2)=2>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=0 \text{ máximo}\\ x=2 \text{ mínimo}\end{cases}$$

b) $f'(x)=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2} \rightarrow f'(x)=0$ cuando $x=0$ y $x=4$.

$$f''(x)=\frac{8}{(2-x)^3} \rightarrow \begin{cases}\text{En } x=0 \rightarrow f''(0)=1>0\\ \text{En } x=4 \rightarrow f''(4)=-1<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=0 \text{ mínimo}\\ x=2 \text{ máximo}\end{cases}$$

c) $f'(x)=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=\pm 3$.

$$f''(x)=\frac{18}{x^3}\to\begin{cases}\text{En } x=-3\to f''(-3)=-\dfrac{2}{3}<0\\ \text{En } x=3\to f''(3)=\dfrac{2}{3}>0\end{cases}\to\begin{cases}x=-3 \text{ máximo}\\ x=3 \text{ mínimo}\end{cases}$$

d) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2+12)}{(x^2+4)^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=0$.

$$f''(x)=-\frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}\to \text{En } x=0\ f''(0)=0$$

No podemos concluir mediante este método si es un máximo o un mínimo.

e) $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=0$ y $x=-2$.

$$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\to\begin{cases}\text{En } x=0\to f''(0)=2>0\\ \text{En } x=-2\to f''(-2)=-2<0\end{cases}\to\begin{cases}x=0 \text{ mínimo}\\ x=2 \text{ máximo}\end{cases}$$

f) $f'(x)=-\dfrac{8(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\to f'(x)=0$ cuando $x=\pm 1$.

$$f''(x)=\frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\to\begin{cases}\text{En } x=-1\to f''(-1)=4>0\\ \text{En } x=1\to f''(1)=-4<0\end{cases}\to\begin{cases}x=-1 \text{ mínimo}\\ x=1 \text{ máximo}\end{cases}$$

51. Encuentra los máximos y los mínimos de estas funciones utilizando la derivada segunda.

a) $f(x)=3x+2$

b) $f(x)=\dfrac{5-2x}{4}$

c) $f(x)=2x^3-6x$

d) $f(x)=2x^2-12x+5$

e) $f(x)=2x^4-4x^2$

f) $f(x)=x^4-2x^3$

a) $f'(x)=3>0\to f'(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ No existe máximo ni mínimo en esta función.

b) $f'(x)=-\dfrac{1}{2}<0\to f'(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ No existe máximo ni mínimo en esta función.

c) $f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)\to f'(x)=0$ cuando $x^2-1=0\to x=\pm 1$

$$f''(x)=12x\to\begin{cases}f''(-1)=-12<0\\ f''(1)=12>0\end{cases}\to\begin{cases}x=-1 \text{ máximo}\\ x=1 \text{ mínimo}\end{cases}$$

d) $f'(x)=4x-12=4(x-3)\to f'(x)=0$ cuando $4(x-3)=0\to x=3$

$f''(x)=4\to f''(3)=4>0\to x=3$ mínimo

e) $f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)\to f'(x)=0$ cuando $8x(x^2-1)=0\to x=0$ y $x=\pm 1$

$$f''(x)=8(3x^2-1)\to\begin{cases}f''(0)=-8<0\\ f''(-1)=16>0\\ f''(1)=16>0\end{cases}\to\begin{cases}x=0 \text{ máximo}\\ x=-1 \text{ mínimo}\\ x=1 \text{ mínimo}\end{cases}$$

f) $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)\to f'(x)=0$ para $x=0$ y $x=\dfrac{3}{2}$.

$$f''(x)=12x(x-1)\to\begin{cases}f''(0)=0\\ f''\left(\dfrac{3}{2}\right)=9>0\end{cases}\to\begin{cases}x=0 \text{ no se puede decidir con este método.}\\ x=\dfrac{3}{2} \text{ mínimo}\end{cases}$$

52. **Calcula, utilizando la derivada, la expresión algebraica de las coordenadas del vértice de una parábola genérica, del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.**

Como el vértice es un máximo o un mínimo, tiene que cumplir la ecuación $f(x) = 0$. Además, y por tanto en el vértice, al igualar ambas ecuaciones, se obtiene:

$0 = 2ax + b \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$, y al sustituir, $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$, con lo que ya se puede dar una expresión algebraica para el vértice de una parábola:

$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ en función de los parámetros a, b y c.

53. **Averigua los valores de a, b y c para que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga su vértice en el punto $(-1, -8)$ y corte al eje Y en $(0, -5)$.**

$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = (-1, 8)$ y $-5 = a0^2 + b0 + c \rightarrow c = -5$, por lo que:

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{b}{2a} = -1 \\ -5 - \frac{b^2}{4a} = -8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} b = 2a \\ -5 - \frac{b^2}{4a} = -8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} b = 2a \\ \frac{(2a)^2}{4a} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} b = 2a \\ \frac{4a^2}{4a} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} b = 6 \\ a = 3 \end{array}\right\}$$

54. **Obtén el vértice de cada una de las siguientes parábolas teniendo en cuenta que en él la tangente a la curva es horizontal. Indica si se trata de un máximo o un mínimo.**

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

d) $f(x) = -x^2 + 4x$

e) $f(x) = 3x^2 + x + 9$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{2}$

Si la tangente a la curva es horizontal en el vértice, significa que la primera derivada (pendiente de la tangente en ese punto) es igual a cero.

a) $f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

$f''(x) = 6 \rightarrow f''(1) = 6 > 0 \rightarrow x = 1$ mínimo

b) $f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

$f''(x) = -4 \rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right) = -4 < 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ máximo

c) $f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f''(x) = 2 \rightarrow f''(-1) = 2 > 0 \rightarrow x = -1$ mínimo

d) $f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) = -2 \rightarrow f''(2) = -2 < 0 \rightarrow x = 2$ máximo

e) $f'(x) = 0 \rightarrow 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{6}$

$f''(x) = 6 \rightarrow f''\left(\frac{-1}{6}\right) = 6 > 0 \rightarrow x = \frac{-1}{6}$ mínimo

f) $f'(x) = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$f''(x) = 1 \rightarrow f''(-2) = 1 > 0 \rightarrow x = -2$ mínimo

55. Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tenga un mínimo en (1, 5).

Al sustituir en la función, se tiene que $5 = 1^3 + a1 + b = 1 + a + b \rightarrow 4 = a + b$, y puesto que se tiene mínimo en (1, 5), se sigue que $f'(x) = 3x^2 + a \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 0 = 3 + a \rightarrow a = -3$, y se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=4 \\ a=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} b=7 \\ a=-3 \end{array}\right.$$

56. Calcula el valor de a, b y c en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (−1, 9) y en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -2$ tiene tangente horizontal.

Es imposible que en $x = 0$ la derivada de esa función tenga tangente horizontal, ya que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$ y $f'(0) = 1$, con lo que se concluye que no existe una función con esas características.

57. Determina los valores de a, b y c para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto (2, 6) y tenga un mínimo en (1, 2).

Pasa por (2, 6) $\rightarrow 6 = a(2)^3 + b(2) + c \rightarrow 6 = 8a + 2b + c$

Pasa por (1, 2) $\rightarrow 2 = a(1)^3 + b(1) + c \rightarrow 2 = a + b + c$

Como además en (1, 2) tiene un mínimo, se obliga a que:

$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(1) = 3a + b = 0$

Con lo que se tienen tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} 8a+2b+c=6 \\ a+b+c=2 \\ 3a+b=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8a+2b+c=6 \\ a+b+c=2 \\ b=-3a \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8a-6a+c=6 \\ a-3a+c=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+c=6 \\ -2a+c=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-3 \rightarrow f(x)=x^3-3x+4 \\ c=4 \end{array}\right.$$

Se comprueba que $x = 1$ es un mínimo, ya que $f''(x) = 6x \rightarrow f''(1) = 6 > 0$.

58. Calcula a, b y c para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga dos puntos de corte con el eje de las X en $x = -4$ y $x = -3$, y dos puntos de tangente horizontal en $x = -4$ y $x = \frac{-10}{3}$. Indica si estos dos últimos puntos son máximos o mínimos.

Como su gráfica pasa por (– 4, 0) y (– 3, 0), se obtienen las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0=a(-4)^3+b(-4)^2+c(-4)+d \rightarrow 0=-64a+16b-4c+d \\ 0=a(-3)^3+b(-3)^2+c(-3)+d \rightarrow 0=-27a+9b-3c+d \end{array}\right.$$

Además, se sabe que su derivada se anula en los puntos $x = -4$ y $x = -\frac{10}{3}$, con lo que se obtienen las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0=3a(-4)^2+2b(-4)+c \rightarrow 0=48a-8b+c \\ 0=3a\left(-\frac{10}{3}\right)^2+2b\left(-\frac{10}{3}\right)+c \rightarrow 0=100a-20b+3c \end{array}\right.$$

Se obtienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: $\left\{\begin{array}{r} -64a+16b-4c+d=0 \\ -27a+9b-3c+d=0 \\ 48a-8b+c=0 \\ 100a-20b+3c=0 \end{array}\right.$

El sistema es compatible indeterminado, por tanto, no existe una única solución. Dejando d como variable libre:

$c = \frac{5d}{6}, b = \frac{11d}{48}, a = \frac{d}{48}$

59. Estudia el crecimiento, el decrecimiento y los máximos y los mínimos de esta función.

$$f(x)=\sqrt{2x^3-\frac{13}{2}x^2-5x}$$

$$\text{Dom } f=\left\{x\in\mathbb{R}:2x^3-\frac{13}{2}x^2-5x>0\right\}=\left[\frac{13-\sqrt{329}}{8},0\right]\cup\left[\frac{13+\sqrt{329}}{8},+\infty\right)$$

$$f'(x)=\frac{6x^2-13x-5}{2\sqrt{x^3-\frac{13}{2}x^2-5x}}\to f'(x)=0\text{ cuando }6x^2-13x-5=0\to x=-\frac{1}{3}\text{ y }x=\frac{5}{2}.$$

De los dos posibles candidatos a punto crítico se descarta $x=\frac{5}{2}$ por no encontrarse en el dominio de la función.

Se calcula la segunda derivada para comprobar si $x=-\frac{1}{3}$ es un máximo o un mínimo:

$$f''(x)=\frac{12x^4-52x^3-60x^2-25}{\sqrt{2}(x(4x^2-13x-10))^{3/2}}\to f''\left(-\frac{1}{3}\right)=-51\sqrt{\frac{3}{94}}<0\to x=-\frac{1}{3}\text{ máximo}$$

La función crece en el intervalo $\left(\frac{13-\sqrt{329}}{8},-\frac{1}{3}\right)$, y decrece en el intervalo $\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

60. Calcula los valores de a, b y c para que la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ tenga un máximo en un punto donde corta al eje X y un mínimo en su punto de corte con el eje Y, y cumple que $a+b=-1$.

Los puntos de corte son el $(0, b)$ y el $(x_0, 0)$, donde x_0 será una raíz del polinomio x^3+ax^2+b.

En estos puntos, la derivada se anula; en el caso de $(0, b)$ es un mínimo, con lo que la segunda derivada en él es positiva; en el caso $(x_0, 0)$ es un máximo, con lo que la segunda derivada en él es negativa:

$$\begin{cases}f'(x)=3x^2+2ax\\ f''(x)=6x+2a\end{cases}\to\begin{cases}f'(0)=3\cdot0^2+2a\cdot0=0\\ f''(0)=6\cdot0+2a=2a>0\\ f'(x_0)=3x_0^2+2ax_0=0\\ f''(x_0)=6x_0+2a<0\end{cases}\to\begin{cases}x_0=0\\ x_0=-\frac{2}{3}a\end{cases}$$

Se rechaza $x_0=0$ porque, en ese caso, $f''(x_0)=6x_0+2a=2a<0$, que sería contradictorio con $f''(0)=2a>0$.

Por tanto, $\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+b=0\to-8\frac{a^3}{27}+12\frac{a^3}{27}+b=0\to\frac{4a^3}{27}+b=0$.

Por último, como se cumple la ecuación $a+b=-1$, se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{4a^3}{27}+b=0\\ a+b=1\end{array}\right\}\to4a^3-27a+27=0\to\begin{cases}a=-3\text{ y }b=4\to\text{Se rechaza por ser }2a>0.\\ a=\frac{3}{2}\text{ y }b=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

Con lo que la función buscada será:

$$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

61. Indica cuáles deben ser los valores de a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cumpla lo siguiente.

- Tenga un máximo en el vértice de la parábola $g(x)=x^2+12x+202$.
- Tenga un mínimo en el vértice de la parábola $h(x)=-2x^2+8x-98$.

El máximo tendrá como coordenadas $x=-\frac{b}{2a}=-6$ y $g(-6)=238$ y el mínimo $x=-\frac{b}{2a}=2$ y $h(2)=-90$.

Por tanto:

$$\begin{cases} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f''(x)=6ax+2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(-6)=108a-12b+c=0 \\ f''(-6)=-36a+2b<0 \\ f'(2)=12a+4b+c=0 \\ f''(2)=12a+2b>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 108a-12b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$$

Por otro lado, también se tiene que: $\begin{cases} -216a+36b-6c+d=238 \\ 8a+4b+2c+d=-90 \end{cases}$

Por tanto, se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, y al resolverlo se obtienen los valores de los parámetros.

$$\left.\begin{array}{r} 108a-12b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ -216a+36b-6c+d=238 \\ 8a+4b+2c+d=-90 \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{41}{32}, b=\frac{123}{16}, c=-\frac{369}{8}, d=\frac{-155}{4}$$

Por tanto, la función buscada será: $f(x)=32x^3+\frac{123}{16}x^2-\frac{369}{8}x-\frac{155}{4}$

62. Determina los puntos de las gráficas de estas funciones cuya tangente es horizontal.

a) $f(x) = 3x^2 - 15x + 13$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

La tangente es horizontal si la pendiente es igual a cero.

a) $f'(x) = 6x - 15$

$6x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

$6x^2 + 6x - 36 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

c) $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$

$6x^2 + 6x + 6 = 0 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

La ecuación no tiene solución, por lo que no hay puntos que tengan tangente horizontal.

d) $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $f'(x) = \dfrac{x - 2 - (x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$

$\dfrac{-4}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow -4 = 0$

La ecuación no tiene solución, y no hay puntos que tengan tangente horizontal.

63. ¿En qué puntos de las gráficas de estas funciones es horizontal la tangente? Decide si son máximos o mínimos.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$f''(2) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ tiene un mínimo.

$f''(0) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un máximo.

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2}$

$\dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{8}{(2-x)^3}$

$f''(0) = 1 > 0 \rightarrow$ En $x = -1$ tiene un mínimo.

$f''(4) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = 1$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 9)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$f''(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 9) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{18}{x^3}$

$f''(-3) = -\dfrac{2}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

$f''(3) = \dfrac{2}{3} > 0 \rightarrow$ En $x = 3$ tiene un mínimo.

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2 + 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2}$

$\dfrac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \rightarrow x^4 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{(4x^3 + 24x)(x^2 + 4)^2 - (x^4 + 12x^2) \cdot 2(x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^4} = \dfrac{96x - 8x^3}{(x^2 + 4)^3}$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

64. Indica toda la información que sea posible sobre el punto $x = a$ de la función $f(x)$ en cada caso.

a) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) \text{ es negativa} \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f(a) = 3 \\ f(x) \leq 3 \text{ siempre} \end{cases}$

d) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f'(x) > 0 \text{ para } x < a \\ f'(x) < 0 \text{ para } x > a \end{cases}$

a) $x = a$ es un máximo.

b) $x = a$ es un punto crítico, pero no se sabe si es máximo o mínimo.

c) $x = a$ es un punto crítico y como $f(x) \leq 3$ siempre y $f(a) = 3$ es un máximo.

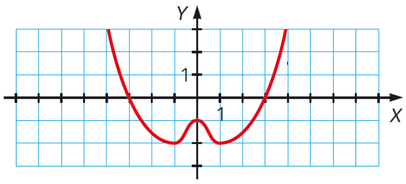
d) $x = a$ es un mínimo.

e) No se puede decidir si hay máximo o mínimo en $x = a$.

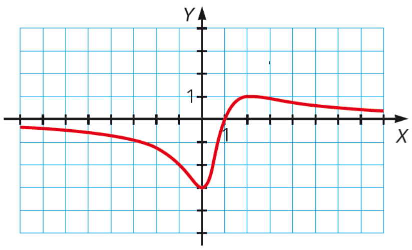
f) $x = a$ es un máximo, porque $f'(a) = 0$, crece en $x < a$ y decrece en $x > a$.

65. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, así como sus valores, de las siguientes funciones.

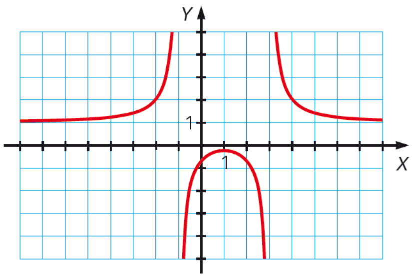
a)



b)



c)



a) Decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Tiene máximo en $x = 0$, cuyo valor es -1.

Tiene dos mínimos, en $x = -1$ y $x = 1$, ambos con valor -2.

b) Decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

Tiene un mínimo en $x = 0$, cuyo valor es -3, y un máximo en $x = 2$, cuyo valor es 1.

c) Crece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y decrece en $(1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Tiene un máximo en $x = 1$, cuyo valor es, aproximadamente, $-0{,}25$.

66. **Calcula los valores que se indican para la función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ y deduce toda la información que se pueda a partir de ellos.**

a) $f'(-1)$, $f'(-1{,}5)$, $f'(-0{,}5)$, $f(-1)$ b) $f'(0{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f'(0{,}25)$, $f(1)$ c) $f(2)$, $f'(2)$, $f'(1{,}5)$, $f'(2{,}5)$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

a) $f'(-1) = -4 - 6 + 6 + 4 = 0$

$f'(-1{,}5) = -\frac{27}{2} - \frac{27}{2} + 9 + 4 = 13 - 27 = -14$

$f'(-0{,}5) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 3 + 4 = 7 - 2 = 5$

$f(-1) = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$

La gráfica corta con el eje X en $x = -1$. Es un punto crítico, porque el valor de la derivada es 0.

A la izquierda la función decrece porque el valor de la derivada es negativo, y a la derecha crece porque es positivo.

Por tanto, (–1, 0) tiene un mínimo.

b) $f'(0{,}5) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 3 + 4 = 0$

$f(0{,}5) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 + 4 = \frac{81}{16}$

$f'(0{,}25) = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{65}{16} - \frac{30}{16} = \frac{35}{16}$

$f(1) = 1 - 2 - 3 + 4 + 4 = 9 - 5 = 4$

Hay un punto crítico en $x = 0{,}5$ porque el valor de la derivada es 0. A la izquierda la función crece, porque el valor de la derivada es positivo, y a la derecha decrece, porque $\frac{81}{16} > 4$.

Por tanto, en $\left(0{,}5; \frac{81}{16}\right)$ tiene un mínimo.

c) $f(2) = 16 - 16 - 12 + 8 + 4 = 0$

$f'(2) = 32 - 24 - 12 + 4 = 0$

$f'(1{,}5) = \frac{27}{2} - \frac{27}{2} - 9 + 4 = -5$

$f'(2{,}5) = \frac{125}{2} - \frac{75}{2} - \frac{30}{2} + \frac{8}{2} = \frac{133 - 105}{2} = \frac{28}{2} = 14$

La gráfica corta con el eje X en $x = 2$. Es un punto crítico, porque el valor de la derivada es 0.

A la izquierda la función decrece, porque el valor de la derivada es negativo, y a la derecha crece, porque es positivo.

Por tanto, en (2, 0) tiene un mínimo.

67. Halla los máximos y los mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 3)^2$ b) $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x - 1)^2$ c) $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1)^2$

a) $f'(x) = 4(x-1)(x+1)(x+3) \to f'(x) = 0 \to x = 1, x = -1$ y $x = -3$

$$f''(x) = 4(3x^2 + 6x - 1) \to \begin{cases} f''(-1) = -16 < 0 \to x = -1 \text{ máximo} \\ f''(1) = 32 > 0 \to x = 1 \text{ mínimo} \\ f''(-3) = 32 > 0 \to x = -3 \text{ mínimo} \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2(x-1)(x-2)(2x-3) \to f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 1, x = 2$ y $x = \frac{3}{2}$

$$f''(x) = 2(6x^2 - 18x + 13) \to \begin{cases} f''(1) = 2 > 0 \to x = 1 \text{ mínimo} \\ f''\left(\frac{3}{2}\right) = -1 < 0 \to x = \frac{3}{2} \text{ máximo} \\ f''(2) = 2 > 0 \to x = 2 \text{ mínimo} \end{cases}$$

c) $f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1) \to f'(x) = 0 \to x = 1, x = -2$ y $x = -\frac{1}{2}$

$$f''(x) = 6(2x^2 + 2x - 1) \to \begin{cases} f''(-2) = 18 > 0 \to x = -2 \text{ mínimo} \\ f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -9 < 0 \to x = -\frac{1}{2} \text{ máximo} \\ f''(1) = 18 > 0 \to x = 1 \text{ mínimo} \end{cases}$$

68. Descompón el número 20 en dos sumandos tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.

$$\begin{cases} 20 = x + y \\ x^2 + y^2 = f(x, y) \end{cases} \to \begin{cases} 20 - x = y \\ x^2 + (20 - x)^2 = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f(x) = 2x^2 - 40x + 400 \\ f'(x) = 4x - 40 = 0 \to x = 10 \\ f''(x) = 4 > 0 \text{ siempre} \end{cases}$$

Como la segunda derivada es positiva siempre, se tiene que en $x = 10$ hay un mínimo.

$y = 20 - x \to y = 10 \to$ La descomposición pedida es $20 = 10 + 10$.

69. Encuentra el número positivo que hace mínima la suma de él mismo y el cuádruple de su inverso.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + \frac{4}{x} = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \to x = 2 \\ f''(x) = \frac{8}{x^3} \to f''(2) = 1 > 0 \to \text{En } x = 2 \text{ hay un mínimo.} \end{cases}$$

Se descarta $x = -2$ porque el número buscado tiene que ser positivo.

70. De todos los triángulos rectángulos en los que los catetos suman 10, ¿cuál tiene mayor área?

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \frac{xy}{2} = f(x, y) \end{cases} \to \begin{cases} 10 - x = y \\ \frac{x(10 - x)}{2} = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f'(x) = 0 \to 5 - x = 0 \to x = 5 \\ f''(x) = -1 < 0 \text{ siempre} \to \text{En } x = 5 \text{ hay un máximo.} \end{cases}$$

$y = 10 - x \to y = 5 \to$ El triángulo con mayor área es el que tiene por catetos $x = 5$ e $y = 5$.

71. De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10, encuentra el de mayor área.

$$\begin{cases} 10 = x^2 + y^2 \\ \dfrac{xy}{2} = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10 - x^2 = y^2 \\ \dfrac{x(10-x^2)}{2} = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \rightarrow 10 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{10}{3}} \\ f''(x) = -6x \end{cases}$$

$f''\left(\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right) = -6 \cdot \sqrt{\dfrac{10}{3}} < 0 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ es un máximo.

$y^2 = 10 - x^2 \rightarrow y^2 = 10 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{3} \rightarrow y = \sqrt{\dfrac{20}{3}} \rightarrow$ El triángulo con mayor área tiene por catetos $x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ e $y = \sqrt{\dfrac{20}{3}}$.

72. Al construir el marco de una valla publicitaria rectangular de 12 metros cuadrados, el metro lineal de tramo horizontal cuesta 1,50 €, mientras que el metro lineal de tramo vertical cuesta 2 €.

a) Determina las dimensiones de la valla para que el coste sea mínimo.

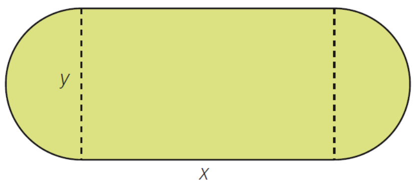
b) ¿Cuánto cuesta el marco?

a) $$\begin{cases} xy = 12 \\ \dfrac{3}{2}x + 2y = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ \dfrac{3x}{2} + \dfrac{24}{x} = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{3x^2 - 48}{2x^2} = 0 \rightarrow x = 4 \\ f''(x) = \dfrac{48}{x^3} \rightarrow f''(4) = \dfrac{48}{64} > 0 \end{cases}$$

En $x = 4$ hay un mínimo. $y = \dfrac{12}{x} \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Las dimensiones de la valla son 4 m de largo y 3 m de ancho.

b) El coste del marco será $1{,}5 + 2 \cdot 3 = 12$ €.

73. Se dispone de 200 m de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos, como indica la figura.



Determina las dimensiones de *x* e *y* para que el área encerrada sea máxima.

El perímetro del recinto viene dado por la fórmula $\pi y + 2x = 200$, y el área por $\dfrac{\pi y^2}{4} + xy$, que es lo que se quiere maximizar, por tanto:

$$\begin{cases} \pi y + 2x = 200 \\ \dfrac{\pi y^2}{4} + xy = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 100 - \dfrac{\pi y}{2} \\ \dfrac{\pi y^2}{4} + y\left(100 - \dfrac{\pi y}{2}\right) = f(y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(y) = 100 - \dfrac{\pi y}{2} = 0 \rightarrow y = \dfrac{200}{\pi} \\ f''(y) = \dfrac{-\pi}{2} < 0 \text{ siempre} \end{cases} \rightarrow y = \dfrac{200}{\pi}, x = 0$$

74. Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm² en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm.

Calcula las dimensiones de la hoja para que el consumo de papel sea mínimo.

$$\begin{cases} (x-2)(y-4) = 18 \\ xy = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10 + 4x}{x - 2} \\ x\left(\dfrac{10 + 4x}{x - 2}\right) = f(x) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{4\left(x^2 - 4x - 5\right)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Se descarta.} \\ x = 5 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{72}{(x-2)^3} \rightarrow f''(5) = \frac{8}{3} > 0 \rightarrow x = 5 \text{ es un mínimo.}$$

$y = \dfrac{10+4x}{x-2} \rightarrow y = 10 \rightarrow$ Las dimensiones de la hoja son $x = 5$, $y = 10$.

75. Se desea encerrar la máxima área dentro de una valla rectangular de 500 m de perímetro.

a) ¿Cuáles son las longitudes de ese rectángulo?

b) ¿Cuáles serían las dimensiones del rectángulo si uno de sus lados limita con un río y no es preciso cerrarlo con la valla?

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 500 \\ xy = f(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 250 - x \\ x(250 - x) = f(x) \end{cases}$

$f'(x) = 250 - 2x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 125$

$f''(x) = -2 < 0$ siempre $\rightarrow x = 125$ es un máximo.

$y = 250 - x \rightarrow y = 125 \rightarrow$ Las dimensiones del rectángulo 125×125 m, con lo que se obtiene un cuadrado.

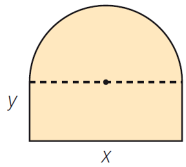
b) $\begin{cases} 2x + y = 500 \\ xy = f(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 500 - 2x \\ x(500 - 2x) = f(x) \end{cases}$

$f'(x) = 500 - 4x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 125$

$f''(x) = -4 < 0$ siempre $\rightarrow x = 125$ es máximo.

$y = 250 - 2x \rightarrow y = 250 \rightarrow$ Las dimensiones del rectángulo buscado son 125×250 m.

76. El perímetro de la figura es 5 m. Calcula las medidas *x* e *y* para que el área encerrada sea máxima.



El perímetro de la figura es $2y + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x = 5$ y su área es $xy + \dfrac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \dfrac{\pi x^2}{8}$. Por tanto, se tiene que resolver el siguiente problema de maximización:

$$\begin{cases} 2y + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x = 5 \\ xy + \frac{\pi x^2}{8} = f(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ f(x) = \frac{5x}{2} - \left(\frac{4+\pi}{8}\right)x^2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2} - 2x\left(\frac{4+\pi}{8}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{10}{4+\pi}$$

$$f''(x) = -2\left(\frac{4+\pi}{8}\right) < 0 \text{ siempre}$$

Por tanto, para $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ e $y = \dfrac{5}{4+\pi}$ se tiene que el área es máxima.

77. Halla los puntos de la curva $y^2 = 2x$ cuya distancia al punto (6, 0) es mínima.

La distancia del punto (6, 0) a un punto arbitrario de la curva $\left(x, \pm\sqrt{2x}\right)$ viene dado por la fórmula

$d=\sqrt{(x-6)^2+(\pm\sqrt{2x})^2}$, donde d representa el módulo del vector que tiene por extremos ambos puntos.

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-10x+36} \\ f'(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+36}} \\ f''(x)=\dfrac{11}{\sqrt{(x^2-10x+36)^3}} \end{cases} \to \begin{cases} f'(x)=0 \to \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+36}}=0 \to x=5 \\ f''(x)=\dfrac{11}{\sqrt{(x^2-10x+36)^3}}>0 \text{ para } x=5 \to x=5 \text{ es un mínimo.} \end{cases}$$

Los puntos pedidos son los de coordenadas $x=5, y=\pm\sqrt{10}$.

78. Encuentra, entre todas las rectas que pasan por el punto (2, 3), la que determina el triángulo de área mínima limitado por ella y la parte positiva de los ejes *X* e *Y*.

La recta, al pasar por el punto (2, 3) tendrá ecuación $y=mx+(3-2m)$, donde m es la pendiente. Eso quiere decir que el triángulo buscado tendrá catetos de distancia los cortes de la recta con los ejes.

Por otro lado, se quiere maximizar el área, que vendrá dada por la fórmula $\dfrac{xy}{2}$, así que se obtiene el siguiente problema de maximización:

$$\begin{cases} y=mx+(3-2m) \\ \dfrac{xy}{2}=f(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{2m-3}{m} \\ y=3-2m \\ f(m)=\dfrac{-4m^2+12m-9}{2m} \end{cases}$$

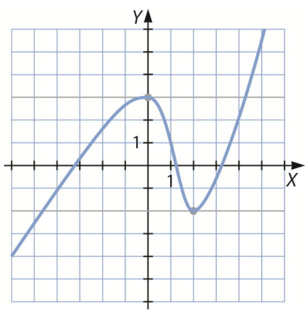
$$\begin{cases} f'(m)=\dfrac{-8m^2+18}{4m^2} \\ \dfrac{-8m^2+18}{4m^2}=0 \to m=\pm\dfrac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} f''(m)=\dfrac{-4m^2+4m-9}{m^3} \\ f''\left(\dfrac{3}{2}\right)<0 \to m=\dfrac{3}{2} \text{ se descarta.} \\ f''\left(\dfrac{-3}{2}\right)>0 \to m=\dfrac{-3}{2} \text{ proporciona un área mínima.} \end{cases}$$

Por lo que la recta buscada será $y=-\dfrac{3}{2}x+6$.

79. Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes condiciones.

- **Su dominio es $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas.**
- **Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en (0, 2).**
- **En los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$ la tangente a la curva es horizontal.**

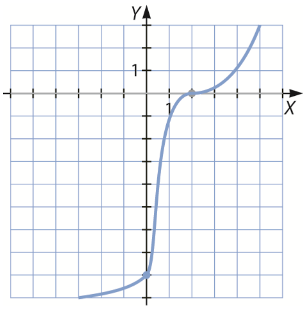
Respuesta abierta. Por ejemplo:



80. **Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.**

- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Siempre crece y no tiene asíntotas.**
- **Corta al eje Y en $(0, -8)$. Además, en el punto $(2, 0)$ tiene tangente horizontal y $f''(2) = 0$.**

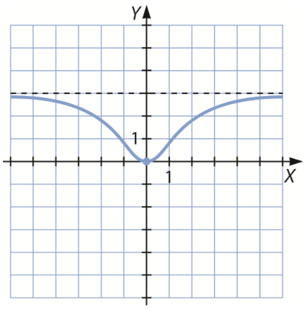
Respuesta abierta. Por ejemplo:



81. **Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.**

- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 3$.**
- **Corta únicamente a los ejes en $(0, 0)$, punto en el que tiene un mínimo.**
- **Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.**

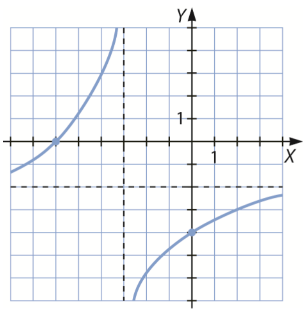
Respuesta abierta. Por ejemplo:



82. **Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.**

- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{-3\}$.**
- **Tiene dos asíntotas, una vertical en $x = -3$ y otra horizontal en $y = -1$.**
- **Siempre crece.**
- **Corta a los ejes en $(-6, 0)$ y $(0, -4)$.**

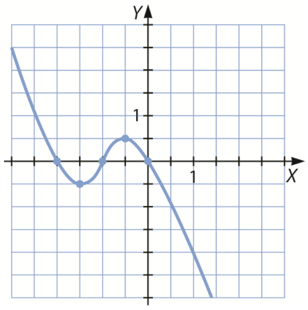
Respuesta abierta. Por ejemplo:



83. **Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes características.**

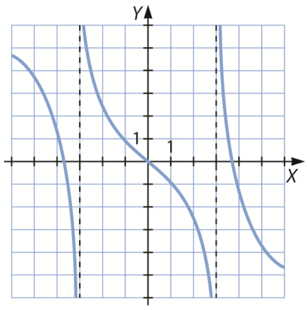
- **Su dominio es $\mathbb{R}$.**
- **Corta a los ejes en $(-1, 0)$, $(-2, 0)$ y $(0, 0)$.**
- **Crece en $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ y decrece en el resto.**
- **$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es un máximo y $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ un mínimo.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



84. **Representa una función con estas características.**

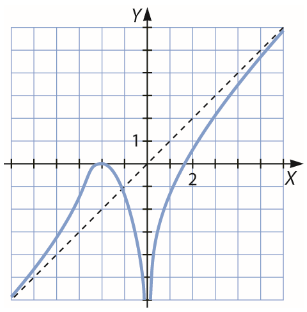
- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.**
- **Tiene asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 3$.**
- **$f'(x) < 0$ en todo el dominio.**



85. **Representa gráficamente una función que tenga las siguientes características.**

- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.**
- **Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.**
- **Tiene una asíntota oblicua en $y = x$.**
- **$f'(x) > 0$ en los intervalos $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-2, 0)$ y $f'(-2) = 0$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



86. Sea la función:

$$f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$$

a) Determina los máximos y mínimos de la función.

b) Calcula $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = 12x^2 + 30x - 18$

$$12x^2 + 30x - 18 = 0 \rightarrow 2x^2 + 5x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

$f''(x) = 24x + 30$

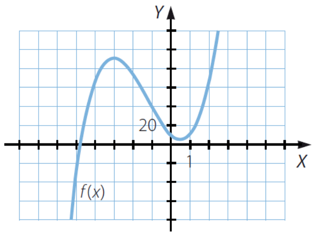
$f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 42 > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo.

$f''(-3) = -42 < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c)



87. Dada la función $f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$, resuelve.

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Halla los máximos y mínimos.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La función no tiene asíntota horizontal.

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

La función no tiene asíntota oblicua.

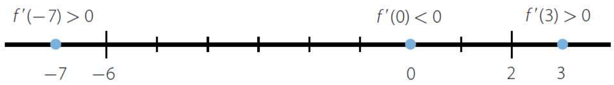
c) Si $x = 0 \rightarrow y = 29$

Si $y = 0 \rightarrow x^3 + 6x^2 - 36x + 29 = 0 \rightarrow (x - 1)(x^2 + 7x - 29) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{165}}{2} \end{cases}$$

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 36$

$3x^2 + 12x - 36 = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$



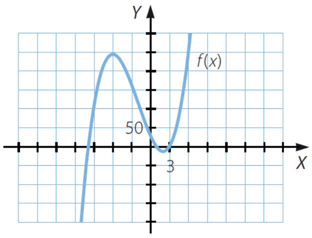
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en $(-6, 2)$.

e) Mínimo: $(2, -11)$

Máximo: $(-6, 245)$

f)



88. **Representa gráficamente las siguientes funciones haciendo un estudio sobre su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.**

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

b) $f(x) = x^3 - x$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2$

e) $f(x) = x^3 - 3x^2$

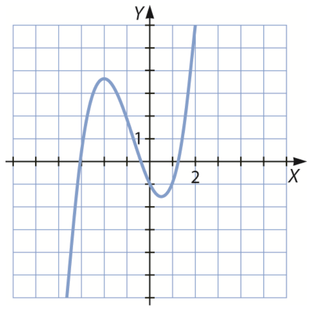
a) $f'(x) = 2x^2 + 3x - 2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$

$f(x)$ crece en $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \frac{1}{2}$ y un máximo en $x = -2$.

$f''(x) = 4x + 3 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ y cóncava en $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.



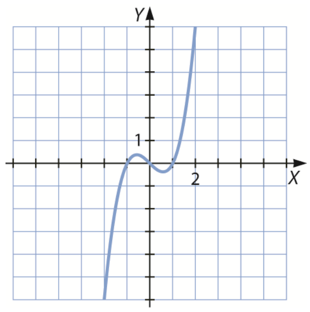
b) $f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(x)$ crece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

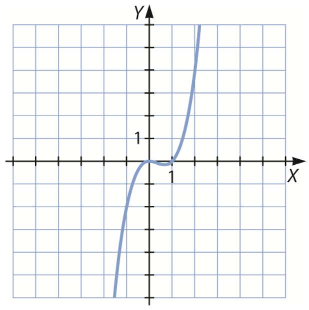
$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y un máximo en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$f''(x) = 6x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.



c) $f'(x)=3x^2-2x \to f'(x)=0 \to x=0 \text{ y } x=\frac{2}{3}$



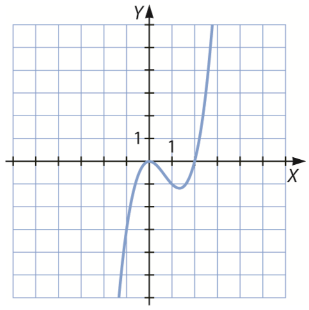
$f(x)$ crece en $(-\infty, 0)\cup\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x=\frac{2}{3}$ y un máximo en $x=0$.

$f''(x)=6x-2 \to f''(x)=0 \to x=\frac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

d) $f'(x)=3x^2-4x \to f'(x)=0 \to x=0 \text{ y } x=\frac{4}{3}$



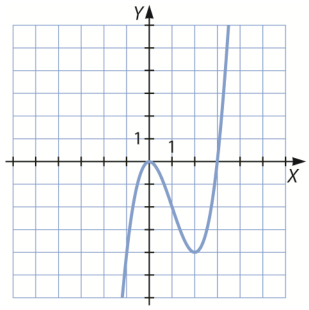
$f(x)$ crece en $(-\infty, 0)\cup\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x=\frac{4}{3}$ y un máximo en $x=0$.

$f''(x)=6x-4 \to f''(x)=0 \to x=\frac{2}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

e) $f'(x)=3x^2-6x \to f'(x)=0 \to x=0 \text{ y } x=2$



$f(x)$ crece en $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x=2$ y un máximo en $x=0$.

$f''(x)=6x-6 \to f''(x)=0 \to x=1$.

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, +\infty)$.

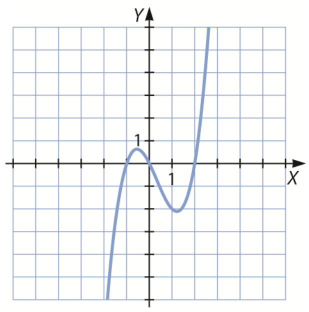
89. Representa gráficamente las funciones haciendo un estudio sobre su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, y concavidad y convexidad.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

a) $f'(x)=3x^2-2x-2 \to f'(x)=0 \to x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$



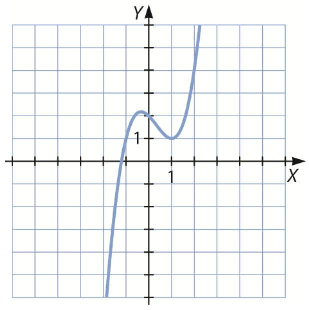
$f(x)$ crece en $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ y un máximo en $x=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

$f''(x)=6x-2 \to f''(x)=0 \to x=\frac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$



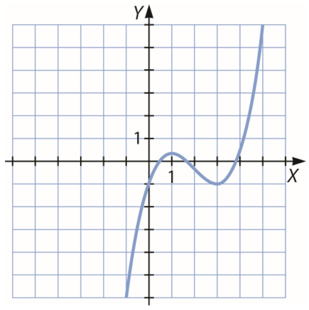
$f(x)$ crece en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 1$ y un máximo en $x = -\frac{1}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

$f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

c) $f'(x) = x^2 - 4x + 3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = 3$



$f(x)$ crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = 3$ y un máximo en $x = 1$.

$f''(x) = 2x - 4 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$.

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$.

90. Estudia y representa las funciones polinómicas.

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 10$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

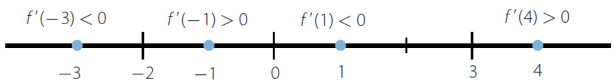
c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x + 212$

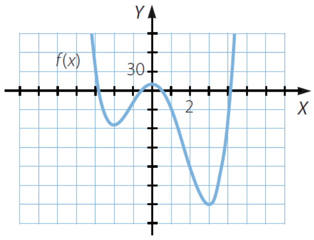
a) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$

$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$





$f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

Mínimos: $(-2, -54)$ y $(3, -179)$

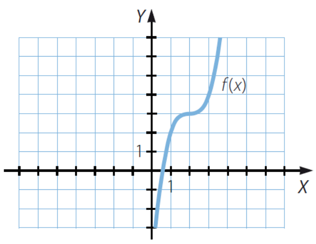
Máximo: $(0, 10)$

b) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$



$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(2) = 0 \rightarrow$ En $x = 2$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(x) = 6x - 12$.

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

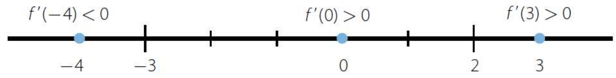
$f''(x) < 0$ si $x < 2 \rightarrow f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$.

c) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 96x + 144$

$12x^3 - 12x^2 - 96x + 144 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$



$f(x)$ es creciente en $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -3)$.

Mínimo: $(-3, -301)$

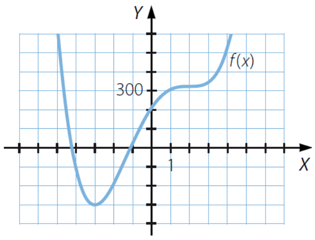
$f''(x) = 36x^2 - 24x - 96$

$36x^2 - 24x - 96 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

$f''(x) < 0$ si $-\dfrac{4}{3} < x < 2 \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\dfrac{4}{3}, 2\right)$.

$f''(x) < 0$ si $x < -\dfrac{4}{3} \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$.



91. **Dada la función $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$, resuelve.**

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Calcula los máximos y los mínimos.

e) Estudia la concavidad y la convexidad.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -4$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = 3 \rightarrow y = 3$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

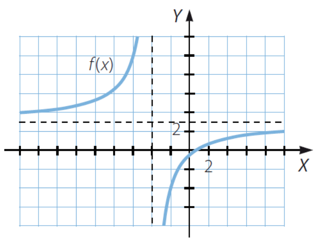
c) $f'(x) = \dfrac{3(x + 4) - (3x - 2)}{(x + 4)^2} = \dfrac{14}{(x + 4)^2}$

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

d) La función no tiene máximos ni mínimos.

e) $f''(x) = -\dfrac{14 \cdot 2(x + 4)}{(x + 4)^4} = -\dfrac{28}{(x + 4)^3} < 0 \rightarrow$ La función es siempre convexa.

f)



92. Halla los máximos y los mínimos de la función.

$$f(x) = \frac{x}{x-4}$$

Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas. Haz también un esbozo de la gráfica de la función.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-4) - x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

No hay máximos ni mínimos, $f'(x) < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

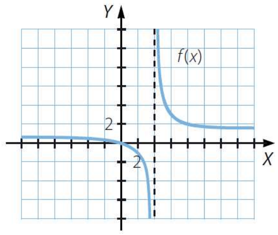
Dom $f = \mathbb{R} - \{4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Si $x = 1\,000 \rightarrow f(x) > 1$
Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1\,000 \rightarrow f(x) < 1$
Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por debajo de la asíntota.



93. Calcula las asíntotas de estas funciones y haz su representación gráfica.

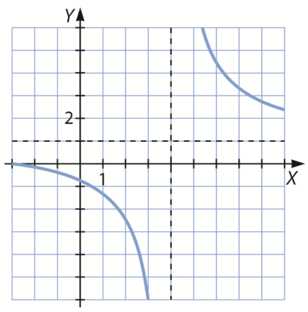
a) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$

b) $f(x) = \frac{6x}{x-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

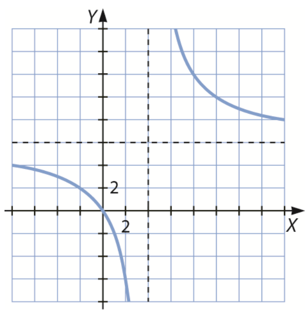
a) Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+3}{x-4} = 1 \rightarrow y = 1$

Asíntota vertical: $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$



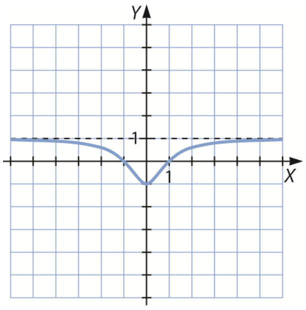
b) Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x}{x-4} = 6 \rightarrow y = 6$

Asíntota vertical: $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$



c) Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \rightarrow y = 1$

Asíntota vertical: $x^2+1>0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No existe.



94. **Sea la función:**

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Encuentra los máximos y los mínimos de la función.

b) Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas.

c) Construye un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2\cdot(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$

$\dfrac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow 3x^2-x^4=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{(6x-4x^3)(1-x^2)^2-(3x^2-x^4)\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \dfrac{6x+2x^3}{(1-x^2)^3}$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \rightarrow$ En $x=-\sqrt{3}$ tiene un mínimo.

$f''(0)=0 \rightarrow$ En $x=0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \rightarrow$ En $x=\sqrt{3}$ tiene un máximo.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow x=-1$ es una asíntota vertical.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow x=1$ es una asíntota vertical.

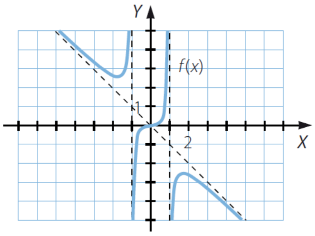
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \rightarrow$ No hay asíntota horizontal.

$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x-x^3} = -1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x-x^3}{1-x^2} = 0 \end{array}\right\}$

Asíntota oblicua: $y=-x$

Si $x = 1\,000 \rightarrow f(x)-(-x)<0 \rightarrow$ Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Si $x=-1\,000 \rightarrow f(x)-(-x)>0 \rightarrow$ Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

c) 

95. **Estudia la posición de la gráfica de estas funciones respecto de sus asíntotas y haz su representación gráfica.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

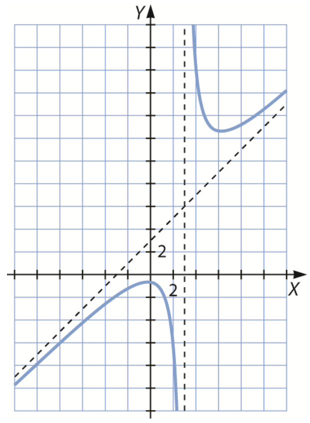
a) Tiene una asíntota vertical en $x = 3$ y no tiene asíntota horizontal.

Tiene una asíntota oblicua en $y = x + 3$.

En $x < 3$: $\dfrac{x^2+2}{x-3} < x+3 \rightarrow$ La gráfica está por debajo de la asíntota.

En $x > 3$: $\dfrac{x^2+2}{x-3} > x+3 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+2}{x-3} = +\infty \end{cases}$$



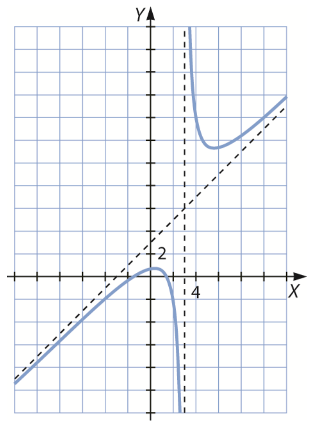
b) Tiene una asíntota vertical en $x = 3$ y no tiene asíntota horizontal.

Tiene una asíntota oblicua en $y = x + 3$.

En $x < 3$: $\dfrac{x^2-2}{x-3} < x+3 \rightarrow$ La gráfica está por debajo de la asíntota.

En $x > 3$: $\dfrac{x^2-2}{x-3} > x+3 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2}{x-3} = +\infty \end{cases}$$

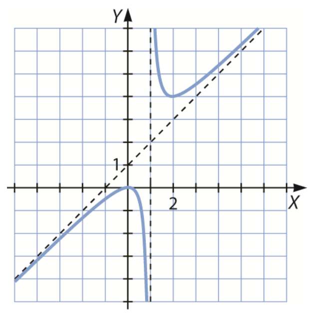


c) Tiene asíntota vertical en $x = 1$ y no tiene asíntota horizontal. Tiene asíntota oblicua en $y = x + 1$.

En $x < 1$: $\dfrac{x^2}{x-1} < x+1 \rightarrow$ La gráfica está por debajo de la asíntota.

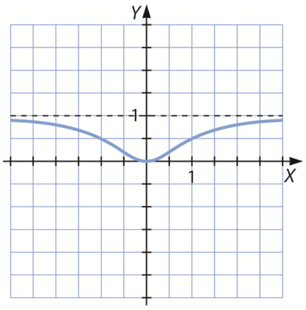
En $x > 1$: $\dfrac{x^2}{x-1} > x+1 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \end{cases}$$



d) Tiene asíntota horizontal en $y = 1$ y no tiene asíntota vertical ni oblicua.

$\forall x \in \mathbb{R} \to \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1 \to$ La gráfica está por debajo de la asíntota.



96. **Estudia y representa estas funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x+1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{5x+1}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{x-2} = 5 \to y = 5 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

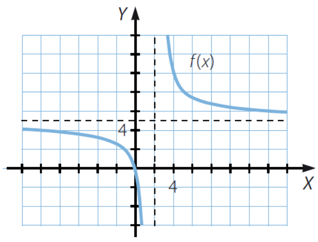
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $\left(-\dfrac{1}{5}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{5(x-2)-(5x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-11}{(x-2)^2}$$

$f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

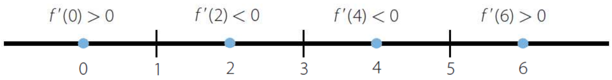
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x - 3} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x + 1$$

Punto de corte con el eje X: $(1, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$

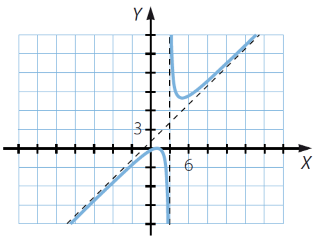
$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 3) - (x^2 - 2x + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3) \cup (3, 5)$.

Máximo: $(1, 0)$ Mínimo: $(5, 8)$



c) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{2 - x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{2 - x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

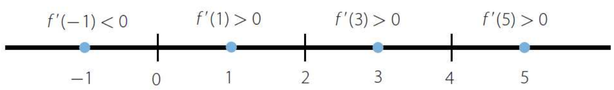
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2 - x} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x - x^2} = -1 \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{2 - x} + x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{2 - x} = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = -x - 2$$

Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$

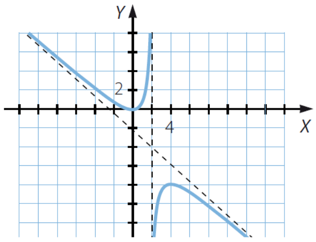
$$f'(x) = \frac{2x(2 - x) + x^2}{(2 - x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2 - x)^2}$$

$$4x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es creciente en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

Máximo: $(4, -8)$ Mínimo: $(0, 0)$



d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = -\infty \end{array}\right\} \to x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 2 - 4}{x^2 + x - 6} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

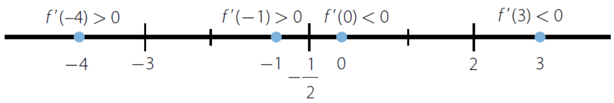
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $(1, 0)$ y $(-2, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$

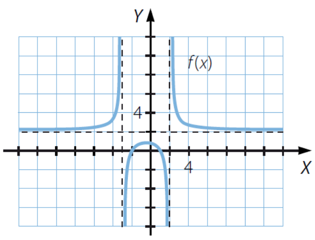
$$f'(x) = \frac{-16x - 8}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$-16x - 8 = 0 \to x = -\frac{1}{2}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup \left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ y es decreciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

Máximo: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{18}{25}\right)$



97. Representa estas funciones racionales, analizando sus características.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 1)}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

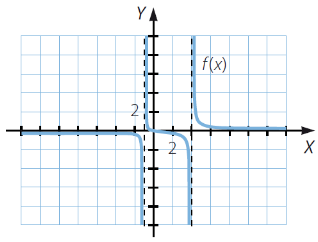
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: (0, 0)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4 - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 3x - 4)^2}$$

$f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje Y: (3, 0)

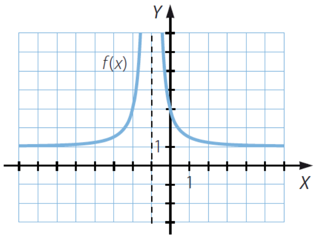
$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$-4x - 4 = 0 \to x = -1 \notin \text{Dom } f$

$f'(x) > 0$ si $x < -1 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$.

$f'(x) < 0$ si $x > -1 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+5}{x^2-3x-4} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

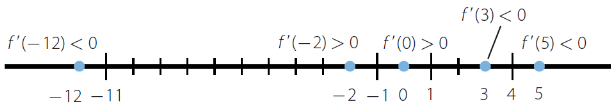
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(-5, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{5}{4}\right)$

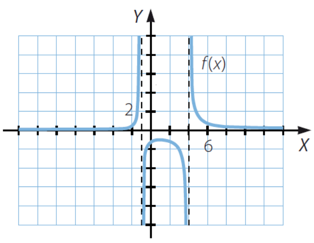
$$f'(x) = \frac{x^2-3x-4-(x+5)(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2}$$

$$\frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2} = 0 \rightarrow -x^2-10x+11 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x = 1 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-11, -1) \cup (-1, 1)$ y es decreciente en $(-\infty, -11) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Mínimo: $\left(-11, -\dfrac{1}{25}\right)$ Máximo: $(1, -1)$



d) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

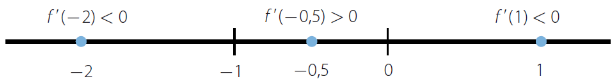
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = 1 \to y = 1$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $\left(-\sqrt{2}-2,\, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}-2,\, 0\right)$

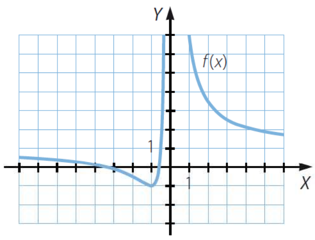
$$f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot x^2 - (x^2+4x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-4x-4}{x^3}$$

$-4x - 4 = 0 \to x = -1$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y es creciente en $(-1, 0)$.

Mínimo: $(-1, 1)$



e) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty\end{array}\right\} \to x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = 0 \to y = 0$ es una asíntota horizontal.

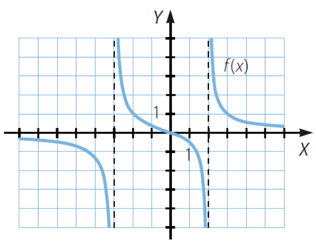
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-6) - 2x(2x+1)}{(x^2+x-6)^2} = \frac{-2x^2-12}{(x^2+x-6)^2}$$

$f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \end{array}\right\} \to x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

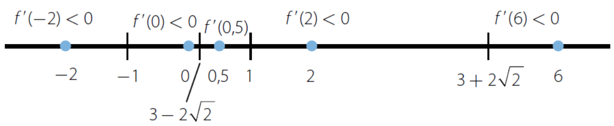
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 3)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - (x-3) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2-1)^2}$$

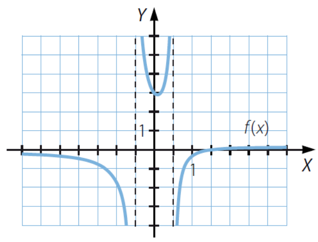
$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2-1)^2} = 0 \to -x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-1, 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}, +\infty\right)$

y es creciente en $\left(3 - 2\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Máximo: $\left(3 + 2\sqrt{2}, \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\right)$ Mínimo: $\left(3 - 2\sqrt{2}, \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right)$



98. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

a) El dominio vendrá dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

No tiene puntos de corte con el eje X, ya que $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \to f(0) = -1 \to$ El punto de corte es $(0, -1)$.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntotas verticales en $x = \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 - 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{2x(x^4 - 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^2} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ en } \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \\ f'(x) < 0 \text{ en } \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (0, 1) \cup \left(1, +\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

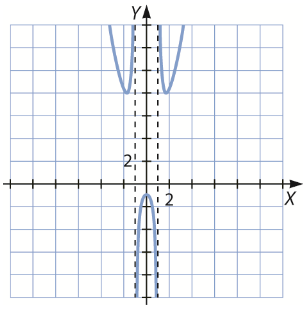
La función decrece en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (0, 1) \cup \left(1, +\sqrt{3}\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Se calcula la segunda derivada $f''(x) = \dfrac{2(x^6 - 3x^4 + 15x^2 + 3)}{(x^2+1)^3}$ y se evalúa en los puntos críticos:

$f''\left(-\sqrt{3}\right) = 12 > 0 \to x = -\sqrt{3}$ mínimo

$f''(0) = -6 \to x = 0$ máximo

$f''\left(\sqrt{3}\right) = 12 > 0 \to x = \sqrt{3}$ mínimo



b) El dominio vendrá dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Punto de corte con el eje *X:*

$f(x) = 0 \to x = 2 \to$ El punto de corte es (2, 0).

Punto de corte con el eje *Y*:

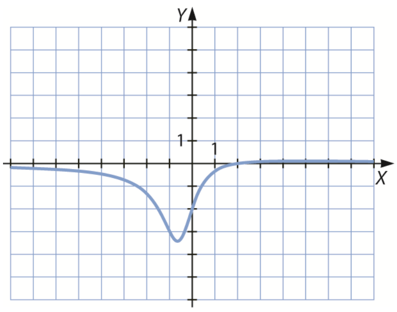
$x = 0 \to f(0) = -2 \to$ El punto de corte es (0, –2).

No tiene asíntotas verticales.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 3}{(x^2 + x + 1)^2} \to \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } x \in \left(-\infty, 2-\sqrt{7}\right) \cup \left(2+\sqrt{7}, +\infty\right) \to f(x) \text{ crece.} \\ f'(x) > 0 \text{ en } x \in \left(2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}\right) \to f(x) \text{ decrece.} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 6x^2 + 9x - 1)}{(x^2 + x + 1)^3} \to \begin{cases} f''(2-\sqrt{7}) > 0 \to x = 2-\sqrt{7} \text{ es mínimo.} \\ f''(2+\sqrt{7}) < 0 \to x = 2+\sqrt{7} \text{ es máximo.} \end{cases}$$



c) El dominio, vendrá dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Punto de corte con el eje *X*:

$f(x) = 0 \to x = 1 \to$ El punto de corte es (1, 0).

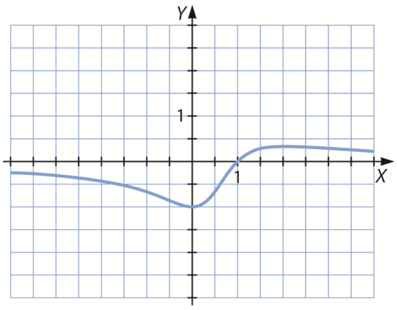
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = -1 \to$ El punto de corte es (0, –1).

Tiene asíntota horizontal en *y* = 0.

$$f'(x) = -\frac{x(x-2)}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} \to \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \to f(x) \text{ crece.} \\ f'(x) > 0 \text{ en } x \in (0, 2) \to f(x) \text{ decrece.} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 1)}{\left(x^2 - x + 1\right)^3} \to \begin{cases} f''(0) = 2 > 0 \to x = 0 \text{ mínimo} \\ f''(2) = \dfrac{-2}{9} < 0 \to x = 2 \text{ máximo} \end{cases}$$



d) El dominio, dado por todos los números que no anulen el denominador. Por tanto, $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*, ya que $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \to f(0) = 1 \to$ El punto de corte es (0, 1).

Tiene asíntota vertical en *x* = –1.

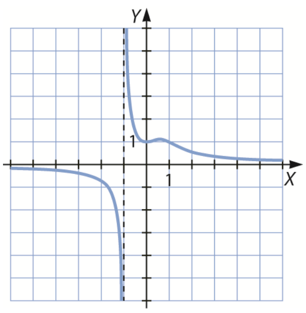
Tiene asíntota horizontal en *y* = 0.

$$f'(x) = -\frac{x(x^3 + 3x^2 - 2)}{\left(x^3 + 1\right)^2} \to \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0{,}596; +\infty) \to f(x) \text{ crece} \\ f'(x) > 0 \text{ en } x \in (0; 0{,}596) \to f(x) \text{ decrece} \end{cases}$$

Puesto que $f'(x) = -\dfrac{x(x^3 + 3x - 2)}{\left(x^3 + 1\right)^2}$ se anula en *x* = 0 y en *x* = 0,596. Calculamos la segunda derivada:

$f''(x) = \dfrac{2(x^6 + 6x^4 - 7x^3 - 3x + 1)}{\left(x^2 + 1\right)^3}$, que si es evaluada en los puntos críticos, se obtiene:

$$\begin{cases} f''(0{,}596) = -1{,}650 < 0 \to x = 0{,}596 \text{ máximo} \\ f''(0) = 2 > 0 \to x = 0 \text{ mínimo} \end{cases}$$



99. Relaciona cada una de las siguientes características con la función que las posea.

- **Su máximo es (0, −1).**
- **Tiene dos asíntotas verticales.**
- **La tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.**
- **Su máximo es (1, 4).**
- **Es creciente siempre.**

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{10} \qquad i(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

$$g(x) = x^4 - 2x^2 - 1 \qquad j(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$h(x) = -x^3 + 3x + 2 \qquad k(x) = -x^2 - 2x - 1$$

- Su máximo es (0, −1) y la tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.

  Son características de $g(x) = x^4 - 2x^2 - 1$:

  $$g'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1 \text{ y } x = 0$$

  La derivada en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ es 0, con lo que la tangente será horizontal en esos puntos.

  $$g''(x) = 12x^2 - 4 \rightarrow g'(0) = -4 < 0 \rightarrow x = 0 \text{ máximo} \qquad g(0) = -1 \rightarrow (0, -1) \text{ máximo}$$

- Tiene dos asíntotas verticales.

  Es característica de $j(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$.

  Las asíntotas horizontales se tienen cuando el denominador se anula. En este caso en se tienen dos asíntotas: en $x = -2$ y en $x = 2$.

- Su máximo es (1, 4) y la tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.

  Son características de $h(x) = -x^3 + 3x + 2$

  $$\begin{cases} h'(x) = -3x^2 + 3 \rightarrow h'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ h''(x) = -6 \rightarrow h''(1) = -6 < 0 \rightarrow x = 1 \text{ máximo} \\ h(1) = 4 \rightarrow (1, 4) \text{ máximo} \end{cases}$$

- Es creciente siempre.

  Es característica de $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{10}$.

  $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{10} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ siempre crece.

$i(x)$ y $k(x)$ no cumple ninguna de las características.

100. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + e^{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$

c) $f(x) = 3 \cdot e^{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{3 - e^x}{2}$

a) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje X.

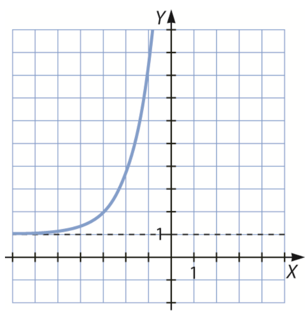
Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 + e^3 \rightarrow$ El punto de corte es $(0, 1 + e^3)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 1 + e^{x+3} \rightarrow f'(x) = e^{x+3} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es siempre creciente.



b) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

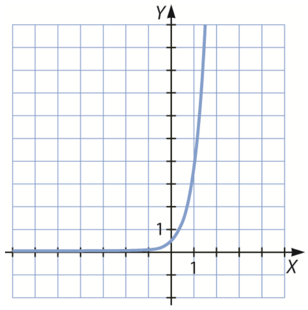
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$ El punto de corte es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = \frac{e^{2x}}{2} \rightarrow f'(x) = e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ $f(x)$ es siempre creciente.



c) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

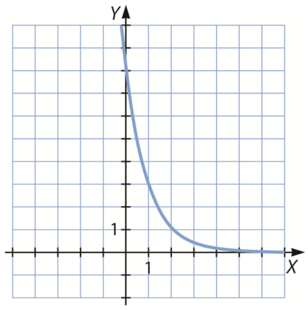
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 3e \rightarrow$ El punto de corte es (0, 3*e*).

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 3e^{1-x} \rightarrow f'(x) = -3e^{1-x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ $f(x)$ es siempre decreciente.



d) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

Punto de corte con el eje *X*:

$0 = \frac{3 - e^x}{2} \rightarrow 3 = e^x \rightarrow x = \ln 3 \rightarrow$ El punto de corte es (ln 3, 0).

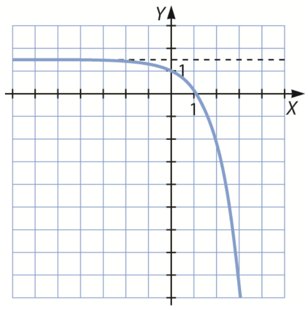
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{3 - e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 1).

Tiene asíntota horizontal en $y = \frac{3}{2}$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = \frac{3 - e^x}{2} \rightarrow f'(x) = \frac{-e^x}{2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ $f(x)$ es siempre decreciente.



101. **Estudia y representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \frac{2}{5} \cdot 2^{x+2}$

b) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

c) $f(x) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$

a) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

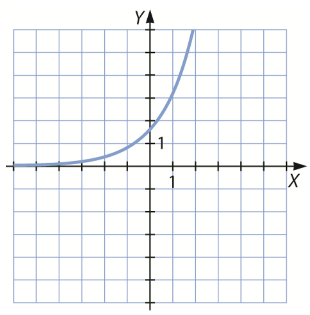
Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{2}{5} \cdot 2^2 = \frac{8}{5} \rightarrow$ El punto de corte es $\left(0, \frac{8}{5}\right)$.

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = \frac{2}{5} 2^{x+2} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{5} 2^{x+2} \ln 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ $f(x)$ es siempre creciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

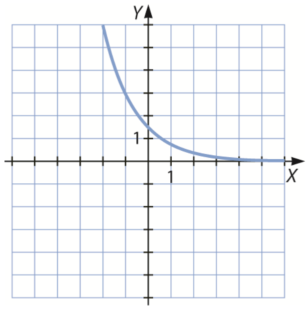


b) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \rightarrow$ El punto de corte es $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.



Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

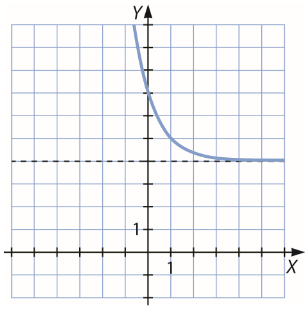
$f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \rightarrow f'(x) = -2^{-x-1}\ln 8 < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ *f*(*x*) es siempre decreciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

c) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 7 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 7).



Tiene asíntota horizontal en $y = 4$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

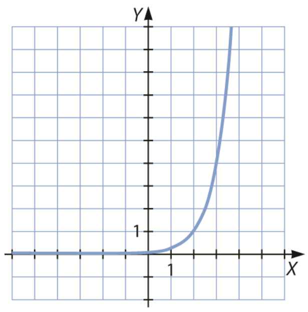
$f(x) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \rightarrow f'(x) = -3^{1-x}\ln 3 < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ *f*(*x*) es siempre decreciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

d) El dominio de las funciones exponenciales coincide con el dominio de su exponente. Como su exponente es un polinomio, $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

No tiene puntos de corte con el eje *X*.

Punto de corte con el eje *Y*:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{4^x}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow$ El punto de corte es $\left(0, \frac{1}{16}\right)$.



Tiene asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

No tiene asíntotas verticales.

$f(x) = 4^{x-2} \rightarrow f'(x) = \frac{\ln 4}{16}4^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ *f*(*x*) es siempre creciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

102. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \log_3 (2x)$

b) $f(x) = \log_2 (x + 1)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $f(x) = \log_5 (x - 1)$

e) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

a) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$2x > 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow \text{Dom} f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

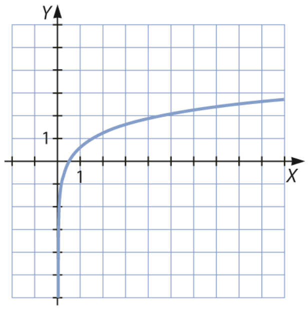
$0 = \log_3 2x \rightarrow 2x = 3^0 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow$ El punto de corte es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

No tiene puntos de corte con el eje Y.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$.

$f(x) = \log_3 2x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} > 0 \ \forall x > 0 \rightarrow$ $f(x)$ es siempre creciente.



b) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$x + 1 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow \text{Dom} f = (-1, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

$0 = \log_2 (x + 1) \rightarrow x + 1 = 2^0 = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

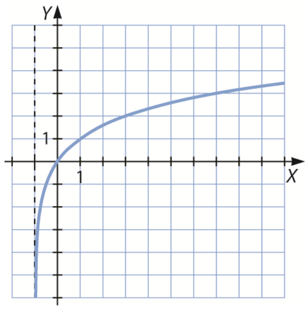
Punto de corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = \log_2 (0 + 1) = \log_2 1 = 0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x = -1$.

$f(x) = \log_2 (x + 1) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x + 1) \ln 2} > 0 \ \forall x > -1 \rightarrow$ $f(x)$ es siempre creciente.



c) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$x > 0 \rightarrow \text{Dom} f = (0, +\infty)$

Puntos de corte con el eje X:

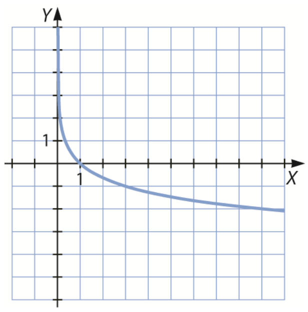
$0 = \log_{\frac{1}{3}} x \rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ El punto de corte es (1, 0).

No tiene puntos de corte con el eje Y.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x = 0$.

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln\left(\frac{1}{3}\right)} < 0 \ \forall x > 0 \rightarrow$ $f(x)$ es siempre decreciente y, como $f'(x)$ no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

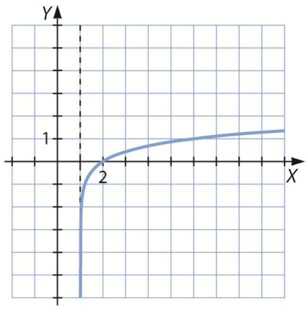


d) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$x-1>0 \rightarrow x>1 \rightarrow \text{Dom}\, f=(1,+\infty)$

Puntos de corte con el eje *X*:

$0=\log_5(x-1) \rightarrow x-1=5^0=1 \rightarrow x=2 \rightarrow$ El punto de corte es (2, 0).



No tiene puntos de corte con el eje *Y*.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x=1$.

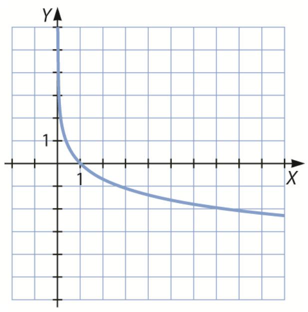
$f(x)=\log_5 x \rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 5}>0\ \ \forall x>0 \rightarrow$ *f*(*x*) es siempre creciente y, como *f*´(*x*) no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

e) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$\dfrac{1}{x}>0 \rightarrow x>0 \rightarrow \text{Dom}\, f=(0,+\infty)$

Puntos de corte con el eje *X*:

$0=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow x=1 \rightarrow$ El punto de corte es (1, 0).



No tiene puntos de corte con el eje *Y*.

No tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota vertical en $x=0$.

$f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x}<0\ \ \forall x>0 \rightarrow$ *f*(*x*) es siempre decreciente y, como *f*´(*x*) no se anula en ningún punto, no tiene máximos ni mínimos.

f) La función logarítmica está definida cuando su argumento es mayor que 0.

$\dfrac{1}{x^2+1}>0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom}\ f=\mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*:

$0=\ln\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) \rightarrow \dfrac{1}{x^2+1}=e^0=1 \rightarrow x=0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

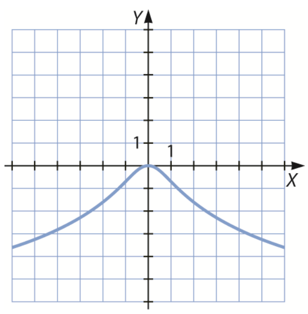
Puntos de corte con el eje *Y*:

$x=0 \rightarrow f(0)=\ln\left(\dfrac{1}{0^2+1}\right)=\ln 1=0 \rightarrow$ El punto de corte es (0, 0).

No tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas verticales.

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \rightarrow \begin{cases} f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}>0 \text{ en } x\in(-\infty,0) \rightarrow f(x) \text{ es creciente.} \\ f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}<0 \text{ en } x\in(0,+\infty) \rightarrow f(x) \text{ es decreciente.} \end{cases}$$



Como en (0, 0) la función crece por la izquierda y decrece por la derecha, es un máximo.

Para $x\neq 0,\ f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}\neq 0 \rightarrow$ No existen más máximos o mínimos.

103. Se ha estimado que el gasto de electricidad de una empresa, de 8 a 17 horas, sigue esta función

$$E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$$

donde t pertenece al intervalo (8, 17).

a) ¿Cuál es el consumo eléctrico a las 10 horas? ¿Y a las 16 horas?
b) ¿En qué momento del día es máximo el consumo? ¿Y mínimo?
c) Determina las horas del día en las que el consumo se incrementa.

a) $E(10) = 4{,}5$
$E(16) = 3{,}6$

b) $E'(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05$
$0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 15 \end{cases}$
$E''(t) = 0{,}06t - 0{,}72$
$E''(9) = -0{,}18 < 0 \rightarrow$ En $t = 9$ tiene un máximo.
$E''(15) = 0{,}18 > 0 \rightarrow$ En $t = 15$ tiene un mínimo.
Por tanto, el consumo es máximo a las 9 horas y es mínimo a las 15 horas.

c) Como $t = 9$ es un máximo, el consumo crece de las 8 horas a las 9 horas.
Del mismo modo, como $t = 15$ es un mínimo, el consumo crece de las 15 horas a las 17 horas.

104. Los beneficios de dos empresas, A y B, vienen determinados por las funciones f_A y f_B, donde x se mide en años.

$$f_A(x) = \frac{75x}{x^2 + 100} \qquad f_B(x) = \frac{100x + 4}{x^2 + 150}$$

Realiza el estudio de las cuestiones que se plantean a continuación.

a) ¿Durante cuánto tiempo obtienen ganancias?
b) ¿Cuáles son sus máximos beneficios y cuándo se producen?
c) ¿Cuál de las dos empieza antes a notar un descenso en los beneficios?
d) ¿En algún momento tienen pérdidas?

a) Se obtendrán ganancias siempre que los beneficios sean superiores a 0:

$$\frac{75x}{x^2+100} > 0 \ \ \forall x > 0 \qquad \frac{100x+4}{x^2+150} > 0 \ \ \forall x > 0$$

Es decir, siempre van a tener beneficios.

b) $f_A'(x) = -\dfrac{75(x^2-100)}{(x^2+100)^2} = 0 \rightarrow x = 10$ $\qquad f_B'(x) = \dfrac{-4(25x^2+2x-3750)}{(x^2+150)^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{25}\left(1+\sqrt{93\,751}\right)$

Para comprobar si es máximo analizamos la segunda derivada.

$$f_A''(x) = \frac{150x(x^2-300)}{(x^2+100)^3} \rightarrow f_A''(10) = -\frac{3}{80} < 0$$

$$f_B''(x) = \frac{8(25x^3+3x^2-11250x-150)}{(x^2+150)^3} \rightarrow f_B''\left(\frac{1}{25}\left(2+\sqrt{93751}\right)\right) \approx -0{,}026 < 0$$

Como en ambas funciones el candidato tiene signo negativo en la segunda derivada, es un máximo.

Los máximos beneficios son:

$$f_A(10) = \frac{15}{4} \qquad f_B\left(\frac{1}{25}\left(2+\sqrt{93\,751}\right)\right) = \frac{1}{75}\left(1+\sqrt{93\,751}\right)$$

c) Dado que $\dfrac{15}{4} < \dfrac{1}{75}\left(1+\sqrt{93\,751}\right)$, la primera empieza a notar antes que la segunda el descenso de los beneficios.

d) En ningún momento tienen pérdidas ya que las funciones son mayores que 0 siempre.

105. **Un banco ofrece a sus clientes un plan en el que su capital se incrementaría según la función $f(x) = 0{,}0001x^4 - 0{,}04x^2$, donde x se mide en miles de euros. Realiza un estudio para determinar a partir de qué cantidad es rentable esta operación, si el banco les pone un límite de 50 000 € de inversión.**

$$f(x)=\left(\frac{x}{10}\right)^4-\frac{x^2}{25}=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=20\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f(x)<0 \text{ en } (0,20)\\f(x)>0 \text{ en } (20,50)\end{cases}$$

Se calcula la primera derivada, para ver en qué intervalos $f(x)$ crece y en cuáles decrece.

$$f'(x)=\frac{4x^3}{10^4}-\frac{2x}{25}=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\sqrt{200}=14{,}14213\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}f'(x)<0\rightarrow 0<x<14{,}14213\\f'(x)>0\rightarrow 14{,}14213<x<50\end{matrix}$$

$$f''(x)=\frac{12x^2}{10\,000}-\frac{2}{25}\rightarrow f''(14{,}14213)>0\rightarrow x=14{,}14213 \text{ es mínimo}$$

A partir de 20 000 € es, rentable ya que la función es positiva y creciente.

106. **La temperatura, en grados centígrados, a lo largo de una fría noche de invierno en una localidad varió de acuerdo a la función $f(t)=\dfrac{t^2-5t-6}{2}$, donde $t \in [0, 8]$ es el tiempo medido en horas.**

a) ¿Qué temperatura había a la una de la mañana? ¿Y a las cinco?
b) ¿A qué hora había 0 °C? ¿Y −3 °C?
c) ¿En qué intervalo de tiempo la temperatura descendía? ¿Y en cuál ascendía?
d) ¿En qué período de tiempo la temperatura fue negativa? ¿Y en cuál fue positiva?
e) ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿Y la mínima?
f) Realiza una gráfica que ilustre la variación de temperatura en esas ocho horas.

a) $f(1)=\dfrac{1-5-6}{2}=-\dfrac{10}{2}=-5\,°\text{C}$

$f(5)=\dfrac{25-25-6}{2}=-\dfrac{6}{2}=-3\,°\text{C}$

b) $0=\dfrac{t^2-5t-6}{2}\rightarrow t^2-5t-6=0\rightarrow t=6$

$-3=\dfrac{t^2-5t-6}{2}\rightarrow t^2-5t-6=-6\rightarrow t^2-5t=0\rightarrow\begin{cases}t=0\\t=5\end{cases}$

c) $f'(t)=\dfrac{2t-5}{2}=0\rightarrow t=\dfrac{5}{2}=2\text{ h }30\text{ min}$

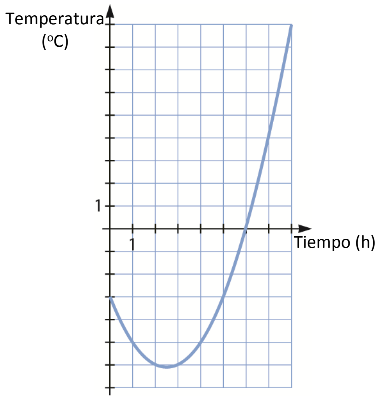
Asciende en $t\in\left(\dfrac{5}{2},8\right]$ y desciende en $t\in\left[0,\dfrac{5}{2}\right)$.

d) Como $f(t)=0$ cuando $t=6$, la temperatura es negativa en $t\in[0,6)$ y positiva en $t\in(6,8]$.

e) La temperatura máxima se alcanza en uno de los extremos, en $f(8)=9$.

La temperatura mínima se alcanzará en $t=\dfrac{5}{2}$, y será $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{49}{8}\,°\text{C}$.

f)



107. **Una empresa que sacó al mercado un nuevo dispositivo tecnológico, determinó que la cantidad de unidades vendidas en los primeros 60 días se ajustaba a la expresión $f(d) = 100 + 15d - \frac{d^2}{4}$, donde *d* es el tiempo medido en días. Calcula lo siguiente.**

a) ¿En qué intervalo de tiempo las ventas aumentaron? ¿En cuál disminuyeron?

b) ¿Cuántos dispositivos vendió el primer día que salieron a la venta?

c) ¿Qué otro día vendió las mismas unidades que el primero?

d) ¿Qué día vendió más unidades? ¿Cuántas?

e) ¿Qué días se vendieron 300 unidades?

a) $f'(d) = 15 - \frac{d}{2} = 0 \to d = 30 \to \begin{cases} f'(d) > 0 \to d < 30 \\ f'(d) < 0 \to d > 30 \end{cases}$

El intervalo de ventas aumenta durante los primeros 30 días, y disminuye en los siguientes 30.

b) $f(1) = 100 + 15 - \frac{1}{4} = 115{,}25 \approx 116$ dispositivos vendidos el primer día.

c) $15d - \frac{d^2}{4} = 15{,}25 \to d = 1$ y $d = 59$ el primer y el quincuagésimo noveno día.

d) El día 30 es un candidato a máximo, porque la derivada se anula en ese punto.

$f''(d) = -\frac{1}{2} < 0 \to$ $d = 30$ es el día que más unidades se vendieron. En total fueron:

$f(30) = 100 + 450 - \frac{225}{4} = 493{,}75 \approx 494$ dispositivos.

e) $300 = 100 + 15d - \frac{d^2}{4} \to d = 20$ y $d = 40$.

108. **El número de visitantes que acuden a una exposición fotográfica durante las dos semanas de duración de la misma ha variado según la función**

$$N(t) = -t^3 + 24t^2 - 11t + 570 \quad \text{si } 1 \le t \le 14$$

donde t representa el día.

a) ¿Cuántos visitantes hubo el día de la inauguración?
b) ¿Y el día de la clausura?
c) ¿Qué día tuvo lugar la asistencia máxima de visitantes? ¿Y la asistencia mínima de visitantes?
d) ¿Cuáles fueron los valores máximo y mínimo del número de visitantes?

a) $N(1) = 582$ visitantes el día de la inauguración.

b) $N(14) = 2\,376$ visitantes el día de la clausura.

c) $N'(t) = -3t^2 + 48t - 11 > 0$ para $1 \le t \le 14$, por lo que su máximo y su mínimo se encontrarán en los extremos del intervalo.

El mínimo se tendrá en $N(1)$ y el máximo en $N(14)$.

d) De nuevo, los valores máximo y mínimo vendrán dados por $N(14)$ y $N(1)$.

109. **Los gastos de mantenimiento de la maquinaria de una determinada empresa en miles de euros, $G(x)$, vienen dados en función del tiempo, x, medido en meses, que dicha maquinaria lleva en funcionamiento. La expresión de $G(x)$ es:**

$$G(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{15} + 3 & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{6x - 60}{x + 15} & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
b) ¿Qué sucede a medida que va transcurriendo el tiempo?
c) ¿Alcanza la función algún máximo o mínimo?
d) Realiza un estudio para determinar a partir de qué cantidad es rentable la inversión.

a) $G'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{15} & \text{si } 0 < x < 15 \\ \dfrac{150}{(x+15)^2} & \text{si } x > 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} G'(x) < 0 & \text{en } x \in (0, 15) \\ G'(x) > 0 & \text{en } x > 15 \end{cases}$

$G(x)$ decrece en los 15 primeros meses y crece a partir de ahí.

b) Empieza decreciendo el gasto durante los primeros 15 meses y a partir de ahí comienza a crecer.

c) Como la derivada no se anula, se alcanza un máximo en el extremo $x = 0$, porque es decreciente, y un mínimo en $x = 15$, porque decrece a la izquierda y crece a la derecha.

d) La inversión será rentable durante los 15 primeros meses, porque el gasto decrece, y siempre que el gasto sea menor que en el momento inicial, es decir, $G(x) = 3$. Esto ocurre cuando:

$$3 = \frac{6x - 60}{x + 15} \rightarrow 3x + 45 = 6x - 60 \rightarrow 3x = 105 \rightarrow x = 35$$

Por lo que se concluye que la inversión será rentable durante los primeros 35 meses, puesto que el gasto de mantenimiento no excede el inicial, como para necesitar comprar una maquinaria nueva.

110. Determina cuál de las dos funciones crece más rápidamente en el punto $x = 1$ y encuentra la representación gráfica que mejor lo muestre.

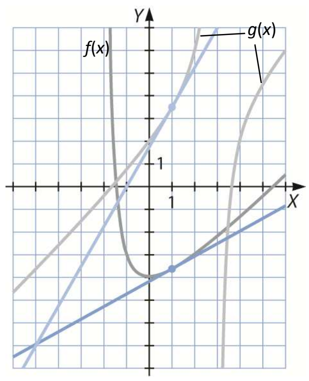
$$f(x) = x - 4 - \frac{2x}{x+2}$$

$$g(x) = x + 2 - \frac{x}{x-3}$$

$$\begin{cases} f(x) = x - 4 - \dfrac{2x}{x+2} \\ g(x) = x + 2 - \dfrac{x}{x-3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+2)^2} \\ g'(x) = 1 + \dfrac{3}{(x-3)^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1) = 1 - \dfrac{2}{(1+2)^2} = \dfrac{5}{9} \\ g'(1) = 1 + \dfrac{3}{(1-3)^2} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \rightarrow f'(1) < g'(1)$$

Y como la derivada en ese punto representa la pendiente de la función en dicho punto, al ser mayor esa pendiente, se concluye que $g(x)$ crece más rápidamente en $x = 1$.

La mejor manera de mostrarlo gráficamente es dibujando las rectas tangentes de las dos funciones en $x = 1$.



111. Un investigador está probando la acción de un medicamento sobre una bacteria. Ha comprobado que el número de bacterias, *N*, varía con el tiempo, *t*, una vez que se ha suministrado el medicamento, según la siguiente función.

$$N(t) = 20\,t^3 - 510\,t^2 + 3600\,t + 2000$$

a) ¿Cuántas bacterias había en el momento de suministrar el medicamento? ¿Y al cabo de 10 horas?

b) En ese momento, ¿el número de bacterias está creciendo o disminuyendo?

c) ¿Cuál es el momento en que la acción del producto es máxima?

d) ¿En qué momento empieza a notarse el efecto del medicamento?

e) ¿Y en qué momento empieza a perder su efecto el medicamento?

a) Si $t = 0 \rightarrow N = 2\,000$ bacterias

Si $t = 10 \rightarrow N = 7\,000$ bacterias

b) $N' = 60t^2 - 1\,020t + 3\,600$

$$60t^2 - 1\,020t + 3\,600 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$$

El número de bacterias crece hasta las 5 horas y vuelve a crecer a partir de las 12 horas. Este número decrece entre las 5 horas y las 12 horas.

c) El medicamento alcanza su máxima acción a las 12 horas.

d) El efecto del medicamento empieza a notarse a partir de las 5 horas.

e) El medicamento empieza a perder su efecto a partir de las 12 horas.

PARA PROFUNDIZAR

112. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

El valor mínimo de $f(x) = (x - 5)^3 \cdot (x - 1)$ es:	-27	-8	$-\frac{75}{8}$	-3	0
Si m y n son enteros, con $1 \le m < n$, ¿cuántas soluciones positivas tiene la ecuación $x^n - x^m - 1 = 0$?	Ninguna	n	Una	$n - m$	Cualquier número de soluciones
De todos los cuadriláteros inscritos en una circunferencia que verifican que sus lados, de longitudes 6 y 8 cm, forman un ángulo recto, ¿cuál es, en cm², el área del que tiene área máxima?	48	48,5	49	50	52
¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar $f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}$?	$\sqrt{7} - 1$	3	$2\sqrt{3}$	4	$\sqrt{55} - \sqrt{5}$

- $f'(x) = 2(x + 5)^2(1 + 2x)$ se anula en $x = -5$ y $x = \frac{-1}{2}$.

  $f'(x) = 4(x - 2)(x - 5)^2 \rightarrow f'(x) = 0$ en $x = 2$ y $x = 5$

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ toma su valor mínimo en un mínimo.

  $f'(x) = 4(x - 2)(x - 5)^2 \rightarrow f'(x) = 0$ en $x = 2$ y $x = 5$

  Lo posibles mínimos están en $x = 2$ y $x = 5$. Calculamos el valor de la función en estos puntos, y el menor será el mínimo:

  $f(2) = -27$, $f(5) = 0 \rightarrow$ Por tanto, el valor mínimo de $f(x)$ es -27.

- Si se deriva $f(x) = x^n - x^m - 1$, se obtiene $f'(x) = nx^{n-1} - mx^{m-1}$. Igualamos la derivada a 0:

  $x^{m-1}(nx^{n-m} - m) = 0$. Dicha ecuación se cumple cuando $x = 0$ y cuando $x^{n-m} = \frac{m}{n} \rightarrow x = \sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}$.

  $f'(x) < 0$ en $\left(0, \sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}\right)$, es decir, es decreciente en ese intervalo y como $f(0) = -1$, en dicho intervalo no tiene solución la ecuación.

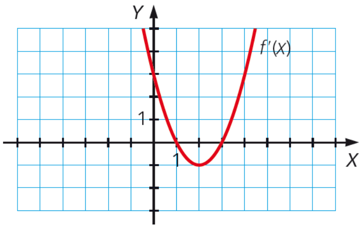
  $f(x) = x^n - x^m - 1$ es continua y, como $f(2) > 0$ y $f\left(\sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}\right) < 0$, por el teorema de Bolzano, la función tiene una solución en el intervalo $\left(\sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}, 2\right)$ y, por ser $f'(x) > 0$ en $\left(\sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}, \infty\right)$, es decir, es creciente en ese intervalo, por el teorema del valor medio, la solución es única.

- El cuadrilátero de mayor área es el formado por el triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cm, cuya área es 24 cm². Y el triángulo de mayor área con base 10 cm es el isósceles de altura 5 cm. Por tanto, el cuadrilátero buscado tiene área 49 cm².

- No es ninguna de las soluciones, porque en $x = 8$, $f(8) = 0$ y se anulan ambas raíces.

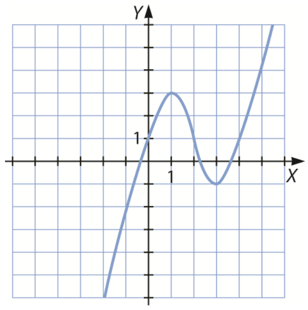
  Se puede reescribir $f(x) = \sqrt{x(8 - x)} - \sqrt{(8 - x)(x - 6)}$, donde se ve bien cómo se factorizan los polinomios de dentro de las raíces, y para qué valores se anulan.

113. Si la gráfica de una función $f'(x)$ es la siguiente, representa de forma aproximada la función $f(x)$.

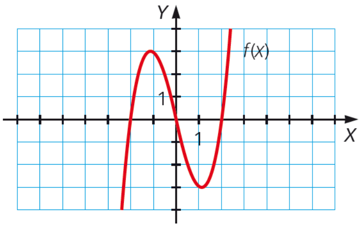


- $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$, y es decreciente en $(1, 3)$, por lo que tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$.
- $f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$, por lo que tiene un punto de inflexión en $x = 2$.
- $f(x)$ tiene una simetría impar respecto del punto $(2, f(2))$.

Una posible representación de $f(x)$ sería:

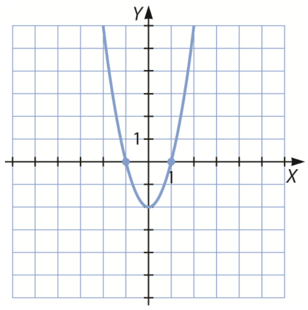


114. Dada la gráfica de la función $f(x)$, representa la función $f'(x)$ de forma aproximada.



- $f'(x)$ es positiva en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y negativa en $(-1, 1)$, por lo que se anular en $x = -1$ y en $x = 1$.
- $f'(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$, por lo que tiene un mínimo en $x = 0$.
- $f'(x)$ es par.

Una posible representación de $f'(x)$ sería:



115. Calcula la altura y el volumen del cilindro regular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio 3 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras se calcula el radio de las bases, que coincide con la mitad de la altura del cilindro:

$$2x^2 = 3^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

El área de las bases viene dado por $A_B = \pi\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{2}$. Por tanto, el volumen será:

$$V = A_B H = \frac{9\pi}{2}\cdot 3\sqrt{2} = \frac{27\pi\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}^3$$

116. Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de euros, cuando han transcurrido t años, siguen la función $f(t) = \dfrac{2t - 4}{t + 2}$.

a) Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas.
b) ¿Es decreciente la función que expresa la ganancia?
c) ¿Existe límite para las ganancias? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

$$\left.\begin{array}{l} f'(t) = \dfrac{8}{(t+2)^2} > 0 \rightarrow f(t) \text{ es creciente siempre} \\ f(0) = -2 \text{ y } f(t) = 0 \rightarrow t = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Entre } t = 0 \text{ y } t = 2\ f(t) < 0.$$

a) A partir de $t = 2$ la empresa deja de tener pérdidas.

b) La función es creciente siempre.

c) Sí, el límite coincide con la asíntota horizontal $y = 2$.

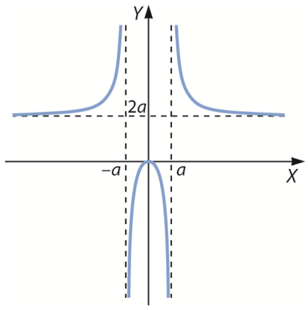
117. Dibuja la gráfica de la función que aparece a continuación.

$$f(x) = \frac{2ax^2}{x^2 - a^2} \text{ con } a \in (0, +\infty)$$

La función tiene dos asíntotas verticales, $x = -a$ y $x = a$.

$$\lim_{x \to -a^-} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to -a^+} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2}\right) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} \left(\frac{2ax^2}{x^2 - a^2}\right) = +\infty$$



Además, tiene una asíntota horizontal, $y = 2a$. La gráfica está por encima de la asíntota horizontal:

$$f'(x) = \frac{-4a^3x}{x^2 - a^2} \rightarrow f'(x) = 0 \text{ para } x = 0$$

Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ crece. Si $x > 0$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decrece.

118. Sea la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Determina los valores de a, b y c para que la representación gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ cumpla lo siguiente.

- **Tiene una inflexión.**
- **Su tangente es la recta $x - 4y + 1 = 0$.**

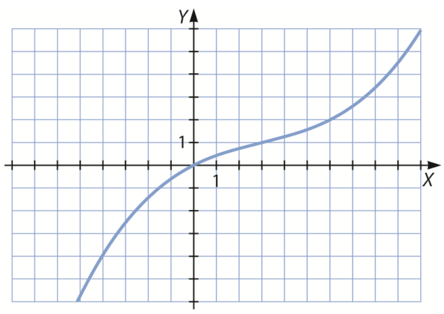
Cuando hayas encontrado los valores de a, b y c, dibuja la gráfica de la función resultante.

(Olimpiadas de Bachillerato. Fase Nacional)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \rightarrow f(3) = 1 \rightarrow 27a + 9b + 3c = 1 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(3) = 1 \rightarrow 27a + 9b + c = \dfrac{1}{4} \\ f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow f''(3) = 0 \rightarrow 18a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{108}, b = -\frac{1}{12}, c = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{1}{108}x^3 - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{2}x$.



119. Se sabe que la función real $f(t)$ es monótona creciente en el intervalo $-8 < t < 8$.
Se considera la función:

$$g(x) = f(2x - x^2)$$

¿En qué intervalo de valores de x se puede asegurar que $g(x)$ es monótona creciente?

(Olimpiadas de Bachillerato. Fase Nacional)

Para que $g(x)$ sea monótona creciente, $g'(x)$ debe ser mayor que 0. Calculamos la derivada de $g(x)$:

$g'(x) = f'(2x - x^2) \cdot (2 - 2x)$

$g'(x)$ es un producto de dos factores. Para que sea positiva, los dos factores deben tener el mismo signo:

$2 - 2x > 0$ para $x < 1$ $\qquad$ $2 - 2x < 0$ para $x > 1$

Sabemos que $f'(t) > 0$ para los $-8 < t < 8$. Por tanto:

$-8 < 2x - x^2 < 8 \to -2 < x < 4 \to$ Para $x \in (-2, 4)$ $f'(2x - x^2) > 0$.

Por tanto:

Para $x \in (-2, 1) \to \left\{\begin{matrix} f'(2x - x^2) > 0 \\ 2 - 2x > 0 \end{matrix}\right\} \to g'(x) > 0 \to g(x)$ es monótona creciente.

Para $x \in (1, 4) \to \left\{\begin{matrix} f'(2x - x^2) > 0 \\ 2 - 2x < 0 \end{matrix}\right\} \to g'(x) > 0 \to g(x)$ es monótona decreciente.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Explica con tus palabras el concepto de sobreaceleración o *jerk*.

Función que calcula la variación de la aceleración en un movimiento con respecto al tiempo.

2. Propón algunos ejemplos donde se vea el concepto de sobreaceleración.

Un acelerón grande para adelantar rápidamente; un frenazo ante el riesgo de colisión con el vehículo delantero.

3. Si la función $s(t)$ define la posición de un móvil en cada instante t, la velocidad se define como la derivada de la posición, $v(t) = s'(t)$, y la aceleración, $a(t)$, como la derivada de la velocidad $a(t) = v'(t)$.

¿Cuál es la expresión de la sobreaceleración a partir de la función posición $s(t)$?

$J(t) = s'''(t)$

4. Si la sobreaceleración es cero, ¿qué se puede decir de la aceleración? Valora todas las posibilidades que pueden existir.

$J(t) = 0 \to a'(t) = 0 \to a(t) = \text{constante}$

5. La ecuación que determina la posición instantánea de un móvil es:

$s(t) = -3t^2 - 2t + 62$

a) Calcula la función velocidad $v(t)$.
b) Halla la aceleración instantánea $a(t)$.
c) ¿Cuál es la sobreaceleración que sufre el móvil?

a) $v(t) = s'(t) = -6t - 2$ $\qquad$ b) $a(t) = v'(t) = -6$ $\qquad$ c) $J(t) = 0$