Trigonometría

4

ACTIVIDADES

1. Encuentra la equivalencia en radianes de estos ángulos.

a) 10° b) 135° c) $-60°$

a) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{10} \to x = \frac{20\pi}{360} = \frac{\pi}{18}$ rad

b) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{135} \to x = \frac{270\pi}{360} = \frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{2\pi}{360} = \frac{x}{-60} \to x = \frac{-120\pi}{360} = \frac{-\pi}{3}$ rad

2. Halla la medida en grados de estos ángulos.

a) $\frac{2\pi}{3}$ rad b) 3 rad c) $-\frac{4\pi}{3}$ rad

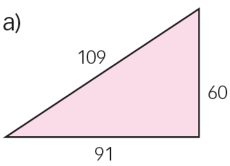
a) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{\frac{2\pi}{3}} \to x = \frac{360 \cdot 2\pi}{6\pi} = 120°$

b) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{3} \to x = \frac{360 \cdot 3}{2\pi} = 171{,}88°$

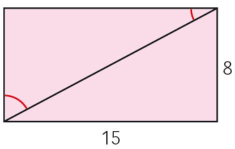
c) $\frac{360}{2\pi} = \frac{x}{-\frac{4\pi}{3}} \to x = \frac{-360 \cdot 4\pi}{6\pi} = -240°$

3. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos agudos.

a)



b)



a) $sen\ \alpha = \frac{60}{109}$ $tg\ \alpha = \frac{60}{91}$ $sec\ \alpha = \frac{109}{91}$

$cos\ \alpha = \frac{91}{109}$ $cosec\ \alpha = \frac{109}{60}$ $cotg\ \alpha = \frac{91}{60}$

$sen\ \beta = \frac{91}{109}$ $tg\ \beta = \frac{91}{60}$ $sec\ \beta = \frac{109}{60}$

$cos\ \beta = \frac{60}{109}$ $cosec\ \beta = \frac{109}{91}$ $cotg\ \beta = \frac{60}{91}$

b) $sen\ \alpha = sen\ \gamma = \frac{8}{17}$ $tg\ \alpha = tg\ \gamma = \frac{8}{15}$ $sec\ \alpha = sec\ \gamma = \frac{17}{15}$

$cos\ \alpha = cos\ \gamma = \frac{15}{17}$ $cosec\ \alpha = cosec\ \gamma = \frac{17}{8}$ $cotg\ \alpha = cotg\ \gamma = \frac{15}{8}$

$sen\ \beta = sen\ \delta = \frac{15}{17}$ $tg\ \beta = tg\ \delta = \frac{15}{8}$ $sec\ \beta = sec\ \delta = \frac{17}{8}$

$cos\ \beta = cos\ \delta = \frac{8}{17}$ $cosec\ \beta = cosec\ \delta = \frac{17}{15}$ $cotg\ \beta = cotg\ \delta = \frac{8}{15}$

4. **Demuestra que se cumplen las siguientes igualdades.**

a) $sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$

b) $cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$

c) $cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

a) $sec\ \alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\frac{c}{a}} = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$

b) $cosec\ \alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\frac{b}{a}} = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$

c) $cotg\ \alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{\frac{b}{c}} = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{1}{\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

5. **Calcula las razones trigonométricas del ángulo α si:**

a) $cos\ \alpha = \dfrac{7}{25}$

b) $tg\ \alpha = 1{,}67$

c) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $tg\ \alpha = 0{,}3$

a) $cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow sen\alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25}$

$tg\ \alpha = \dfrac{24}{7}$ $\quad cosec\ \alpha = \dfrac{25}{24}$ $\quad sec\ \alpha = \dfrac{25}{7}$ $\quad cotg\ \alpha = \dfrac{7}{24}$

b) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+1{,}67^2}} = 0{,}51$

$sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = 1{,}67 \cdot 0{,}51 = 0{,}85$

$cotg\ \alpha = 0{,}60$ $\quad cosec\ \alpha = 1{,}18$ $\quad sec\ \alpha = 1{,}96$

c) $cos\ \alpha = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\ \alpha = 1$ $\quad cosec\ \alpha = \sqrt{2}$

$sec\ \alpha = \sqrt{2}$ $\quad cotg\ \alpha = 1$

d) $cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+0{,}3^2}} = 0{,}96$ $\quad sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = 0{,}3 \cdot 0{,}96 = 0{,}29$

$cosec\ \alpha = 3{,}45$ $\quad sec\ \alpha = 1{,}04$ $\quad cotg\ \alpha = 3{,}33$

6. Razona si existe algún ángulo para el que se verifique:

a) $sen\ \alpha = 0{,}3$ y $cos\ \alpha = 0{,}8$

b) $sen\ \alpha = 0{,}72$ y $tg\ \alpha = 1{,}04$

c) $cos\ \alpha = 0{,}1$ y $sen\ \alpha = 0{,}99$

a) No existe, ya que no cumple las relaciones trigonométricas.
$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$; $0{,}3^2 + 0{,}8^2 = 0{,}73 \neq 1$

b) Sí existe, pues cumple las relaciones trigonométricas.
Calculamos el coseno: $1{,}04 = \dfrac{0{,}72}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}69 \rightarrow 0{,}72^2 + 0{,}69^2 = 1$

c) Sí existe, porque cumple las relaciones trigonométricas.
$0{,}1^2 + 0{,}99^2 = 1$

7. Halla el valor de las siguientes expresiones.

a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45°$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45°$

c) $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30°$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30°$

a) $cos\ 30° - sen\ 60° + tg\ 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $cos^2\ 60° - sen^2\ 45° = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$

c) $tg\ 60° + sen\ 45° - cos^2\ 30° = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{-3 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° - sen\ 30° \cdot cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$

8. Halla con ayuda de la calculadora.

a) $cos\ 79°$

b) $sen\ 43{,}5°$

c) $tg\ 10°\ 28'$

a) $cos\ 79° = 0{,}19$

b) $sen\ 43{,}5° = 0{,}69$

c) $10°\ 28' = 10{,}4\widehat{6}° \rightarrow tg\ 10°\ 8' = 0{,}18$

9. Calcula las razones trigonométricas con la calculadora.

a) $sen\ (0{,}35\ rad)$

b) $cos\ (1\ rad)$

c) $tg\ (1{,}27\ rad)$

a) $sen\ (0{,}35\ rad) = 0{,}34$

b) $cos\ (1\ rad) = 0{,}54$

c) $tg\ (1{,}27\ rad) = 3{,}22$

10. Indica el signo de las razones trigonométricas de los ángulos, identificando el cuadrante donde están.

a) 66°

b) 18°

c) 175°

d) 135°

e) 342°

f) 120°

a) Es del 1.er cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.

b) Es del 1.er cuadrante; todas las razones trigonométricas son positivas.

c) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

d) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

e) Es del 4.º cuadrante; el coseno y la secante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

f) Es del 2.º cuadrante; el seno y la cosecante son positivos, y el resto de las razones trigonométricas son negativas.

11. Ordena de menor a mayor los cosenos de los siguientes ángulos sin calcularlos.

34° 72° 98° 160° 251° 345°

Se ordenan teniendo en cuenta que el coseno es positivo en ángulos del primer y cuarto cuadrante:

$$\cos 160° < \cos 251° < \cos 98° < \cos 72° < \cos 34° < \cos 345°$$

12. Razona la respuesta.

a) ¿Por qué no existe $tg\ 90°$?

b) ¿Ocurre lo mismo con todos los ángulos que son múltiplos de 90°?

a) No existe, porque $\cos 90° = 0$.

b) Si multiplicamos 90° por un número par, la tangente es cero, ya que el seno vale 0 y el coseno vale 1.

Si multiplicamos 90° por un número impar, la tangente no está definida, puesto que el coseno vale 0.

13. Ordena de menor a mayor las tangentes de los siguientes ángulos sin calcularlas.

65° 110° 170° 210° 315°

Las tangentes del primer y tercer cuadrantes son positivas, las del segundo y cuarto cuadrantes son negativas.

$$tg\ 110° < tg\ 315° < tg\ 170° < tg\ 210° < tg\ 65°$$

14. Sabiendo que $\cos 50° = 0,6428$ halla las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 130° b) 230° c) $-50°$ d) 310°

Calculamos el seno de 50°:

$sen^2\ 50° + 0,6428^2 = 1$ $\quad sen\ 50° = 0,766$

a) $-\cos 50° = \cos 130° = -0,6428$; $sen\ 50° = sen\ 130° = 0,766$; $tg\ 130° = -1,1918$
$\sec 130° = -1,5557$; $cosec\ 130° = 1,3054$; $cotg\ 130° = -0,8391$

b) $-\cos 50° = \cos 230° = -0,6428$; $-sen\ 50° = sen\ 230° = -0,766$
$tg\ 230° = 1,1918$; $\sec 230° = -1,5557$; $cosec\ 230° = -1,3054$; $cotg\ 230° = 0,8391$

c) $\cos 50° = \cos(-50°) = 0,6428$; $-sen\ 50° = sen\ (-50°) = -0,766$
$tg\ (-50°) = -1,1918$; $\sec(-50°) = 1,5557$; $cosec\ (-50°) = -1,3054$
$cotg\ (-50°) = -0,8391$

d) $\cos 50° = \cos 310° = 0,6428$; $-sen\ 50° = sen\ 310° = -0,766$
$tg\ 310° = -1,1918$; $\sec 310° = 1,5557$; $cosec\ 310° = -1,3054$
$cotg\ 310° = -0,8391$

15. Sabiendo que $sen\ 25° = 0,4226$ halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 745° b) 565° c) 1055° d) 1235°

a) $745° = 2 \cdot 360° + 25° \rightarrow sen\ 745° = 0,4226$ $\quad \cos 745° = 0,9063$ $\quad tg\ 745° = 0,4663$

b) $565° = 360° + 180° + 25° \rightarrow sen\ 565° = -0,4226$ $\quad \cos 565° = -0,9063$ $\quad tg\ 565° = 0,4663$

c) $1055° = 3 \cdot 360° - 25°$ $\quad sen\ 1055° = -0,4226$

$\cos 1055° = 0,9063$ $\quad tg\ 1055° = -0,4663$

d) $1235° = 3 \cdot 360° + 180° - 25°$ $\quad sen\ 1235° = 0,4226$

$\cos 1235° = -0,9063$ $\quad tg\ 1235° = -0,4663$

16. **Sabiendo que *sen* $\alpha = \frac{1}{5}$, calcula.**

a) $sen\ (90° - \alpha)$ b) $sen\ (180° - \alpha)$ c) $sen\ (-\alpha)$

a) $\frac{1}{5} = sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$

Sustituimos en la expresión para calcular $sen\ (180° - \alpha)$:

$cos^2\ (90° - \alpha) + sen^2\ (90° - \alpha) = 1;\ sen\ (90° - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = \frac{1}{5}$

c) $sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{1}{5}$

17. **Si *sen* 18° = 0,309 y *cos* 18° = 0,951; calcula.**

a) $sen\ 72°$ b) $cos\ 162°$ c) $tg\ (-72°)$

a) $sen\ 72° = sen\ (90° - 18°) = cos\ 18° = 0{,}951$

b) $cos\ 162° = cos\ (180° - 18°) = -cos\ 18° = -0{,}951$

c) $tg\ (-72°) = -tg\ 72° = -tg\ (90° - 18°) =$

$$= -\frac{1}{tg\ 18°} = -\frac{cos\ 18°}{sen\ 18°} = -\frac{0{,}951}{0{,}309} = -3{,}0777$$

18. **Dados los siguientes ángulos, contesta a las preguntas que aparecen a continuación.**

25° 65° 115° 155° −25° −65°

a) ¿Cuáles tienen el mismo seno? ¿Y el mismo coseno?

b) ¿Qué ángulos tienen igual la tangente?

a) $sen\ 25° = sen\ 155°$ $sen\ 65° = sen\ 115°$ $cos\ 65° = cos(-65)°$ $cos\ 25° = cos(-25)°$

b) $tg\ 115° = tg(-65)°$ $tg\ 155° = tg(-25)°$

19. **A partir de las razones de 45° y 60° calcula las razones trigonométricas de 105° y 15°.**

$$sen(60° + 45°) = sen\ 60° cos\ 45° + cos\ 60° sen\ 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}9659$$

$$cos\ (60° + 45°) = cos\ 60° cos\ 45° - sen\ 60° sen\ 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}2588$$

$$tg(60° + 45°) = \frac{tg\ 60° + tg\ 45°}{1 - tg\ 60°\ tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -3{,}7321$$

$$sen(60° - 45°) = sen\ 60°\ cos\ 45° - cos\ 60°\ sen\ 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2588$$

$$cos(60° - 45°) = cos\ 60°\ cos\ 45° + sen\ 60°\ sen\ 45° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}9659$$

$$tg(60° - 45°) = \frac{tg\ 60° - tg\ 45°}{1 + tg\ 60°\ tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 0{,}2679$$

20. **Calcula las razones trigonométricas de 76° y 19°, sabiendo que *cos* 38° = 0,788 y *sen* 38° = 0,6157**

$$cos\ 76° = cos(2\cdot 38°) = cos^2 38° - sen^2 38° = 0,2419$$

$$sen\ 76° = sen(2\cdot 38°) = 2\ sen\ 38°\ cos\ 38° = 0,9703$$

$$tg\ 38° = \frac{0,6157}{0,788} = 0,7813$$

$$tg\ 76° = tg(2\cdot 38°) = \frac{2\ tg\ 38°}{1 - tg^2 38°} = 4,011$$

$$cos\ 19° = cos\ \frac{38°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 38°}{2}} = 0,9455$$

$$sen\ 19° = sen\ \frac{38°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 38°}{2}} = 0,3256$$

$$tg\ 19° = tg\ \frac{38°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 38°}{1 + cos\ 38°}} = 0,3443$$

21. **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0°, 360°].**

a) $5\ sen\ x = 2$

b) $7\ cos\ x = -1$

c) $5\ tg\ x = 12$

d) $2\ tg\ x = 2$

a) $5\ sen\ x = 2 \rightarrow sen\ x = \frac{2}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 23°\ 34'\ 41{,}44'' \\ x_2 = 156°\ 25'\ 18{,}56'' \end{cases}$

b) $7\ cos\ x = -1 \rightarrow cos\ x = -\frac{1}{7} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 98°\ 12'\ 47{,}56'' \\ x_2 = 261°\ 47'\ 12{,}44'' \end{cases}$

c) $5\ tg\ x = 12 \rightarrow tg\ x = \frac{12}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 67°\ 22'\ 48{,}49'' \\ x_2 = 247°\ 22'\ 48{,}49'' \end{cases}$

d) $2\ tg\ x = 2 \rightarrow tg\ x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° \\ x_2 = 225° \end{cases}$

22. **Resuelve estas ecuaciones trigonométricas y simplifica el resultado.**

a) $cos\ 2x = 1$

b) $cos\ 2x + sen\ x = 1$

c) $sen\ 2x - cos\ x = 0$

d) $2\ tg\ 4x = 1$

a) $cos\ 2x = 1 \rightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $cos\ 2x + sen\ x = 1 \rightarrow cos^2 x - sen^2 x + sen\ x = 1 \rightarrow -2sen^2 x + sen\ x = 0$

$x_1 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $sen\ 2x - cos\ x = 0 \rightarrow 2\ sen\ x\ cos\ x - cos\ x = cos\ x(2\ sen\ x - 1) = 0$

$x_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

d) $2\ tg\ 4x = 1 \rightarrow tg\ 4x = \frac{1}{2} \rightarrow 4x = 26{,}56° + 180°\cdot k \rightarrow x = \frac{26{,}56° + 180°\cdot k}{4}$ con $k \in \mathbb{Z}$

23. **De un triángulo se sabe que sus catetos miden 7 y 24 m. Halla su hipotenusa y la amplitud de sus ángulos.**

Calculamos la hipotenusa utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \text{ m}$$

$$\alpha = arc\ sen \frac{7}{25} = 16{,}26^\circ \qquad \beta = arc\ sen \frac{24}{25} = 73{,}74^\circ$$

24. **De un triángulo rectángulo, $\widehat{ABC}$, conocemos que $\hat{C} = 62^\circ$ y que la hipotenusa a mide 1 m. Halla sus elementos.**

Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$\hat{B} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$

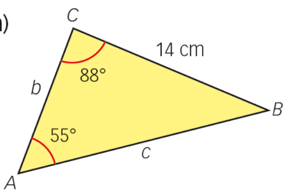
Utilizamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

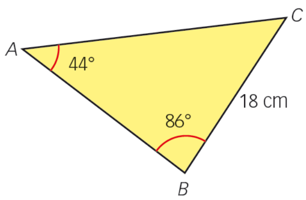
$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} \rightarrow b = sen\ 28^\circ = 0{,}4695 \text{ m}$$

Usamos el teorema de Pitágoras para determinar el tercer lado:

$$c = \sqrt{1^2 - 0{,}4695^2} = 0{,}8829 \text{ m}$$

25. **Calcula b y c en estos triángulos.**

a) 

b) 

a) $\hat{B} = 180^\circ - 88^\circ - 55^\circ = 37^\circ$

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 37^\circ} = \frac{14}{sen\ 55^\circ} \rightarrow b = 10{,}29 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{c}{sen\ 88^\circ} = \frac{14}{sen\ 55^\circ} \rightarrow c = 17{,}08 \text{ cm}$$

b) $\hat{C} = 180^\circ - 44^\circ - 86^\circ = 50^\circ$

Aplicamos el teorema del seno como en el apartado anterior y resulta:

$b = 25{,}85$ cm $\qquad c = 19{,}85$ cm

26. **Razona, en cada caso, si pueden ser ciertas las siguientes igualdades.**

a) $a = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$

b) $a = b = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$

c) $a = b = c$

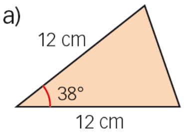
a) Es posible si $sen\ \hat{A} = 1$, es decir, si $\hat{A} = 90^\circ$.

b) No es posible, ya que entonces $a = \dfrac{c}{sen\ C} \rightarrow \hat{A} = 90^\circ$ y $b = \dfrac{c}{sen\ C} \rightarrow \hat{B} = 90^\circ$, pero no existe un triángulo con dos ángulos rectos.

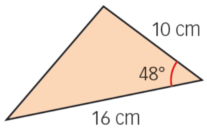
c) Es posible si $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$.

27. **Calcula la longitud del lado desconocido.**

a)



b)



a) $a = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 38^\circ} = 7{,}81$ cm

b) $a = \sqrt{10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cos 48^\circ} = 11{,}91$ cm

28. **Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.**

a) 12, 11 y 9 cm

b) 23, 14 y 8 cm

c) 26, 24 y 10 cm

d) 40, 30 y 20 m

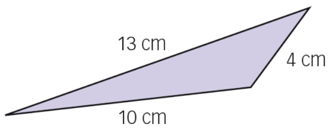
a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot \cos \widehat{A}$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}2929 \rightarrow \widehat{A} = 72^\circ\ 57'\ 59{,}7''$ → El triángulo es acutángulo.

b) Las medidas no forman un triángulo, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$ → El triángulo es rectángulo.

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \widehat{A}$
$\rightarrow \cos \widehat{A} = -0{,}25 \rightarrow \widehat{A} = 104^\circ\ 28'\ 39''$ → El triángulo es obtusángulo.

29. **Resuelve este triángulo.**

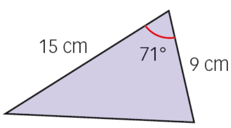


$13^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cos \widehat{A} \rightarrow \widehat{A} = 131{,}49^\circ$

$10^2 = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 35{,}18^\circ$

$180^\circ - 131{,}49^\circ - 35{,}18^\circ = 13{,}33^\circ$

30. **Resuelve este triángulo.**



$a = \sqrt{15^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 15 \cos 71^\circ} = 14{,}77$ cm

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{14{,}77}{sen\, 71^\circ} = \frac{9}{sen\, \hat{B}} \rightarrow \hat{B} = 35{,}18^\circ$$

$\hat{B} = 180^\circ - 71^\circ - 35{,}18^\circ = 73{,}82^\circ$

31. Resuelve el triángulo, sabiendo que dos de sus lados miden 14 cm y 18 cm, respectivamente, y el ángulo opuesto a uno de ellos mide 70°. Dibuja el triángulo.

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

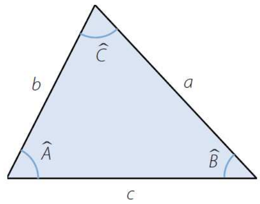
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}\rightarrow\frac{14}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{18}{\operatorname{sen}70°}\rightarrow\widehat{B}=46°\,57'\,34{,}4''$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°\rightarrow\widehat{A}+46°\,57'\,34{,}4''+70°=180°\rightarrow\widehat{A}=63°\,2'\,25{,}6''$$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}\rightarrow\frac{a}{\operatorname{sen}63°\,2'\,25{,}6''}=\frac{18}{\operatorname{sen}70°}\rightarrow a=17{,}07\text{ cm}$$



32. Al resolver el triángulo con $a = 4$ m, $c = 6$ m y $\widehat{A} = 25°$, obtenemos como soluciones dos triángulos obtusángulos. Comprueba que esto es posible y dibuja las soluciones.

Aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo opuesto al lado conocido:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}\rightarrow\frac{4}{\operatorname{sen}25°}=\frac{6}{\operatorname{sen}\widehat{C}}\rightarrow\begin{cases}\widehat{C}=39°\,20'\,25{,}7''\\ \widehat{C}=140°\,39'\,34''\end{cases}$$

Utilizamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

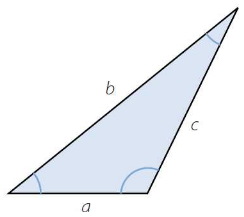
1.ª solución: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°\rightarrow25°+\widehat{B}+39°\,20'\,25{,}7''=180°\rightarrow\widehat{B}=115°\,39'\,34''$

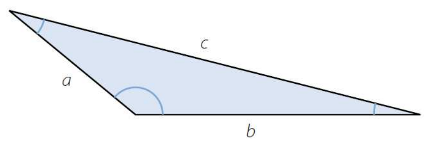
2.ª solución: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°\rightarrow25°+\widehat{B}+140°\,39'\,34''=180°\rightarrow\widehat{B}=14°\,20'\,26''$

Usamos el teorema del seno para calcular el tercer lado:

1.ª solución: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}\rightarrow\dfrac{b}{\operatorname{sen}115°\,39'\,34''}=\dfrac{4}{\operatorname{sen}25°}\rightarrow b=8{,}53\text{ m}$

2.ª solución: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}\rightarrow\dfrac{b}{\operatorname{sen}14°\,20'\,26''}=\dfrac{4}{\operatorname{sen}25°}\rightarrow b=2{,}34\text{ m}$





SABER HACER

33. Calcula el seno, el coseno y la tangente de α.

a) $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$ con $270°<\alpha<360°$

b) $\operatorname{tg}\alpha=-2$ con $90°<\alpha<180°$

a) $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=-0{,}9682$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-0{,}9682}{0{,}25}=-3{,}8728$

b) $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-0{,}4472$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=0{,}8944$

34. **Calcula los siguientes cosenos ayudándote de las razones trigonométricas de 50°.**

a) $\cos 40°$ c) $\cos 310°$ e) $\cos 5°$ g) $\cos 25°$
b) $\cos 130°$ d) $\cos 80°$ f) $\cos 100°$

$\cos 50° = 0{,}6428$ $\quad$ $\text{sen}\, 50° = 0{,}7660$ $\quad$ $\text{tg}\, 50° = 1{,}1918$

a) $\cos 40° = \cos(90° - 50°) = \cos 90° \cos 50° + \text{sen}\, 90° \,\text{sen}\, 50° = 0{,}7660$

b) $\cos 130° = \cos(180° - 50°) = \cos 180° \cos 50° + \text{sen}\, 180° \,\text{sen}\, 50° = -0{,}6428$

c) $\cos 310° = \cos(360° - 50°) = \cos 360° \cos 50° + \text{sen}\, 360° \,\text{sen}\, 50° = 0{,}6428$

d) $\cos 80° = \cos(30° + 50°) = \cos 30° \cos 50° - \text{sen}\, 30° \,\text{sen}\, 50° = 0{,}1736$

e) $\cos 5° = \cos(50° - 45°) = \cos 50° \cos 45° + \text{sen}\, 50° \,\text{sen}\, 45° = 0{,}9962$

f) $\cos 100° = \cos(2 \cdot 50°) = \cos^2 50° - \text{sen}^2 50° = -0{,}1736$

g) $\cos 25° = \cos \dfrac{50°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 50°}{2}} = 0{,}9063$

35. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\text{sen}\,(2x + 5°) = 1$ $\qquad$ b) $\cos\,(2x + 5°) = 1$

a) $\text{sen}(90° + k \cdot 360°) = 1 \rightarrow 2x + 5° = 90° + k \cdot 360° \rightarrow x = \dfrac{85°}{2} + k \cdot 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos(k \cdot 360°) = 1 \rightarrow 2x + 5° = k \cdot 360° \rightarrow x = k \cdot 180° - \dfrac{5°}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$

36. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\text{sen}\, 2x - 2\,\text{sen}\, x = 0$ $\qquad$ b) $\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x = 0$

a) $\text{sen}\, 2x - 2\,\text{sen}\, x = 0 \rightarrow 2\,\text{sen}\, x \cos x - 2\,\text{sen}\, x = 0 \rightarrow 2\,\text{sen}\, x(\cos x - 1) = 0$

$x_1 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x_2 = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x = 0 \rightarrow 2\,\text{sen}\, x \cos x + \text{sen}\, x = 0 \rightarrow \text{sen}\, x(2\cos x + 1) = 0$

$x_1 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $x_3 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

37. **Resuelve esta ecuación.**

$\boldsymbol{\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0}$

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad$ $x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad$ $x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad$ $x_3 = 2k\pi$

38. **Resuelve la siguiente ecuación.**

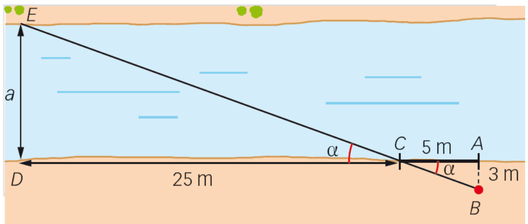
$$\cos 3x + \cos x = 0$$

$$\cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \rightarrow (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} x + \cos x = 0$$

$$2\cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 0 \rightarrow 2\cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

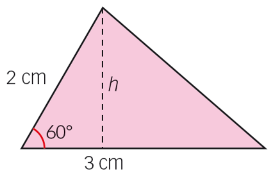
$$x_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \qquad x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

39. **Juan quiere saber la anchura de un río sin tener que desplazarse a la otra orilla. Midiendo con sus pasos llega a la siguiente situación.**



$$tg\, \alpha = \frac{3}{5} = \frac{a}{25} \rightarrow a = 15 \text{ m}$$

40. **Calcula el área de este triángulo.**



$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \sqrt{3} \qquad \text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}60 \text{ cm}^2$$

41. **Halla la altura de un triángulo de base 100 cm y cuyos ángulos adyacentes son $\alpha = 45°$ y $\beta = 60°$.**

$$\left.\begin{array}{l} tg\, 45° = \dfrac{h}{100-x} = 1 \\ tg\, 60° = \dfrac{h}{x} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \rightarrow 100 - x = \sqrt{3}x \rightarrow x = \frac{100}{\sqrt{3}+1} = 36{,}6 \text{ cm}$$

$$h = 63{,}4 \text{ cm}$$

42. **Determina el área del pentágono regular cuyo radio mide 15 cm.**

$$\operatorname{sen} 36° = \frac{l/2}{15} \rightarrow l = 17{,}64 \text{ cm}$$

$$15^2 - (l/2)^2 = ap^2 \rightarrow ap = 12{,}13 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{88{,}167 \cdot 12{,}13}{2} = 534{,}86 \text{ cm}^2$$

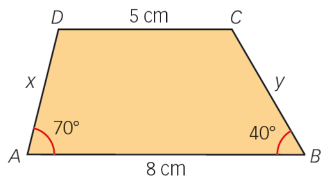
43. Dos barcos salen simultáneamente de un puerto con rumbos que forman un ángulo de 82°. El primero navega a una velocidad de 18 millas por hora, y el segundo a 25 millas por hora. Si mantienen inalterados los rumbos y el alcance de sus equipos de radio es de 180 millas, ¿podrán ponerse en contacto al cabo de 3 horas?

El primero habrá recorrido 54 millas, y el segundo, 75.

$$a=\sqrt{54^2+75^2-2\cdot 54\cdot 75\cdot \cos 82^\circ}=86{,}1 \text{ millas}$$

Como 86,1 < 180 podrán ponerse en contacto.

44. Calcula la longitud de los lados que faltan en el siguiente trapecio rectángulo.



Añadimos un triángulo con ángulos de 40º, 70º y 70º.

$$\frac{3}{\text{sen } 70^\circ}=\frac{y}{\text{sen } 70^\circ}=\frac{x}{\text{sen } 40^\circ}\rightarrow y=3 \text{ cm},\ x=2{,}05 \text{ cm}$$

ACTIVIDADES FINALES

45. Halla la equivalencia en radianes de los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales.

a) 35°
b) 185°
c) 84° 12'
d) 62° 25'

a) $\frac{7\pi}{36}$ rad b) $\frac{37\pi}{36}$ rad c) $84{,}2^\circ=\frac{42{,}1\pi}{90}$ rad=1,47 rad d) $62{,}42^\circ=\frac{31{,}21\pi}{90}$ rad=1,09 rad

46. Halla la equivalencia en grados de los siguientes ángulos dados en radianes.

a) 1,5 rad
b) 3,5 rad
c) 1,5 π rad
d) $\frac{6\pi}{5}$ rad

a) 85,94º b) 200,54º c) 270º d) 216º

47. En los triángulos rectángulos *ABC* que siguen, *A* es el vértice del ángulo recto. Se dan medidas de la hipotenusa, *a*, y de los catetos, *b* y *c*. Contesta las cuestiones que se plantean en cada caso.

a) Halla $\text{sen}\,\widehat{B}$ y $\text{tg}\,\widehat{B}$ si $b=12$ cm, $c=16$ cm.
b) Halla $\cos\widehat{B}$ y $\text{cotg}\,\widehat{B}$ si $a=30$ cm, $c=22$ cm.
c) Halla $\cos\widehat{C}$ y $\text{cosec}\,\widehat{C}$ si $a=3$ cm, $b=2$ cm.
d) Halla $\cos\widehat{B}$ y $\text{tg}\,\widehat{B}$ si $b=20$ cm, $c=20$ cm.

a) $a=\sqrt{12^2+16^2}=20$ cm $\text{sen } B=\frac{b}{a}=0{,}6$ $\text{tg } B=\frac{b}{c}=0{,}75$

b) $b=\sqrt{30^2-22^2}=\sqrt{416}$ cm $\cos B=\frac{c}{a}=\frac{11}{15}$ $\text{cotg } B=\frac{c}{b}=\frac{11}{\sqrt{104}}$

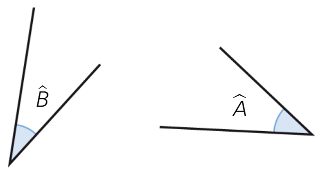
c) $c=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ cm $\cos C=\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ $\text{cosec } C=\frac{a}{c}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

d) $a=\sqrt{20^2+20^2}=\sqrt{800}$ cm $\cos B=\frac{c}{a}=\frac{20}{\sqrt{800}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg } B=\frac{b}{c}=1$

48. **Dibuja dos ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ tales que:**

$$sen\ \widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ \widehat{B} = \sqrt{5}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:



49. **Sin utilizar la calculadora, determina el valor más simplificado posible de las siguientes expresiones.**

a) $sen\ 30° + sen\ 60°$

b) $tg\ \frac{\pi}{3} + sec\ \frac{\pi}{6}$

c) $cotg\ 90° - cotg\ 30°$

d) $cosec\ 60° - cos\ 60°$

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3+2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

c) $0 - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$

d) $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

50. **Determina, sin utilizar la calculadora, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.**

a) $sen\ 30° + sen\ 60° = sen\ 90°$

b) $cos\ 30° + cos\ 60° = cos\ 90°$

c) $sen\ 90° = 2\ sen\ 45°$

d) $cos\ 90° = 2\ cos\ 45°$

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1 \rightarrow$ Falsa.

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \neq 0 \rightarrow$ Falsa.

c) $1 \neq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ Falsa.

d) $0 \neq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ Falsa.

51. **Halla la cosecante, la secante y la cotangente:**

a) Del ángulo de 30°.

b) Del ángulo de 45°.

c) Del ángulo de 60°.

d) Del ángulo de 90°.

a) $cosec\ 30° = 2$	$sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$cotg\ 30° = \sqrt{3}$
b) $cosec\ 45° = \sqrt{2}$	$sec\ 45° = \sqrt{2}$	$cotg\ 45° = 1$
c) $cosec\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$sec\ 60° = 2$	$cotg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $cosec\ 90° = 1$	La secante no existe.	$cotg\ 90° = 0$

52. **Los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son agudos. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno sin llegar a determinar los ángulos.**

Seno	Coseno	Tangente
$sen\,\widehat{A} = 0{,}5602$		
	$cos\,\widehat{B} = 0{,}1849$	
		$tg\,\widehat{C} = 2{,}7804$

Seno	Coseno	Tangente
$sen\,\widehat{A} = 0{,}5602$	$cos\,\widehat{A} = 0{,}8284$	$tg\,\widehat{A} = 0{,}6763$
$sen\,\widehat{B} = 0{,}9828$	$cos\,\widehat{B} = 0{,}1849$	$tg\,\widehat{B} = 5{,}3151$
$sen\,\widehat{C} = 0{,}6616$	$cos\,\widehat{C} = 0{,}3384$	$tg\,\widehat{C} = 2{,}7804$

$$0{,}5602^2 + cos^2\,\widehat{A} = 1 \rightarrow cos\,\widehat{A} = \sqrt{1 - 0{,}5602^2} = 0{,}8284$$

$$tg\,\widehat{A} = \frac{0{,}5602}{0{,}8284} = 0{,}6763$$

$$sen^2\,\widehat{B} + 0{,}1849^2 = 1 \rightarrow sen\,\widehat{B} = \sqrt{1 - 0{,}1849^2} = 0{,}9828$$

$$tg\,\widehat{B} = \frac{0{,}5602}{0{,}8284} = 0{,}6763$$

$$cos\,\widehat{C} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2{,}7804^2}} = 0{,}3384$$

$$sen^2\,\widehat{C} + 0{,}3384^2 = 1 \rightarrow sen\,\widehat{C} = \sqrt{1 - 0{,}3384^2} = 0{,}6616$$

53. **Emplea la calculadora para determinar los ángulos agudos que cumplen lo siguiente.**

a) $cos\,\widehat{A} = 0{,}3453$
b) $tg\,\widehat{B} = 2{,}3688$
c) $cosec\,\widehat{C} = 1{,}9044$
d) $cos\,\widehat{D} = 0{,}9726$
e) $tg\,\widehat{E} = 0{,}3554$
f) $sen\,\widehat{F} = 0{,}0968$
g) $sen\,\widehat{G} = 0{,}2494$
h) $cotg\,\widehat{H} = 2{,}5$

a) $cos\,\widehat{A} = 0{,}3453 \rightarrow \widehat{A} = 69°\ 47'\ 59{,}6''$
b) $tg\,\widehat{B} = 2{,}3688 \rightarrow \widehat{B} = 67°\ 6'\ 45{,}84''$
c) $cosec\,\widehat{C} = 1{,}9044 \rightarrow sen\,\widehat{C} = 0{,}5251 \rightarrow \widehat{C} = 31°\ 40'\ 29{,}9''$
d) $cos\,\widehat{D} = 0{,}9726 \rightarrow \widehat{D} = 13°\ 26'\ 36{,}3''$
e) $tg\,\widehat{E} = 0{,}3554 \rightarrow \widehat{E} = 19°\ 33'\ 54{,}8''$
f) $sen\,\widehat{F} = 0{,}0968 \rightarrow \widehat{F} = 5°\ 33'\ 17{,}75''$
g) $sen\,\widehat{G} = 0{,}2494 \rightarrow \widehat{G} = 14°\ 26'\ 31{,}2''$
h) $cotg\,\widehat{H} = 2{,}5 \rightarrow tg\,\widehat{H} = 0{,}4 \rightarrow \widehat{H} = 21°\ 48'\ 5{,}07''$

54. **Determina las siguientes razones trigonométricas.**

a) $sen\ 19°\ 22'\ 37''$
b) $cos\ 44°\ 52'$
c) $cos\ 1{,}03$
d) $sen\,\frac{2\pi}{5}$
e) $sec\ 54°\ 28'$
f) $cosec\ \pi$
g) $tg\ 83°\ 41'\ 57''$
h) $sen\ 37°\ 25''$
i) $tg\,\frac{\pi}{8}$
j) $cos\ 0{,}845$
k) $cotg\ 35°\ 40'$
l) $sec\,\frac{\pi}{6}$

a) $sen\ 19°\ 22'\ 37'' = 0{,}3318$

b) $cos\ 44°\ 52' = 0{,}7088$

c) $cos\ 1{,}03 = 0{,}5148$

d) $sen\ \dfrac{2\pi}{5} = 0{,}9511$

e) $sec\ 54°\ 28' = 1{,}7206$

f) No está definida.

g) $tg\ 83°\ 41'\ 57'' = 9{,}0567$

h) $sen\ 37°\ 25'' = 0{,}6019$

i) $tg\dfrac{\pi}{8} = 0{,}4142$

j) $cos\ 0{,}845 = 0{,}6637$

k) $cotg\ 35°\ 40' = 1{,}3934$

l) $sec\dfrac{\pi}{6} = 1{,}1547$

55. Resuelve los triángulos rectángulos correspondientes, considerando que $\widehat{A}$ es el ángulo recto.

a) $b = 7$ m, $\widehat{B} = 48°$

b) $c = 12$ m, $\widehat{B} = 28°$

c) $a = 13$ m, $c = 5$ m

d) $a = 6$ cm, $\widehat{C} = 42°\ 12'$

e) $b = 3$ m, $c = 6$ m

f) $b = 8$ m, $a = 10$ m

a) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$\widehat{C} = 90° - 48° = 42°$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{a}{sen\ \widehat{A}} \rightarrow \frac{7}{sen\ 48°} = a \rightarrow a = 9{,}42 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$c = \sqrt{9{,}42^2 - 7^2} = 6{,}3$ m

b) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para hallar el tercer ángulo:

$\widehat{C} = 90° - 28° = 62°$

Usamos una de sus razones trigonométricas para obtener otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 28°} = \frac{12}{sen\ 62°} \rightarrow b = 6{,}38 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$a = \sqrt{12^2 + 6{,}38^2} = 13{,}59$ m

c) Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ m

$$sen\ \widehat{B} = \frac{12}{13} \rightarrow \widehat{B} = 67°\ 22'\ 48{,}5''$$

$$sen\ \widehat{C} = \frac{5}{13} \rightarrow \widehat{C} = 22°\ 37'\ 11{,}5''$$

d) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para obtener el tercer ángulo:

$\widehat{B} = 90° - 42°\ 12' = 47°\ 48'$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{a}{sen\ \widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 47°\ 48'} = 6 \rightarrow b = 4{,}44 \text{ m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$c = \sqrt{6^2 - 4{,}44^2} = 4{,}04$ m

e) Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$a = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}71$ m

$$sen\ \widehat{B} = \frac{3}{6{,}71} \rightarrow \widehat{B} = 26°\ 33'\ 26{,}6''$$

$$sen\ \widehat{C} = \frac{6}{6{,}71} \rightarrow \widehat{C} = 63°\ 26'\ 33{,}4''$$

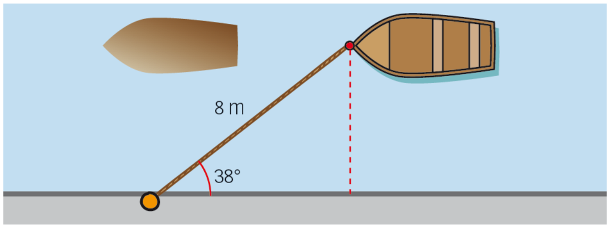
f) Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$c = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ m

$sen\,\widehat{B} = \frac{8}{10} \rightarrow \widehat{B} = 53°\ 7'\ 48{,}37''$

$sen\,\widehat{C} = \frac{6}{10} \rightarrow \widehat{C} = 36°\ 52'\ 11{,}63''$

56. **Una barca está atada a la orilla de un canal con una cuerda que mide 8 m. En cierto momento, esta cuerda forma un ángulo de 38° con el borde. ¿A qué distancia de la orilla se encuentra la barca?**



Distancia $= 8\ sen\ 38° = 4{,}93$ m

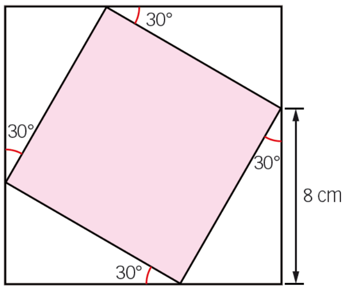
57. **Si estamos a 40 m de la chimenea de una fábrica y la vemos bajo un ángulo de 26°, ¿qué altura tiene? Considera que los ojos del observador están situados a 175 cm del suelo.**

$tg\ 26° = \frac{a}{40} \rightarrow a = 19{,}51$ m

$19{,}51 + 1{,}75 = 21{,}26$ m

La altura de la chimenea es 21,26 m.

58. **Halla el área del cuadrado interior.**



$cos\ 30° = \frac{8}{l} \rightarrow l = 9{,}24$ cm

Área $= l^2 = 85{,}3$ cm^2

59. **Determina la longitud de la apotema del hexágono regular de lado 4 cm.**

El hexágono regular se puede dividir en doce triángulos rectángulos.

Calculamos el ángulo central: $\frac{360°}{12} = 30°$

$cos\ 30° = \frac{ap}{4} \rightarrow ap = 3{,}46$ cm

60. Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio. Determina la medida de su lado.

El pentágono regular se puede dividir en cinco triángulos isósceles.

Calculamos el ángulo central: $\frac{360°}{5} = 72°$

El ángulo central mide 72°.

Hallamos los restantes ángulos del triángulo:
$180° = 72° + 2\widehat{A} \rightarrow \widehat{A} = 54°$

Aplicamos el teorema del seno:
$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\,72°} = \frac{20}{sen\,54°} \rightarrow b = 23{,}51$ cm

El lado mide 23,51 cm.

61. Escribe de menor a mayor los cosenos, sin calcularlos, de los ángulos siguientes.

55° 110° 165° 220° 275° 330°

Los cosenos son negativos en el segundo y tercer cuadrantes.

$cos\,165° < cos\,220° < cos\,110° < cos\,275° < cos\,55° < cos\,330°$

62. Escribe de menor a mayor los senos, sin calcularlos, de los ángulos siguientes.

45° 120° 135° 200° 225° 310°

Los senos son negativos en el tercer y cuarto cuadrantes.

$sen\,310° < sen\,225° < sen\,200° < sen\,45° = sen\,135° < sen\,120°$

63. La tabla muestra las razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes. Sin determinarlos, complétala en tu cuaderno con las razones que faltan.

Cuadrante	*sen*	*cos*	*tg*
Segundo	0,6702		
Tercero		−0,4539	
Cuarto			−0,7459
Tercero	−0,7822		
Segundo			−1,9004
Cuarto		0,6983	

Cuadrante	*sen*	*cos*	*tg*
Segundo	**0,6702**	−0,7422	−0,903
Tercero	0,8911	**−0,4539**	−1,9631
Cuarto	0,8016	−0,5979	**−0,7459**
Tercero	**−0,7822**	−0,623	1,2555
Segundo	0,8849	−0,4657	**−1,9004**
Cuarto	−0,7158	**0,6983**	−1,0251

$0,6702^2 + \cos^2 \widehat{A} = 1 \rightarrow \cos \widehat{A} = \sqrt{1 - 0,6702^2} = -0,7422$

$tg\,\widehat{A} = \dfrac{0,6702}{-0,7422} = -0,903$

$sen^2\,\widehat{B} + (-0,4539)^2 = 1 \rightarrow sen\,\widehat{B} = \sqrt{1 - 0,4539^2} = 0,8911$

$tg\,\widehat{B} = \dfrac{0,8911}{-0,4539} = -1,9631$

$\cos \widehat{C} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + (-0,7459)^2}} = 0,8016$

$sen^2\,\widehat{C} + 0,8016^2 = 1 \rightarrow sen\,\widehat{C} = \sqrt{1 - 0,8016^2} = -0,5979$

$(-0,7822)^2 + \cos^2 \widehat{D} = 1 \rightarrow \cos \widehat{D} = \sqrt{1 - 0,7822^2} = -0,623$

$tg\,\widehat{D} = \dfrac{-0,7822}{-0,623} = 1,2555 \qquad \cos \widehat{E} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + (-1,9004)^2}} = -0,4657$

$sen^2\,\widehat{E} + (-0,4657)^2 = 1 \rightarrow sen\,\widehat{E} = \sqrt{1 - 0,4657^2} = 0,8849$

$sen^2\,\widehat{F} + 0,6983^2 = 1 \rightarrow sen\,\widehat{F} = \sqrt{1 - 0,6983^2} = -0,7158$

$tg\,\widehat{F} = \dfrac{-0,7158}{0,6983} = -1,0251$

64. Calcula, sin utilizar la calculadora, el valor del seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos medidos en radianes.

a) $-\pi$ rad

b) $-\dfrac{\pi}{2}$ rad

c) $-\dfrac{\pi}{6}$ rad

d) $\dfrac{\pi}{4}$ rad

e) $\dfrac{\pi}{3}$ rad

f) $\dfrac{\pi}{2}$ rad

g) $-\dfrac{3\pi}{2}$ rad

h) π rad

i) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad

j) 2π rad

k) $\dfrac{7\pi}{2}$ rad

l) $\dfrac{9\pi}{2}$ rad

a) $sen(-\pi) = 0$ $\quad \cos(-\pi) = -1$ $\quad tg(-\pi) = 0$

b) $sen\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ $\quad \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ La tangente no existe.

c) $sen\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad tg\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tg\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

e) $sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ $\quad tg\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

f) $sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ La tangente no existe.

g) $sen\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$ $\quad \cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ La tangente no existe.

h) $sen\,\pi = 0$ $\quad \cos \pi = -1$ $\quad tg\,\pi = 0$

i) $sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$ $\quad \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ La tangente no existe.

j) $sen\,2\pi = 0$ $\quad \cos 2\pi = 1$ $\quad tg\,2\pi = 0$

k) $sen\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = -1$ $\quad \cos\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ La tangente no existe.

l) $sen\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) = 1$ $\quad \cos\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) = 0$ $\quad$ La tangente no existe.

65. Calcula, sin utilizar la calculadora, el valor del seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos medidos en grados.

a) $-60°$
b) $-45°$
c) $-30°$
d) $0°$
e) $120°$
f) $135°$
g) $150°$
h) $180°$
i) $210°$
j) $225°$
k) $240°$
l) $270°$

a) $sen(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos(-60°) = \frac{1}{2}$ $tg(-60°) = -\sqrt{3}$

b) $sen(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg(-45°) = -1$

c) $sen(-30°) = -\frac{1}{2}$ $cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg(-30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $sen\ 0° = 0$ $cos\ 0° = 1$ $tg\ 0° = 0$

e) $sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ 120° = -\frac{1}{2}$ $tg\ 120° = -\sqrt{3}$

f) $sen\ 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg\ 135° = -1$

g) $sen\ 150° = \frac{1}{2}$ $cos\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $sen\ 180° = 0$ $cos\ 180° = -1$ $tg\ 180° = 0$

i) $sen\ 210° = -\frac{1}{2}$ $cos\ 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

j) $sen\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg\ 225° = 1$

k) $sen\ 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ 240° = -\frac{1}{2}$ $tg\ 240° = \sqrt{3}$

l) $sen\ 270° = -1$ $cos\ 270° = 0$ La tangente no existe.

66. Utiliza la calculadora para hallar estas razones.

a) $sen\ 319°\ 12'\ 52''$
b) $cos\ 434°\ 26'$
c) $tg\ 7{,}03$
d) $sen\ \frac{8\pi}{5}$
e) $cosec\ 200°\ 16'$
f) $sec\ \frac{5\pi}{4}$
g) $tg\ 183°\ 13'\ 53''$
h) $sen\ 333°\ 55''$
i) $tg\ \frac{11\pi}{8}$
j) $cos\ 3{,}845$
k) $cotg\ \frac{11\pi}{6}$
l) $cosec\ 5{,}24$

a) $sen\ 319°\ 12'\ 52'' = -0{,}6532$
b) $cos\ 434°\ 26' = 0{,}2684$
c) $tg\ 7{,}03 = 0{,}9257$
d) $sen\ \frac{8\pi}{5} = -0{,}9511$
e) $cosec\ 200°\ 16' = -2{,}8869$
f) $sec\ \frac{5\pi}{4} = -1{,}4142$
g) $tg\ 183°\ 13'\ 53'' = 0{,}0565$
h) $sen\ 333°\ 55'' = -0{,}4538$
i) $tg\ \frac{11\pi}{8} = 2{,}4142$
j) $cos\ 3{,}845 = -0{,}7626$
k) $cotg\ \frac{11\pi}{6} = -1{,}7321$
l) $cosec\ 5{,}24 = -1{,}1574$

67. **Halla las razones trigonométricas relacionándolas con las de un ángulo del primer cuadrante.**

a) 301° 21' 15"
b) 902° 40'
c) 190° 43"
d) 295° 12' 45"
e) 386° 56'
f) 612° 43' 2"

a) $301^\circ\ 21'\ 15'' = 360^\circ - (58^\circ\ 38'\ 45'')$

$sen(301^\circ\ 21'\ 15'') = -sen(58^\circ\ 38'\ 45'') = -0{,}8540$

$cos(301^\circ\ 21'\ 15'') = cos(58^\circ\ 38'\ 45'') = 0{,}5203$

$tg(301^\circ\ 21'\ 15'') = -tg(58^\circ\ 38'\ 45'') = -1{,}6412$

b) $902^\circ\ 40' = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 2^\circ\ 40'$

$sen(902^\circ\ 40') = -sen(2^\circ\ 40') = -0{,}0465$

$cos(902^\circ\ 40') = -cos(2^\circ\ 40') = -0{,}9989$

$tg(902^\circ\ 40') = tg(2^\circ\ 40') = 0{,}0466$

c) $190^\circ\ 43'' = 180^\circ + 10^\circ\ 43''$

$sen(190^\circ\ 43'') = -sen(10^\circ\ 43'') = -0{,}1739$

$cos(190^\circ\ 43'') = -cos(10^\circ\ 43'') = -0{,}9848$

$tg(190^\circ\ 43'') = tg(10^\circ\ 43'') = 0{,}1765$

d) $295^\circ\ 12'\ 45'' = 360^\circ - (64^\circ\ 47'\ 15'')$

$sen(295^\circ\ 12'\ 45'') = -sen(64^\circ\ 47'\ 15'') = -0{,}9047$

$cos(295^\circ\ 12'\ 45'') = cos(64^\circ\ 47'\ 15'') = 0{,}4260$

$tg(295^\circ\ 12'\ 45'') = -tg(64^\circ\ 47'\ 15'') = -2{,}1239$

e) $386^\circ\ 56' = 360^\circ + 26^\circ\ 56'$

$sen(386^\circ\ 56') = sen(26^\circ\ 56') = 0{,}4530$

$cos(386^\circ\ 56') = cos(26^\circ\ 56') = 0{,}8915$

$tg(386^\circ\ 56') = tg(26^\circ\ 56') = 0{,}5081$

f) $612^\circ\ 43'\ 2'' = 360^\circ + 180^\circ + 72^\circ\ 43'\ 2''$

$sen(612^\circ\ 43'\ 2'') = -sen(72^\circ\ 43'\ 2'') = -0{,}9549$

$cos(612^\circ\ 43'\ 2'') = -cos(72^\circ\ 43'\ 2'') = -0{,}2971$

$tg(612^\circ\ 43'\ 2'') = tg(72^\circ\ 43'\ 2'') = 3{,}2140$

68. **Dibuja todos los ángulos posibles, menores que 360°, que verifiquen las siguientes condiciones.**

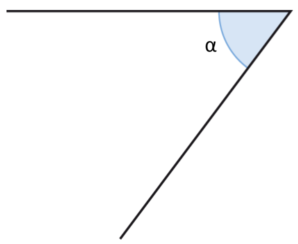
a) Su seno valga 0,8.

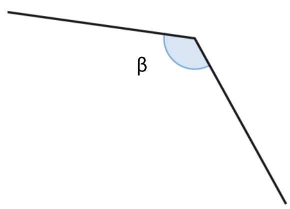
b) Su coseno valga −0,4.

c) Su tangente valga 0,5.

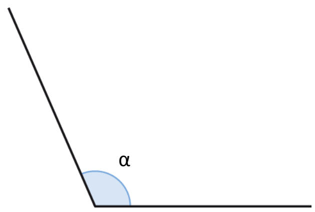
d) Su seno valga −0,4.

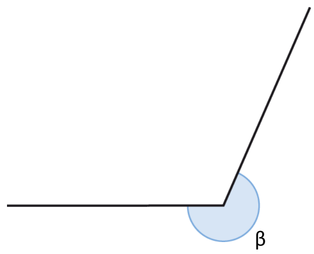
a) $\alpha = 53{,}13°$ $\beta = 126{,}87°$



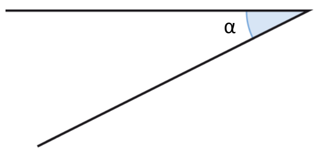


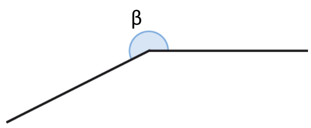
b) $\alpha = 113{,}58°$ $\beta = 246{,}42°$



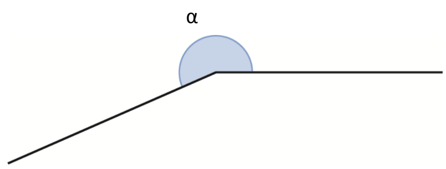


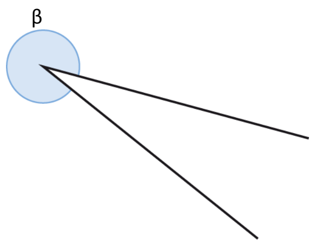
c) $\alpha = 26{,}57°$ $\beta = 206{,}57°$





d) $\alpha = 203{,}58°$ $\beta = 336{,}42°$





69. **Halla estos ángulos usando la calculadora.**

a) *arc cos* 0,4539

b) *arc sen* 0,9284

c) *arc tg* (−0,5459)

d) *arc tg* 2,1618

e) *arc cos* (−0,2926)

f) *arc sen* (−0,3308)

a) *arc cos* $0{,}4539 = 63°\ 20{,}95''$

b) *arc sen* $0{,}9284 = 68°\ 11'\ 12{,}3''$

c) *arc tg*$(-0{,}5459) = 331°\ 22'\ 12''$

d) *arc tg* $2{,}1618 = 65°\ 10'\ 32{,}9''$

e) *arc cos*$(-0{,}2926) = 107°\ 49{,}2''$

f) *arc sen*$(-0{,}3308) = 340°\ 40'\ 58''$

70. **Determina el ángulo α del 1.er cuadrante cuyas razones trigonométricas verifican lo siguiente.**

a) $sen\ \alpha = |sen\ 249°\ 31'|$
b) $cos\ \alpha = |cos\ 249°\ 31'|$
c) $tg\ \alpha = |tg\ 249°\ 31'|$
d) $tg\ \alpha = |tg\ 183°\ 30'|$

Halla el resto de sus razones trigonométricas.

a) $sen\ \alpha = |sen\ 249°\ 31'| = 0{,}9368 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

b) $cos\ \alpha = |cos\ 249°\ 31'| = 0{,}3499 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

c) $tg\ \alpha = |tg\ 249°\ 31'| = 2{,}6770 \rightarrow \alpha = 69°\ 31'$

d) $tg\ \alpha = |tg\ 183°\ 30'| = 0{,}0612 \rightarrow \alpha = 3°\ 30'\ 7{,}68'' \rightarrow \begin{cases} sen\ 3°\ 30'\ 7{,}68'' = 0{,}0611 \\ cos\ 3°\ 30'\ 7{,}68'' = 0{,}9981 \end{cases}$

71. **De un ángulo de un triángulo se sabe que su seno vale 0,7. ¿Podrías determinar de qué ángulo se trata?**

$sen\ \alpha = 0{,}7 \rightarrow \alpha = 44{,}43°$ o bien $\alpha = 135{,}57°$

Los dos ángulos pueden pertenecer a un triángulo, por lo que no podemos determinar de qué ángulo se trata.

72. **De un ángulo de un triángulo se conoce su coseno, que vale 0,2. ¿Podrías determinar qué ángulo es?**

$cos\ \alpha = 0{,}2 \rightarrow \alpha = 78{,}46°$ o bien $\alpha = 281{,}54°$

Solo puede pertenecer a un triángulo el ángulo $\alpha = 78{,}46°$.

73. **De un ángulo dado, α, se sabe que *sen* $\alpha = 0{,}3$ y que su tangente es negativa. Determina a qué cuadrante pertenece dicho ángulo y calcula el valor de la tangente.**

Como $sen\ \alpha > 0$ y $tg\ \alpha < 0$ el ángulo está en el segundo cuadrante.

$sen\ \alpha = 0{,}3 \rightarrow \alpha = 162{,}54°$ $\qquad tg\ 162{,}54° = -0{,}3145$

74. **Sabiendo que la tangente de un ángulo es dos veces su seno, que el signo de este es positivo y el del coseno negativo, determina a qué cuadrante pertenece el ángulo y calcula sus restantes razones trigonométricas.**

$\left.\begin{matrix} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ El ángulo está en el segundo cuadrante.

$$tg\ \alpha = 2\ sen\ \alpha \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2\ sen\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120° \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ tg\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$$

75. **De un ángulo α del 2.º cuadrante se sabe únicamente que su seno es 0,5. Calcula las restantes razones trigonométricas de dicho ángulo.**

$sen\ \alpha = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 150°$ $\qquad cos\ 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad tg\ 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

76. **Sabiendo que *sen* $\alpha = 0{,}23$ y que α es un ángulo agudo, determina estas razones trigonométricas.**

a) $\cos\alpha$
b) $tg\,\alpha$
c) $tg\,(-\alpha)$
d) $\cos(180° - \alpha)$
e) $sen\,(180° + \alpha)$
f) $sen\,(720° + \alpha)$

a) $0{,}23^2 + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}23^2} = 0{,}9732$

b) $tg\,\alpha = \dfrac{0{,}23}{0{,}9732} = 0{,}2363$

c) $tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha = -0{,}2363$

d) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = -0{,}9732$

e) $sen\,(180° + \alpha) = -sen\,\alpha = -0{,}23$

f) $sen\,(720° + \alpha) = sen\,\alpha = 0{,}23$

77. **Sabiendo que la tangente de un ángulo es tres veces su seno y que ambas razones son negativas, halla las restantes razones trigonométricas.**

Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha < 0 \\ tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha > 0 \rightarrow \text{El ángulo está en el cuarto cuadrante.}$$

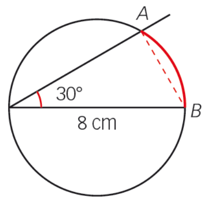
Por otra parte:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = 3\,sen\,\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 289{,}47°\,.$$

Entonces, las demás razones trigonométricas son:

$sen\,289{,}47° = -0{,}9428$ $\qquad$ $tg\,289{,}47° = -2{,}8284\,.$

78. **En la siguiente circunferencia, calcula la medida del segmento *AB* y del arco de circunferencia $\widehat{AB}$.**



Como el ángulo $\widehat{A} = 90°$, el ángulo $\widehat{B} = 90° - 30° = 60°$.

$sen\,30° = \dfrac{AB}{8} \rightarrow AB = 4$ cm

El segmento *AB* mide 4 cm.

Como el ángulo de 30° es inscrito, el ángulo central que abarca el arco $\widehat{AB}$ mide 60°.

Calculamos la longitud de un arco de 60° en una circunferencia de 4 cm de radio:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 60°}{360°} = \frac{4\pi}{3} = 4{,}19 \text{ cm}$$

El arco $\widehat{AB}$ mide 4,19 cm.

79. **Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) $\cos\gamma = -0{,}54$ con $\pi < \gamma < \dfrac{3\pi}{2}$

b) $\operatorname{sen}\delta = 0$ con $\dfrac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$

a) $\operatorname{sen}^2\gamma + (-0{,}54)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}\gamma = -\sqrt{1-(-0{,}54)^2} = -0{,}8417$

$tg\,\gamma = \dfrac{-0{,}8417}{-0{,}54} = 1{,}5587$

b) No existe ningún ángulo con estas condiciones, pues si $\operatorname{sen}\delta = 0$, entonces $\delta = 2k\pi$.

80. **Resuelve los triángulos que aparecen a continuación.**

a) $a = 10$ cm $\quad b = 14$ cm $\quad c = 8$ cm

b) $b = 6$ cm $\quad c = 9$ cm $\quad \widehat{A} = 39°\ 12'$

c) $a = 7$ cm $\quad \widehat{B} = 38°\ 49'$ $\quad \widehat{C} = 66°\ 40'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \dfrac{-100+196+64}{2\cdot 14\cdot 8} =$

$= 0{,}7143$

$\widehat{A} = 44°\ 24'\ 55{,}1''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{-b^2+a^2+c^2}{2ac} = \dfrac{-196+100+64}{2\cdot 10\cdot 8} =$

$= -0{,}2$

$\widehat{B} = 101°\ 32'\ 13''$

$\widehat{C} = 180° - 44°\ 24'\ 55{,}1'' - 101°\ 32'\ 13'' = 34°\ 2'\ 51{,}85''$

b) Aplicamos el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow a^2 = 6^2 + 9^2 - 2\cdot 6\cdot 9\cdot \cos 39°\ 12' \rightarrow a = 5{,}77$ cm

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{-b^2+a^2+c^2}{2ac} = \dfrac{-36+33{,}3+81}{2\cdot 5{,}77\cdot 9} =$

$= 0{,}7534$

$\widehat{B} = 41°\ 4'\ 14{,}51'' \rightarrow \widehat{C} = 180° - 39°\ 12' - 41°\ 4'\ 14{,}51'' = 99°\ 43'\ 45{,}49''$

c) $\widehat{A} = 180° - 38°\ 49' - 66°\ 40' = 74°\ 31°$

Aplicamos el teorema del seno:

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \dfrac{b}{\operatorname{sen} 38°\ 49'} = \dfrac{7}{\operatorname{sen} 74°\ 31'} \rightarrow b = 4{,}55$ cm

$\dfrac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \dfrac{c}{\operatorname{sen} 66°\ 40'} = \dfrac{7}{\operatorname{sen} 74°\ 31'} \rightarrow c = 6{,}67$ cm

81. **Resuelve los siguientes triángulos.**

a) $a = 9$ cm $\quad c = 5$ cm $\quad \widehat{B} = 103°\ 27'$

b) $b = 8{,}3$ cm $\quad c = 9{,}1$ cm $\quad \widehat{C} = 112°\ 50'$

c) $c = 6$ cm $\quad \widehat{A} = 27°\ 42'$ $\quad \widehat{B} = 98°\ 20'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow b = \sqrt{81 + 25 - 90\cdot \cos 103°\ 27'} = 11{,}27$ cm

Aplicamos el teorema del seno:

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \dfrac{11{,}27}{\operatorname{sen} 103°\ 27'} = \dfrac{9}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}7767$

$\widehat{A} = 50°\ 57'\ 26{,}6'' \rightarrow \widehat{C} = 180° - 50°\ 57'\ 26{,}6'' - 103°\ 27' = 25°\ 35'\ 33{,}4''$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$\dfrac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \rightarrow \dfrac{9{,}1}{\operatorname{sen} 112°\ 50'} = \dfrac{8{,}3}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \rightarrow \operatorname{sen}\widehat{B} = 0{,}8406$

$\widehat{B} = 57°\ 12'\ 18{,}2'' \rightarrow \widehat{A} = 180° - 112°\ 50' - 57°\ 12'\ 18{,}2'' = 9°\ 57'\ 41{,}8''$

$a = \dfrac{9{,}1 \cdot \operatorname{sen} 91°\ 57'\ 41{,}8''}{\operatorname{sen} 112°\ 50'} = 1{,}71$ cm

c) $\widehat{C} = 180° - 27° 42' - 98° 20' = 53° 58'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{6}{sen\,53°\,58'} = \frac{a}{sen\,27°\,42'} \to a = 3{,}45 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \to \frac{6}{sen\,53°\,58'} = \frac{b}{sen\,98°\,20'} \to b = 7{,}34 \text{ cm}$$

82. **Encuentra las soluciones para los siguientes triángulos.**

a) $a = 12$ cm $\quad b = 7$ cm $\quad c = 6$ cm

b) $a = 8$ cm $\quad c = 9$ cm $\quad \widehat{A} = 42°\,55'$

c) $a = 10$ cm $\quad c = 9$ cm $\quad \widehat{A} = 72°\,55'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$\cos\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-144 + 49 + 36}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -0{,}7024$$

$\widehat{A} = 134°\,37'\,6''$

$$\cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-49 + 144 + 36}{2 \cdot 12 \cdot 6} = 0{,}9097$$

$\widehat{B} = 24°\,31'\,58{,}8''$

$\widehat{C} = 180° - 24°\,31'\,58{,}8'' - 134°\,37'\,6'' = 20°\,50'\,55{,}2''$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{9}{sen\,\widehat{C}} = \frac{8}{sen\,42°\,55'} \to sen\,\widehat{C} = 0{,}7661$$

$\widehat{C} = 50°\,2''$ $\qquad \widehat{B} = 180° - 42°\,55' - 50°\,2'' = 87°\,4'\,58''$

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{b}{sen\,87°\,4'\,58''} = \frac{8}{sen\,42°\,55'} \to b = 11{,}73 \text{ cm}$$

c) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{9}{sen\,\widehat{C}} = \frac{10}{sen\,72°\,55'} \to sen\,\widehat{C} = 0{,}8603$$

$\widehat{C} = 59°\,20'\,57{,}2''$ $\qquad \widehat{B} = 180° - 59°\,20'\,57{,}2'' - 72°\,55' = 47°\,44'\,2{,}76''$

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{b}{sen\,47°\,44'\,2{,}76''} = \frac{10}{sen\,72°\,55'} \to b = 7{,}74 \text{ cm}$$

83. **Resuelve los siguientes triángulos.**

a) $a = 10$ cm, $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{B} = 70°$

b) $a = 25$ cm, $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{C} = 80°$

a) $\widehat{C} = 180° - 30° - 70° = 80°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \to b = \frac{10\,sen\,70°}{sen\,30°} = 18{,}79 \text{ cm} \qquad \frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \to c = \frac{10\,sen\,80°}{sen\,30°} = 19{,}70 \text{ cm}$$

b) $\widehat{B} = 180° - 60° - 80° = 50°$

Aplicando el teorema del seno:

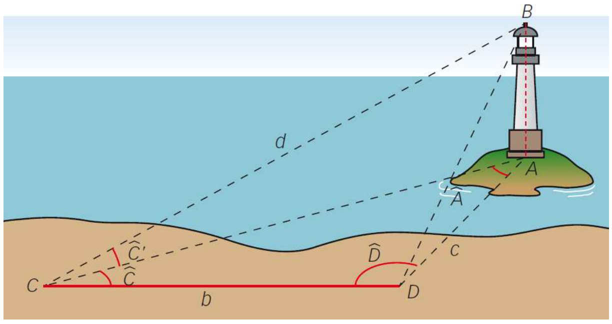
$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \to b = \frac{25\,sen\,50°}{sen\,60°} = 22{,}11 \text{ cm} \qquad \frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \to c = \frac{25\,sen\,80°}{sen\,60°} = 28{,}43 \text{ cm}$$

84. **El pedestal de una estatua mide 8 m y cuando nos separamos 15 m de su base la estatua se ve bajo un ángulo de 38°. ¿Cuál es la altura de la estatua?**

$$\frac{8 + x}{15} = tg\,38° \to 8 + x = 0{,}7813 \cdot 15 \to x = 3{,}7193 \text{ m}$$

85. **Halla la altura del faro situado en un islote con los siguientes datos.**

$\widehat{C} = 73°$ $\widehat{D} = 61°$ $\widehat{C}' = 28°$ $b = 50$ m



$\widehat{A} = 180° - 73° - 61° = 46°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{50}{sen\,\widehat{A}} = \frac{x}{sen\,\widehat{D}} \to \frac{50}{sen\,46°} = \frac{x}{sen\,61°} \to x = 60{,}79 \text{ m}$$

$h = 60{,}79 \cdot tg\,28° = 32{,}32$ m

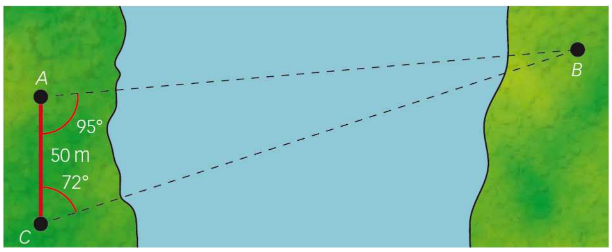
86. **En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.**

Aplicando el teorema del seno:

$$\widehat{A} = \widehat{B} \to \frac{10}{sen\,\widehat{A}} = \frac{10}{sen\,\widehat{B}} = \frac{15}{sen(180° - 2\widehat{A})} = \frac{15}{sen\,2\widehat{A}} = \frac{15}{2\,sen\,\widehat{A} \cdot cos\,\widehat{A}}$$

$$cos\,\widehat{A} = \frac{3}{4} \to \widehat{A} = \widehat{B} = 41{,}41° \to \widehat{C} = 97{,}18°$$

87. **Calcula la distancia que hay entre los puntos *A* y *B* con los datos del gráfico.**

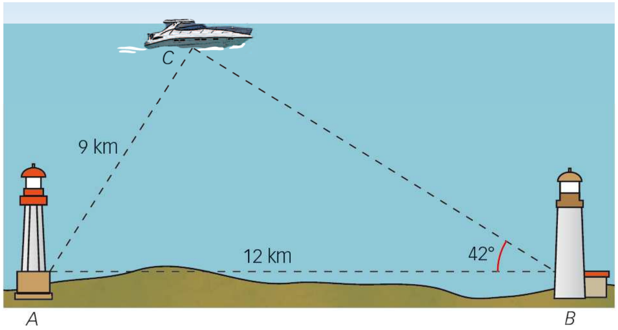


$\widehat{B} = 180° - 72° - 95° = 13°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{50}{sen\,13°} = \frac{c}{sen\,72°} \to c = 211{,}39 \text{ m}$$

88. **Un faro *A* se encuentra a 12 km al oeste de otro faro *B*. Un bote parte del faro *A* y navega 9 km en línea recta. En ese instante, desde el faro *B*, el bote observa sobre la línea que forma un ángulo de 42° con la dirección este-oeste. Determina la distancia del bote al faro *B*.**



Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{9}{sen\,42^{o}}=\frac{12}{sen\,\hat{C}}\rightarrow\hat{C}=63,15^{o}$$

$$\hat{A}=180^{o}-42^{o}-63,15^{o}=74,85^{o}$$

$$\frac{a}{sen\,74,85^{o}}=\frac{9}{sen\,42^{o}}\rightarrow a=12,98\text{ km}$$

89. **Dos cables de 10 m y 6 m sujetan una antena vertical situada sobre un pedestal formando entre sí un ángulo de 25°. Halla la altura de la antena.**

Aplicando el teorema del coseno obtenemos la distancia a la que están enganchados los cables al suelo:

$$a=\sqrt{10^2+6^2-2\cdot 10\cdot 6\cdot cos\,25^{o}}=5,22\text{ m}$$

Sea *x* la distancia que hay desde la base de la antena hasta el enganche de uno de los cables. De esta forma tenemos que la distancia de la base de la antena al otro enganche es 5,22 – *x*. Así:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Altura}=\sqrt{10^2-x^2}\\ \text{Altura}=\sqrt{6^2-(5,22-x)^2}\end{array}\right\}\rightarrow\sqrt{10^2-x^2}=\sqrt{6^2-(5,22-x)^2}\rightarrow x=8,74\text{ m}$$

Sustituimos *x* por su valor y obtenemos la altura:

$$\text{Altura}=\sqrt{10^2-8,74^2}=4,86\text{ m}$$

90. **En una pared hay dos argollas distantes 8 m entre sí. Un niño ata cada argolla a un extremo de una cuerda y se aleja de la pared hasta que la cuerda queda tensa. En ese momento, la cuerda forma ángulos de 50° y 37° con la pared.**

a) ¿Cuánto mide la cuerda?

b) ¿A qué distancia está el niño de la pared?

La altura del lado conocido divide al triángulo inicial en dos triángulos rectángulos.
Aplicamos la definición de tangente en los ángulos conocidos y formamos un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}tg\,50^{\circ}=\dfrac{h}{x}\\ tg\,37^{\circ}=\dfrac{h}{8-x}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\rightarrow h=x\cdot tg\,50^{\circ}\\ \rightarrow h=(8-x)\cdot tg\,37^{\circ}\end{array}\Bigg\}\rightarrow x=\frac{8\cdot tg\,37^{\circ}}{tg\,37^{\circ}+tg\,50^{\circ}}=3,1\text{ m}$$

$$h=3,1\cdot tg\,50^{\circ}=3,69\text{ m}$$

$$sen\ 50° = \frac{3{,}69}{BA} \rightarrow BA = \frac{3{,}69}{sen\ 50°} = 4{,}82 \text{ m}$$

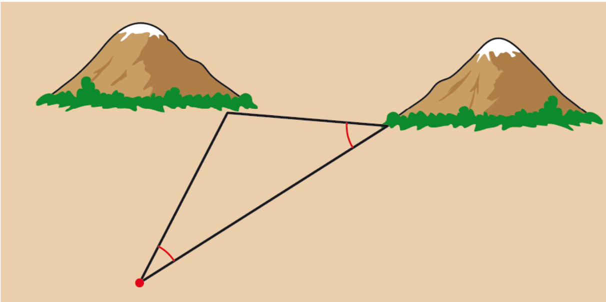
$$sen\ 37° = \frac{3{,}69}{CA} \rightarrow CA = \frac{3{,}69}{sen\ 37°} = 6{,}13 \text{ m}$$

Calculamos la longitud de la cuerda:

$8 + 4{,}82 + 6{,}13 = 18{,}95$ m

La cuerda mide 18,95 m.

91. Para hallar la distancia entre dos cerros, se tienen los datos del dibujo y se sabe que la distancia del observador al cerro *A* es 1 km. ¿Cuál es la distancia entre los dos cerros?



$$\frac{1}{sen\ 40°} = \frac{d}{sen\ 30°} \rightarrow d = 0{,}78 \text{ km}$$

92. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $sen\,(\alpha - 120°) + sen\ \alpha + sen(\alpha + 120°)$

b) $sen\,(\alpha + 30°) + cos\,(\alpha + 45°)$

c) $cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$

d) $tg\,(\alpha + \pi) - tg\,(\alpha - \pi)$

e) $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(-\alpha)$

a) $sen(\alpha - 120°) + sen\ \alpha + sen(\alpha + 120°) =$

$= sen\ \alpha \cdot cos\ 120° - sen\ 120° \cdot cos\ \alpha + sen\ \alpha + sen\ \alpha \cdot cos\ 120° + sen\ 120° \cdot cos\ \alpha = 0$

b) $sen(\alpha + 30°) + cos(\alpha + 45°) = sen\ \alpha \cdot cos\ 30° + sen\ 30° \cdot cos\ \alpha + cos\ \alpha \cdot cos\ 45° - sen\ \alpha \cdot sen\ 45° =$

$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} sen\ \alpha + \frac{\sqrt{2} + 1}{2} cos\ \alpha$

c) $cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = cos\ \alpha \cdot cos\ \frac{\pi}{2} - sen\ \alpha \cdot sen\ \frac{\pi}{2} + cos\ \alpha \cdot cos\ \frac{3\pi}{4} - sen\ \alpha \cdot sen\ \frac{3\pi}{4} =$

$= -sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{2} + 1}{2} sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha$

d) $tg(\alpha + \pi) - tg(\alpha - \pi) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \pi}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \pi} - \frac{tg\ \alpha - tg\ \pi}{1 + tg\ \alpha \cdot tg\ \pi} = 0$

e) $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(-\alpha) = cos\ \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \alpha - sen\ \frac{\pi}{2} \cdot sen\ \alpha + cos\ \alpha = -sen\ \alpha + cos\ \alpha$

93. **Simplifica estas expresiones trigonométricas.**

a) $2\,tg\,\dfrac{\alpha}{2}\,cos\,\dfrac{\alpha}{2}$

b) $2 + cos\,2\alpha - cos^2\alpha$

c) $\dfrac{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{1 - 2\,sen^2\alpha}$

d) $cos\,\alpha\,(1 + cos\,\alpha) + sen^2\alpha$

e) $2 \cdot \dfrac{tg\,\dfrac{\alpha}{2}}{cos\,\alpha}$

a) $2\,tg\,\dfrac{\alpha}{2} \cdot cos\,\dfrac{\alpha}{2} = 2 \cdot \dfrac{sen\,\dfrac{\alpha}{2}}{cos\,\dfrac{\alpha}{2}} \cdot cos\,\dfrac{\alpha}{2} = 2\,sen\,\dfrac{\alpha}{2}$

b) $2 + cos\,2\alpha - cos^2\alpha = 2 + cos^2\alpha - sen^2\alpha - cos^2\alpha = 2 - sen^2\alpha$

c) $\dfrac{2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{1 - 2\,sen^2\alpha} = \dfrac{sen\,2\alpha}{sen^2\alpha + cos^2\alpha - 2\,sen^2\alpha} = \dfrac{sen\,2\alpha}{cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \dfrac{sen\,2\alpha}{cos\,2\alpha} = tg\,2\alpha$

d) $cos\,\alpha\,(1 + cos\,\alpha) + sen^2\alpha = cos\,\alpha + cos^2\alpha + sen^2\alpha = cos\,\alpha + 1$

e) $2 \cdot \dfrac{tg\,\dfrac{\alpha}{2}}{cos\,\alpha} = 2\dfrac{\sqrt{\dfrac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}}{cos\,\alpha} = 2\dfrac{\sqrt{\dfrac{1 - cos^2\alpha}{(1 + cos\,\alpha)^2}}}{cos\,\alpha} = 2\dfrac{\sqrt{\dfrac{sen^2\alpha}{(1 + cos\,\alpha)^2}}}{cos\,\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\,sen\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}{cos\,\alpha} = 2\,tg\,\alpha(1 + cos\,\alpha)$

94. **Sabiendo que la tangente de α es 2,5 y que α es un ángulo del primer cuadrante, halla *tg*$(\alpha + 45°)$. Determina también en qué cuadrante está el ángulo $\alpha + 45°$.**

$$tg\,(\alpha + 45°) = \frac{tg\,\alpha + tg\,45°}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,45°} = \frac{2{,}5 + 1}{1 - 2{,}5} = -2{,}33$$

El ángulo está en el segundo cuadrante.

95. **De un ángulo agudo sabemos que *tg* $\alpha = \dfrac{5}{4}$. Calcula *tg* 2α.**

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2 \cdot \dfrac{5}{4}}{1 - \dfrac{25}{16}} = -\frac{40}{9}$$

96. **Halla una fórmula para calcular *sen* 3*x* en función de *sen x*. Aplícala para calcular *sen* 3*x* sabiendo que *sen x* $= \dfrac{1}{3}$.**

$$sen(2x + x) = sen\,2x \cdot cos\,x + sen\,x \cdot cos\,2x = 2\,sen\,x \cdot cos^2x + sen\,x\left(cos^2x - sen^2x\right) =$$

$$= 3\,sen\,x\,(1 - sen^2x) - sen^3x = 3\,sen\,x - 4\,sen^3x$$

Si $sen\,x = \dfrac{1}{3}$ entonces $sen\,3x = 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{23}{27}$

97. Sabemos que *sen* 56° = 0,83 y *cos* 23° = 0,92.

a) Calcula el resto de razones de esos ángulos.
b) Halla las razones trigonométricas de 79°.
c) Determina las razones de 33°.
d) ¿Podrías hallar las razones de 28°?
e) ¿Y las de 46°?

a) $0{,}83^2 + \cos^2 56° = 1 \rightarrow \cos 56° = \sqrt{1 - 0{,}83^2} = 0{,}56$

$\operatorname{tg} 56° = \dfrac{0{,}83}{0{,}56} = 1{,}48$

$\operatorname{sen}^2 23° + 0{,}92^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 23° = \sqrt{1 - 0{,}92^2} = 0{,}39$

$\operatorname{tg} 23° = \dfrac{0{,}39}{0{,}92} = 0{,}42$

b) $\operatorname{sen} 79° = \operatorname{sen}(56° + 23°) = \operatorname{sen} 56° \cdot \cos 23° + \cos 56° \cdot \operatorname{sen} 23° =$
$= 0{,}83 \cdot 0{,}92 + 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}98$

$\cos 79° = \cos(56° + 23°) = \cos 56° \cdot \cos 23° - \operatorname{sen} 56° \cdot \operatorname{sen} 23° =$
$= 0{,}56 \cdot 0{,}92 - 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}19$

$\operatorname{tg} 79° = \operatorname{tg}(56° + 23°) = \dfrac{\operatorname{tg} 56° + \operatorname{tg} 23°}{1 - \operatorname{tg} 56° \cdot \operatorname{tg} 23°} = \dfrac{1{,}48 + 0{,}42}{1 - 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 5{,}02$

c) $\operatorname{sen} 33° = \operatorname{sen}(56° - 23°) = \operatorname{sen} 56° \cdot \cos 23° - \cos 56° \cdot \operatorname{sen} 23° =$
$= 0{,}83 \cdot 0{,}92 - 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}55$

$\cos 33° = \cos(56° - 23°) = \cos 56° \cdot \cos 23° + \operatorname{sen} 56° \cdot \operatorname{sen} 23° =$
$= 0{,}56 \cdot 0{,}92 + 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}84$

$\operatorname{tg} 33° = \operatorname{tg}(56° - 23°) = \dfrac{\operatorname{tg} 56° - \operatorname{tg} 23°}{1 + \operatorname{tg} 56° \cdot \operatorname{tg} 23°} = \dfrac{1{,}48 - 0{,}42}{1 + 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 0{,}65$

d) $\operatorname{sen} 28° = \operatorname{sen} \dfrac{56°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 56°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}56}{2}} = 0{,}47$

$\cos 28° = \cos \dfrac{56°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 56°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}56}{2}} = 0{,}88$

$\operatorname{tg} 28° = \operatorname{tg} \dfrac{56°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 56°}{1 + \cos 56°}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}56}{1 + 0{,}56}} = 0{,}53$

e) $\operatorname{sen} 46° = \operatorname{sen}(2 \cdot 23°) = 2 \cdot \operatorname{sen} 23° \cdot \cos 23° = 2 \cdot 0{,}39 \cdot 0{,}92 = 0{,}72$

$\cos 46° = \cos(2 \cdot 23°) = \cos^2 23° - \operatorname{sen}^2 23° = 0{,}92^2 - 0{,}39^2 = 0{,}69$

$\operatorname{tg} 46° = \operatorname{tg}(2 \cdot 23°) = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} 23°}{1 - \operatorname{tg}^2 23°} = \dfrac{2 \cdot 0{,}42}{1 - 0{,}42^2} = 1{,}02$

98. Obtén una fórmula simplificada de:

a) $\operatorname{sen}(30° + \widehat{A})$
b) $\cos(\widehat{B} - 60°)$
c) $\operatorname{tg}(45° - \widehat{C})$
d) $\cos(\widehat{D} + 30°)$

a) $\operatorname{sen}(30° + \widehat{A}) = \operatorname{sen} 30° \cdot \cos \widehat{A} + \cos 30° \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} = \dfrac{1}{2} \cos \widehat{A} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \widehat{A} =$
$= \dfrac{1}{2}(\cos \widehat{A} + \sqrt{3}\ \operatorname{sen} \widehat{A})$

b) $\cos(\widehat{B} - 60°) = \cos \widehat{B} \cdot \cos 60° + \operatorname{sen} \widehat{B} \cdot \operatorname{sen} 60° = \dfrac{1}{2} \cos \widehat{B} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \widehat{B} =$
$= \dfrac{1}{2}(\cos \widehat{B} + \sqrt{3}\ \operatorname{sen} \widehat{B})$

c) $tg\,(45° - \widehat{C}) = \dfrac{1 - tg\,\widehat{C}}{1 + tg\,\widehat{C}}$

d) $cos\,(\widehat{D} + 30°) = cos\,\widehat{D} \cdot cos\,30° - sen\,\widehat{D} \cdot sen\,30° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,cos\,\widehat{D} - \frac{1}{2}\,sen\,\widehat{D} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\;cos\,\widehat{D} - sen\,\widehat{D})$$

99. **Sabiendo que *sen x* $= \dfrac{2}{5}$ y que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, sin hallar previamente el valor de *x*, calcula.**

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Expresa los resultados utilizando radicales.

b) Explica cómo determinarías las razones de $\dfrac{\pi}{4}$ rad y $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

Hallamos las razones trigonométricas de x:

$$cos\;x = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \qquad tg\;x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

a) y b) Las razones trigonométricas de $\dfrac{\pi}{4}$ rad, 45° y $\dfrac{\pi}{3}$ rad, 60° son conocidas.

$$sen\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad cos\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sen\,x \cdot cos\,\frac{\pi}{4} + cos\,x \cdot sen\,\frac{\pi}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{42}}{10}$$

$$tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{tg\;x - tg\,\dfrac{\pi}{3}}{1 + tg\;x \cdot tg\,\dfrac{\pi}{3}} = -\frac{8\sqrt{21} + 25\sqrt{3}}{9}$$

100. **Se sabe que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ y *tg x* $= \dfrac{3}{4}$.**

a) Halla *sen x* y *cos x*.

b) Determina, utilizando radicales, las razones de los ángulos $\dfrac{\pi}{6}$ y $\dfrac{\pi}{4}$.

c) Sin determinar el ángulo *x*, calcula.

$$cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

d) Sin determinar el ángulo *x*, decide razonadamente en qué cuadrante están estos ángulos.

$$x - \frac{\pi}{4} \qquad x + \frac{\pi}{6}$$

a) $cos\,x = \sqrt{\dfrac{1}{1 + 0{,}75^2}} = -0{,}8 \qquad sen^2\,x + 0{,}8^2 = 1 \rightarrow sen\,x = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = -0{,}6$

b) $sen\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \quad cos\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad tg\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$sen\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad cos\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad tg\,\dfrac{\pi}{4} = 1$

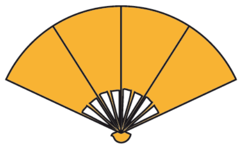
c) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-0{,}8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0{,}6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-0{,}7\sqrt{2}$

$$tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{tg\,x+tg\,\frac{\pi}{6}}{1-tg\,x\cdot tg\,\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$$

d) Como el seno del ángulo $x-\frac{\pi}{4}$ es positivo, el ángulo está en el 2.º cuadrante.

Y como la tangente del ángulo $x+\frac{\pi}{6}$ es positiva, el ángulo está en el 3.^{er} cuadrante.

101. El ángulo que forma un abanico es 170°. Si el abanico tiene tres nervios centrales, calcula las razones trigonométricas de los ángulos que se forman al desplegarlo nervio a nervio sabiendo que *cos* 170° = −0,98 y que *sen* 170° = 0,17.



Los ángulos que se forman son de 42,5º, 85º, 127,5º y 170º.

$x=170^{\circ}$

$\operatorname{sen} 85^{\circ}=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=0{,}99$ $\qquad$ $\cos 85^{\circ}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=0{,}1$

$\operatorname{sen} 42{,}5^{\circ}=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}}=0{,}67$ $\qquad$ $\cos 42{,}5^{\circ}=\cos\left(\frac{x}{4}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}}=0{,}74$

$\operatorname{sen} 127{,}5^{\circ}=\operatorname{sen}(42{,}5^{\circ}+85^{\circ})=\operatorname{sen} 42{,}5^{\circ}\cos 85^{\circ}+\operatorname{sen} 85^{\circ}\cos 42{,}5^{\circ}=0{,}79$

$\cos 127{,}5^{\circ}=\cos(42{,}5^{\circ}+85^{\circ})=\cos 42{,}5^{\circ}\cos 85^{\circ}-\operatorname{sen} 42{,}5^{\circ}\operatorname{sen} 85^{\circ}=-0{,}59$

102. Calcula *cos* 285° a partir de las razones de los ángulos de 330° y de 45°.

$\cos 285^{\circ}=\cos(330^{\circ}-45^{\circ})=\cos 330^{\circ}\cos 45^{\circ}+\operatorname{sen} 330^{\circ}\operatorname{sen} 45^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}2588$

103. Sabiendo que las razones de 32° son:

***sen* 32° = 0,53** $\qquad$ ***cos* 32° = 0,848**

a) Calcula las razones trigonométricas de 62°.

b) Halla las razones de 31°.

c) ¿Puedes calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo cuya medida en grados no tenga minutos ni segundos?

a) $\operatorname{sen} 62^{\circ}=\operatorname{sen}(32^{\circ}+30^{\circ})=\operatorname{sen} 32^{\circ}\cdot\cos 30^{\circ}+\cos 32^{\circ}\cdot\operatorname{sen} 30^{\circ}=$

$=0{,}53\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0{,}848\cdot\frac{1}{2}=0{,}88$

$\cos 62^{\circ}=\cos(32^{\circ}+30^{\circ})=\cos 32^{\circ}\cdot\cos 30^{\circ}-\operatorname{sen} 32^{\circ}\cdot\operatorname{sen} 30^{\circ}=$

$=0{,}848\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-0{,}53\cdot\frac{1}{2}=0{,}46$

$tg\,62^{\circ}=\frac{0{,}88}{0{,}46}=1{,}91$

b) $sen\ 31° = sen\ \frac{62°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 62°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}46}{2}} = 0{,}52$

$cos\ 31° = cos\ \frac{62°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 62°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}46}{2}} = 0{,}85$

$tg\ 31° = \frac{0{,}52}{0{,}85} = 0{,}61$

c) Sí podemos calcular las razones de cualquier ángulo, ya que a partir de las medidas de 32° y de 31° hallamos las medidas de 1°, y a partir de ellas, las demás.

104. Escribe las expresiones que aparecen a continuación en forma de producto.

a) $cos\ 2\alpha - cos\ \alpha$
b) $cos\ \alpha - cos\ 4\alpha$
c) $sen\ 8\alpha - sen\ 2\alpha$
d) $sen\ \alpha - cos\ \alpha$
e) $cos\ \alpha + sen\ 3\alpha$
f) $sen\ \alpha - sen\ 3\alpha$

a) $cos\ 2\alpha - cos\ \alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha - cos\ \alpha = cos\ \alpha(cos\ \alpha - 1) - (1 - cos^2\alpha) =$

$= cos\ \alpha(cos\alpha - 1) - (1 - cos\ \alpha)(1 + cos\ \alpha) = (cos\ \alpha - 1) \cdot (2\ cos\ \alpha + 1)$

b) $cos\ \alpha - cos\ 4\alpha = cos\ \alpha - cos(3\alpha + \alpha) = cos\ \alpha + tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha \cdot sen\ 3\alpha - cos\ \alpha \cdot cos\ 3\alpha =$

$= cos\ \alpha(1 + tg\ \alpha \cdot sen\ 3\alpha - cos\ 3\alpha)$

c) $sen\ 8\alpha - sen\ 2\alpha = sen(2\alpha + 6\alpha) - sen\ 2\alpha = sen\ 2\alpha \cdot cos\ 6\alpha + sen\ 6\alpha \cdot cos\ 2\alpha - sen\ 2\alpha =$

$= sen\ 2\alpha \cdot cos\ 6\alpha + (sen\ 2\alpha \cdot cos\ 4\alpha + 2\ sen\ 2\alpha \cdot cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\alpha)\ cos\ 2\alpha - sen\ 2\alpha =$

$= sen\ 2\alpha(cos\ 6\alpha + cos\ 4\alpha \cdot cos\ 2\alpha + 2\ cos^3 2\alpha - 1)$

d) $sen\ \alpha - cos\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha - cos\ \alpha = cos\ \alpha(tg\ \alpha - 1)$

e) $cos\ \alpha + sen\ 3\alpha = cos\ \alpha + sen(\alpha + 2\alpha) = cos\ \alpha + sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + cos\ \alpha \cdot sen\ 2\alpha =$

$= cos\ \alpha + cos\ \alpha \cdot tg\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + cos\ \alpha \cdot sen\ 2\alpha = cos\ \alpha(1 + tg\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha + sen\ 2\alpha)$

f) $sen\ \alpha - sen\ 3\alpha = sen\ \alpha - sen(2\alpha + \alpha) = sen\ \alpha - sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha =$

$= sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha \cdot cos^2\alpha - sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha = sen\ \alpha(1 - 2\ cos^2\alpha - cos\ 2\alpha)$

105. Simplifica y escribe la expresión con una sola razón trigonométrica.

a) $\frac{sen\ \alpha - sen^3\ \alpha}{cos^4\ \alpha + cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha}$

b) $cos^2\ 5\alpha - sen^2\ 5\alpha$

c) $sec\ \alpha\ (sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha) - sen\ \alpha$

d) $sen^4\ \alpha - cos^4\ \alpha + cos^2\ \alpha$

a) $\frac{sen\ \alpha - sen^3\alpha}{cos^4\alpha + cos^2\alpha\ sen^2\alpha} = \frac{sen\ \alpha(1 - sen^2\alpha)}{(1 - sen^2\alpha)^2 + (1 - sen^2\alpha)sen^2\alpha} = \frac{sen\ \alpha(1 - sen^2\alpha)}{1 - sen^2\alpha} = sen\ \alpha$

b) $cos^2 5\alpha - sen^2 5\alpha = cos\ 10\alpha$

c) $sec\ \alpha(sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha + cos^2\alpha) - sen\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}(cos\ \alpha(sen\ \alpha + cos\ \alpha)) - sen\ \alpha = cos\ \alpha$

d) $sen^4\alpha - cos^4\alpha + cos^2\alpha = sen^2\alpha(1 - cos^2\alpha) - cos^2\alpha(1 - sen^2\alpha) + cos^2\alpha = sen^2\alpha$

106. **Demuestra que se verifican las igualdades que aparecen a continuación.**

a) $1 + sen\,2\alpha = 2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha - 45°)$

b) $cos\,2\alpha = 2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha + 45°)$

c) $sen\,2\alpha = -2\,tg\,(\alpha + \pi)[sen^2\,(\alpha + \pi) - 1]$

d) $cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = sen\left(\dfrac{\alpha + \pi}{2}\right)$

a) $2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha - 45°) =$

$= 2\,(sen\,\alpha \cdot cos\,45° + cos\,\alpha \cdot sen\,45°)(cos\,\alpha \cdot cos\,45° + sen\,\alpha \cdot sen\,45°) =$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2}\right) =$

$= 2\left(\dfrac{2 \cdot cos^2\,\alpha}{4} + \dfrac{4\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{4} + \dfrac{2 \cdot sen^2\,\alpha}{4}\right) =$

$= cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha + 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha = 1 + sen\,2\alpha$

b) $2\,sen\,(\alpha + 45°)\,cos\,(\alpha + 45°) =$

$= 2\,(sen\,\alpha \cdot cos\,45° + cos\,\alpha \cdot sen\,45°)(cos\,\alpha \cdot cos\,45° - sen\,\alpha \cdot sen\,45°) =$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2} + \dfrac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2} \cdot cos\,\alpha}{2} - \dfrac{\sqrt{2} \cdot sen\,\alpha}{2}\right) =$

$= 2\left(\dfrac{2 \cdot cos^2\,\alpha}{4} - \dfrac{2 \cdot sen^2\,\alpha}{4}\right) = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha = cos\,2\alpha$

c) $-2tg(\alpha + \pi)\left[sen^2(\alpha + \pi) - 1\right] = \dfrac{-(-2sen\alpha)}{-cos\alpha}\left[sen^2\alpha - 1\right] = -\dfrac{2sen\alpha(-cos^2\alpha)}{cos\alpha} = 2sen\alpha \cdot cos\alpha = sen2\alpha$

d) $sen\left(\dfrac{\alpha + \pi}{2}\right) = \dfrac{sen(\alpha + \pi)}{2cos\left(\dfrac{\alpha + \pi}{2}\right)} = \dfrac{-sen\,\alpha}{2\sqrt{\dfrac{1 + cos\,\alpha}{2}}} = \sqrt{\dfrac{cos^2\alpha - 1}{\dfrac{4(1 + cos\,\alpha)}{2}}} = \sqrt{\dfrac{(1 + cos\,\alpha)(1 - cos\,\alpha)}{2(1 + cos\,\alpha)}} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\,\alpha}{2}} = cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

107. **Demuestra que es cierta la siguiente igualdad.**

$$\boldsymbol{sen\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}}$$

$sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha = \dfrac{2\,sen\,\alpha \cdot cos^2\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{\dfrac{1}{cos^2\,\alpha}} = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$

108. **Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.**

a) $\dfrac{sen\,2\alpha}{sen\,\alpha} - \dfrac{cos\,2\alpha}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha$

b) $tg\,\alpha + cotg\,\alpha = sec\,\alpha \cdot cosec\,\alpha$

c) $\dfrac{1}{1 - sen\,\alpha} + \dfrac{1}{1 + sen\,\alpha} = 2\,sec^2\alpha$

d) $cos\,\alpha + tg\,\alpha \cdot sen\,\alpha = sec\,\alpha$

a) $\dfrac{2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha} - \dfrac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{2\,sen\,\alpha \cdot cos^2\alpha - sen\,\alpha \cdot (cos^2\alpha - sen^2\alpha)}{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha} = \dfrac{sen^2\alpha + cos^2\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha$

b) $\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \dfrac{sen^2\alpha + cos^2\alpha}{cos\,\alpha \cdot sen\,\alpha} = \dfrac{1}{cos\,\alpha} \cdot \dfrac{1}{sen\,\alpha} = sec\,\alpha \cdot cosec\,\alpha$

c) $\dfrac{1 + sen\,\alpha + 1 - sen\,\alpha}{1 - sen^2\alpha} = \dfrac{2}{cos^2\alpha} = 2\,sec^2\alpha$

d) $cos\,\alpha + \dfrac{sen^2\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{cos^2\alpha + sen^2\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha$

109. **Comprueba, sustituyendo α por un ángulo conocido, que la siguiente igualdad es cierta.**

$$\frac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = cos\,\alpha - sen\,\alpha\,tg\,\alpha$$

Demuestra que esta propiedad se cumple para cualquier ángulo α.

Elegimos el ángulo de 30º:

$$\frac{2\,sen\,30°}{tg\,2\cdot 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad cos\,30° - sen\,30°\cdot tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Demostramos para cualquier ángulo:

$$\frac{2\,sen\,\alpha}{tg\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha}{\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}} = \frac{sen\,\alpha\cdot(1-tg^2\alpha)}{tg\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{tg\,\alpha} - \frac{sen\,\alpha\cdot tg^2\alpha}{tg\,\alpha} = cos\,\alpha - sen\,\alpha\cdot tg\,\alpha$$

110. **Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones.**

a) $cos\,x\,tg\,x = \frac{1}{2}$

b) $cos\,2x + sen\,2x = 1$

c) $cos\,2x - sen\,2x = 0$

d) $sen\,2x + cos\,x = 1$

e) $sen\,x\,cotg\,x = -\frac{1}{4}$

f) $sen\,2x + sen\,2x = 0$

g) $tg\,x + sen\,x = 0$

h) $tg\,x - sen\,2x = 0$

a) $cos\,x\,tg\,x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\,x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°\cdot k \\ x_2 = 150° + 360°\cdot k \end{cases}$

b) $cos\,2x + sen\,2x = 1 \rightarrow cos^2 x - sen^2 x + 2\,sen\,x\cdot cos\,x = cos^2 x + sen^2 x$

$\rightarrow -2\,sen^2 x + 2\,sen\,x\cdot cos\,x = 0 \rightarrow 2\,sen\,x\,(-sen\,x + cos\,x) = 0$

$sen\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°\cdot k \\ x_2 = 180° + 360°\cdot k \end{cases}$

$sen\,x = cos\,x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360°\cdot k \\ x_2 = 225° + 360°\cdot k \end{cases}$

c) $cos\,2x - sen\,2x = 0 \rightarrow cos\,2x = sen\,2x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5° + 180°\cdot k \\ x_2 = 112{,}5° + 180°\cdot k \end{cases}$

d) $sen\,2x + cos\,x = (2\,sen\,x + 1)\,cos\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360°\cdot k & x_3 = 210° + k\cdot 360° \\ x_2 = 270° + 360°\cdot k & x_4 = 330° + k\cdot 360° \end{cases}$

e) $sen\,x\cdot cotg\,x = -\frac{1}{4} \rightarrow cos\,x = -\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 104{,}48° + 360°\cdot k \\ x_2 = 255{,}52° + 360°\cdot k \end{cases}$

f) $sen\,2x + sen\,2x = 0 \rightarrow 2\,sen\,2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 180°\cdot k \\ x_2 = 90° + 180°\cdot k \end{cases}$

g) $tg\,x + sen\,x = 0 \rightarrow sen\,x\left(\dfrac{1}{cos\,x} + 1\right) = 0$

$sen\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°\cdot k \\ x_2 = 180° + 360°\cdot k \end{cases}$

$\dfrac{1}{cos\,x} + 1 = 0 \rightarrow x_3 = 180° + 360°\cdot k$

h) $tg\,x - sen\,2x = 0 \rightarrow \dfrac{sen\,x}{cos\,x} - 2\,sen\,x\cdot cos\,x = 0 \rightarrow sen\,x(1 - 2\,cos^2 x) = 0$

$sen\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°\cdot k \\ x_2 = 180° + 360°\cdot k \end{cases}$

$1 - 2\,cos^2 x = 0 \rightarrow cos\,x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \rightarrow x_3 = 45° + 360°\cdot k$

111. **Resuelva las ecuaciones trigonométricas que aparecen a continuación.**

a) $\dfrac{sen\,(60° - x)}{cos\,x} = 1$

b) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\,x - 1 = 0$

c) $sen\,(x + 30°) + cos\,(x + 60°) = 1 + cos\,2x$

a) $\dfrac{sen\,(60° - x)}{cos\,x} = 1 \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\,cos\,x - sen\,x}{2\,cos\,x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - tg\,x = 2$

$\rightarrow tg\,x = -0{,}2679 \rightarrow x = 345° + 360° \cdot k$

b) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\,x - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x} + tg\,x - 1 = 0$

$\rightarrow tg^2\,x - tg\,x = 0 \rightarrow tg\,x(tg\,x - 1) = 0$

$tg\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$tg\,x - 1 = 0 \rightarrow tg\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $sen\,(x + 30°) + cos\,(x + 60°) = 1 + cos\,2x$

$\rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\,sen\,x}{2} + \dfrac{cos\,x}{2} + \dfrac{cos\,x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,sen\,x}{2} =$

$= cos^2\,x + sen^2\,x + cos^2\,x - sen^2\,x \rightarrow cos\,x = 2\,cos^2\,x \rightarrow cos\,x(2\,cos\,x - 1) = 0$

$cos\,x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k \end{cases}$

$2\,cos\,x - 1 = 0 \rightarrow cos\,x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60° + 360° \cdot k \\ x_2 = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

112. **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.**

a) $tg(x + 45°) + tg(x - 45°) = 2\,cotg\,x$

b) $4\,sen\,2(x + 30°) = 1$

c) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - 1 = 0$

d) $sen(x + 30°) - cos\,x = 0$

a) $tg(x + 45°) + tg(x - 45°) = 2\,cotg\,x \rightarrow \dfrac{tg\,x + tg\,45°}{1 - tg\,x\,tg\,45°} + \dfrac{tg\,x - tg\,45°}{1 + tg\,x\,tg\,45°} = \dfrac{2}{tg\,x} \rightarrow$

$(tg\,x + 1)^2\,tg\,x + (tg\,x - 1)(tg\,x + 1)tg\,x = 2\left(1 - tg^2 x\right) \rightarrow 6\,tg^2 x = 2 \rightarrow tg\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30° + 180° \cdot k,\ 150° + 180° \cdot k$

b) $sen(2x + 60°) = 0{,}25 \rightarrow \begin{cases} 2x + 60° = 14{,}48° \rightarrow x = -22{,}76° + 180°k \\ 2x + 60° = 165{,}52° \rightarrow x = 52{,}76° + 180°k \end{cases}$

c) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,x}{1 + tg\,\frac{\pi}{4}\,tg\,x} = 1 \rightarrow \dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x} = 1 \rightarrow tg\,x = 0 \rightarrow x = 0° + 180°k$

d) $sen(x+30°)-cos\ x=0 \rightarrow sen\ x\cdot cos\ 30°+sen\ 30°\cdot cos\ x-cos\ x=0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}sen\ x+\frac{1}{2}cos\ x=cos\ x \rightarrow \sqrt{3}\ sen\ x=cos\ x \rightarrow \left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-cos^2 x}\right)^2=(cos\ x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 3-3\,cos^2 x=cos^2 x \rightarrow 3=4\,cos^2 x \rightarrow cos\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} cos\ x=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 30°+360°k,\ 330°+360°k \\ cos\ x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 150°+360°k,\ 210°+360°k \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, se observa que solo son válidas:

$x=30°+360°k$ $\qquad$ $x=210°+360°k$

113. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones trigonométricas.**

a) $\left.\begin{array}{r} sen^2 x+sen^2 y=1 \\ cos^2 x-cos^2 y=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ cos\ x=\frac{1}{2\,cos\ y}+sen\ x\cdot tg\ y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} sen^2\ x+sen^2\ y=1 \\ cos^2\ x-cos^2\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} sen^2\ x=1-sen^2\ y=cos^2\ y \\ cos^2\ x-sen^2\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

$cos\ 2x=\frac{1}{2} \rightarrow x=30°+180°\cdot k$

$cos^2 y=sen^2\ 30° \rightarrow cos\ y=\sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow y=60°+180°\cdot k$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ cos\ x=\frac{1}{2\ cos\ y}+sen\ x\cdot tg\ y \end{array}\right\} \xrightarrow{x=120°-y} cos\ (120°-y)=$

$=\frac{1}{2\ cos\ y}+sen\ (120°-y)\ tg\ y$

$-cos^2 y+\sqrt{3}\ sen\ y\cdot cos\ y=1+\sqrt{3}\ sen\ y\cdot cos\ y-sen^2 y$

$\rightarrow cos^2 y-sen^2 y=1 \rightarrow cos\ 2y=-1 \rightarrow y=90°+180°\cdot k$

$x=120°-y=120°-90°-180°\cdot k=30°-180°\cdot k$

114. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones trigonométricas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=60° \\ cos\ x=sen\ y \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} y-x=30° \\ tg\ y=tg\,(y-3x) \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} sen\ x+2\ cos\ y=2 \\ 3\ sen\ x-4\ cos\ y=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 4\ sen\ x+cos^2 y=2 \\ 2\ sen\ x+cos\ y=1 \end{array}\right\}$

a) $x=60°-y \rightarrow cos(60°-y)=sen\ y \rightarrow cos\ 60°\ cos\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}sen\ y=sen\ y$

$\frac{1}{2}cos\ y=\frac{2-\sqrt{3}}{2}sen\ y \rightarrow \frac{1}{2-\sqrt{3}}=tg\ y \rightarrow y=75°+360°k,\ x=-15°+360°k$

b) $y=30°+x \rightarrow tg(30°+x)=tg(30°-2x) \rightarrow \frac{tg\ 30°+tg\ x}{1-tg\ 30°\cdot tg\ x}=\frac{tg\ 30°-tg\ 2x}{1+tg\ 30°\cdot tg\ 2x}$

$tg\ 30°+tg^2 30°\cdot tg\ 2x+tg\ x+tg\ 30°\cdot tg\ 2x\cdot tg\ x=tg\ 30°-tg^2 30°\cdot tg\ x-tg\ 2x+tg\ 30°\cdot tg\ 2x\cdot tg\ x$

$\frac{4}{3}tg\ 2x+\frac{4}{3}tg\ x=0 \rightarrow \frac{2\ tg\ x}{1-tg^2 x}+tg\ x=0 \rightarrow tg\ x\left(3-tg^2 x\right)=0$

$x=180°k,\ y=180°k+30°$ $\qquad$ $x=60°+180°k,\ y=90°+180°k$ $\qquad$ $x=120°+180°k,\ y=150°+180°k$

c) $$\begin{array}{rl} & 2\,sen\,x + 4\cos y = 4 \\ + & 3\,sen\,x - 4\cos y = 1 \\ \hline & 5\,sen\,x = 5 \end{array}$$

$$5\,sen\,x = 5 \rightarrow sen\,x = 1 \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \rightarrow x = 90° + 360°k,\ y = 60° + 360°k$$

d) $$\begin{array}{rl} & 4\,sen\,x + \cos^2 x = 2 \\ - & 4\,sen\,x + 2\cos y = 2 \\ \hline & \cos^2 y - 2\cos y = 0 \end{array}$$

$$\cos^2 y - 2\cos y = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \rightarrow sen\,x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 180°k,\ x = 30° + 360°k \\ \cos y = 2 \rightarrow \text{Sin solución.} \end{cases}$$

115. **Resuelve las ecuaciones trigonométricas.**

a) $4\,sen\,x - sec\,x = 0$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{2\cos x + sen\,x} = sen\,x$

c) $\dfrac{1}{\cos x + sen\,x} + 2\,sen\,x = 2\cos x$

d) $sen\,x\,(sen\,x - 1) = 5\cos^2 x - 4$

e) $2\cos x - 1 = sec\,x$

f) $2\cos x + sen\,x = 1$

g) $sen\,x + \cos x = 0$

a) $4\,sen\,x - sec\,x = 0 \rightarrow 4\,sen\,x \cdot \cos x - 1 = 0 \rightarrow 2\,sen\,2x = 1 \rightarrow sen\,2x = \dfrac{1}{2}$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 15° + 180° \cdot k \\ x_2 = 75° + 180° \cdot k \end{cases}$$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{2\cos x + sen\,x} = sen\,x \rightarrow \cos^2 x = 2\cos x \cdot sen\,x + sen^2 x \rightarrow \cos 2x = sen\,2x$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5° + 180° \cdot k \\ x_2 = 112{,}5° + 180° \cdot k \end{cases}$$

c) $\dfrac{1}{\cos x + sen\,x} + 2\,sen\,x = 2\cos x \rightarrow \dfrac{2\,sen\,x \cdot \cos x + 2\,sen^2 x}{2\cos^2 x + 2\,sen\,x \cdot \cos x} = 1$

$$\rightarrow \frac{sen\,x(\cos x + sen\,x)}{\cos x(\cos x + sen\,x)} = 1 \rightarrow tg\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$$

d) $sen\,x\,(sen\,x - 1) = 5\cos^2 x - 4 \rightarrow sen^2 x - sen\,x = 5(1 - sen^2 x) - 4$

$6\,sen^2 x - sen\,x - 1 = 0$

$$\rightarrow sen\,x = -\frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 340°\ 31'\ 44'' + 360° \cdot k \\ x_2 = 199°\ 28'\ 16'' + 360° \cdot k \end{cases}$$

$$\rightarrow sen\,x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$$

e) $2\cos x - 1 = sec\,x \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$$\rightarrow \cos x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$$

$$\rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 120° + 360° \cdot k \\ x_2 = 240° + 360° \cdot k \end{cases}$$

f) $2\cos x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - 2\cos x \rightarrow 5\cos^2 x - 4\cos x = 0$

$$\rightarrow \cos x(5\cos x - 4) = 0 \rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' + 360° \cdot k \\ x_2 = 323°\ 7'\ 48{,}4'' + 360° \cdot k \end{cases}$$

g) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135° + 360° \cdot k \\ x_2 = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$

116. **¿Cuál es el ángulo agudo tal que el triple de su tangente es igual al doble de su coseno?**

$$3\,tg\ x = 2\cos x \rightarrow 3\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2\cos x \rightarrow 3\operatorname{sen} x = 2\cos^2 x \rightarrow 3\operatorname{sen} x = 2(1-\operatorname{sen}^2 x)$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} -2 \rightarrow \text{No puede ser.} \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

El ángulo agudo es $x = 30°$.

117. **¿Cuál es el ángulo obtuso tal que su seno sumado con el triple de su coseno da -1?**

$$\operatorname{sen} x + 3\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = -1 \rightarrow -3\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = (1+\operatorname{sen} x)$$

$$9(1-\operatorname{sen}^2 x) = 1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x \rightarrow 5\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 4 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \begin{cases} -1 \rightarrow x = 270° \\ \dfrac{4}{5} \rightarrow x = 126{,}87° \end{cases}$$

118. **¿Cuál es el ángulo agudo tal que su seno multiplicado por su coseno da $\frac{1}{4}$?**

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 30° \rightarrow x = 15° \\ 2x = 150° \rightarrow x = 75° \end{cases}$$

119. **Sabiendo que el área de un triángulo rectángulo es 28 cm² y que uno de sus ángulos mide 60°:**

a) ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

b) Calcula la longitud de sus lados y su perímetro.

a) El ángulo desconocido mide: $90° - 60° = 30°$

b) Tomamos como base y altura los catetos del triángulo rectángulo:

$$28 = \frac{b \cdot a}{2} \rightarrow b = \frac{56}{a}$$

$$tg\ 30° = \frac{\frac{56}{a}}{a} \rightarrow a = \sqrt{\frac{56}{tg\ 30°}} = 9{,}85 \text{ cm}$$

$b = 5{,}68$ cm

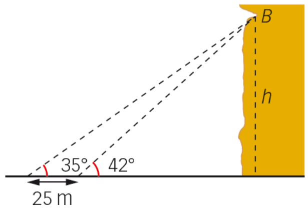
Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$c = \sqrt{9{,}85^2 + 5{,}68^2} = 11{,}37$ cm

Los lados miden 11,37; 5,68 y 9,85 cm.

El perímetro es 26,9 cm.

120. **Observa la situación y, con ayuda de la trigonometría, calcula la altura, *h*, a la que está el punto *B*.**

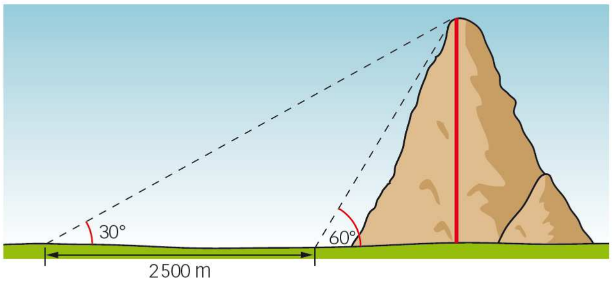


Llamamos *h* a la altura a la que está *B*.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h}{25 + x} \\ tg\ 42° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}11h} h = 17{,}51 + 0{,}63h \rightarrow h = 47{,}38 \text{ m}$$

El punto *B* está a una altura de 47,38 m.

121. **Determina la altura de la montaña de la figura a partir de los datos que se proporcionan.**



$180° - 60° = 120°$ $\qquad$ $180° - 120° - 30° = 30°$

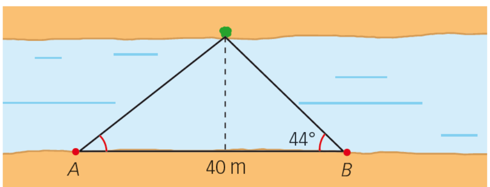
Los ángulos del primer triángulo miden 30°, 120°, 30°.Por el teorema del seno:

$$\frac{2500}{sen\ 30°} = \frac{a}{sen\ 30°} \rightarrow a = 2500 \text{ m}$$

Se resuelve el triángulo rectángulo sabiendo que un ángulo mide 60° y su hipotenusa mide 2500 m.

$$\frac{h}{2500} = sen\ 60° \rightarrow h = 2\,165{,}06 \text{ m}$$

122. **Dos amigos están separados por una distancia de 40 m y ven un árbol en la orilla opuesta de un río, como indica la figura. Calcula la anchura del río.**

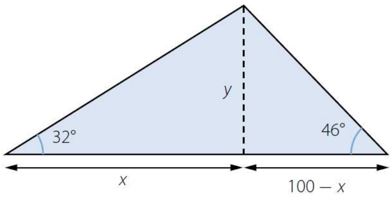


Llamamos *h* a la anchura del río.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 38° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 44° = \dfrac{h}{40 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}28h} 38{,}63 - 1{,}24h = h \rightarrow h = 17{,}25 \text{ m}$$

La anchura del río es 17,25 m.

123. **Dos focos, situados en el suelo y en lados distintos, iluminan el campanario de una iglesia. La suma de las distancias de los focos hasta el pie de la torre es de 100 m. Si los ángulos que forman los haces de luz con el suelo son de 32° y 46°, respectivamente, ¿qué altura tiene el campanario?**



Llamamos *y* a la altura del campanario.

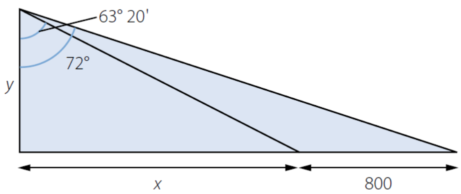
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 32° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 46° = \dfrac{y}{100 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1,64} 103,55 - 1,66y = y \rightarrow y = 38,93 \text{ m}$$

La altura del campanario es 38,93 m.

124. **En una colina se ven, en línea recta hacia el este, dos barrios que están separados por 800 m. Desde la cima se observan con ángulos de 18° y 26° 40′, respectivamente.**

a) ¿Cuál es la altura de la colina?

b) ¿A qué distancia se encuentra cada barrio del observador?



a) Llamamos *y* a la altura de la colina.

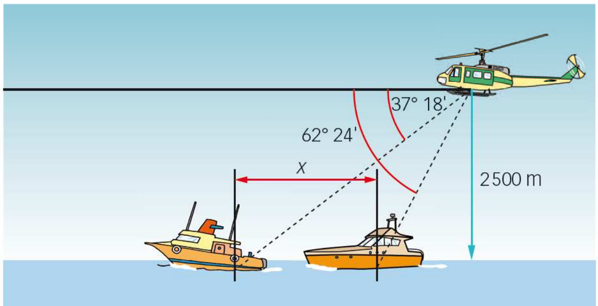
$90° - 18° = 72°$ $\qquad$ $90° - 26° 40' = 63° 20'$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 72° = \dfrac{x + 800}{y} \\ tg\ 63°\ 20' = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1,99y} 3,08y = 1,99y + 800 \rightarrow y = 735,94 \text{ m}$$

b) $x = 199y = 1\,504,42$ m $\qquad$ $800 + x = 2\,304,42$ m

La distancia del observador a cada barrio es 1 674,78 m y 2 419,18 m, respectivamente.

125. **El piloto de un helicóptero de reconocimiento que vuela sobre el mar a una altura de 2 500 m, divisa dos embarcaciones que se encuentran en un mismo plano vertical, con ángulos de depresión de 62° 24' y 37° 18', respectivamente. Calcula la distancia que separa una embarcación de otra.**



$$a = \frac{2500}{sen(37°18')} = 4125{,}49 \text{ m}$$

Se calculan los ángulos del dibujo:

$62° \, 24' - 37° \, 18' = 25° \, 6'$

$90° - 62° \, 24' = 27° \, 36'$

$180° - 90° - 27° \, 36' = 62° \, 24'$

$180° - 62° \, 24' = 117° \, 36'$

$180° - 117° \, 36' - 25° \, 6' = 37° \, 18'$

Por el teorema del seno:

$$\frac{4125{,}49}{sen\ 117° \, 36'} = \frac{x}{sen\ 25° \, 6'} \rightarrow x = 1974{,}52 \text{ m}$$

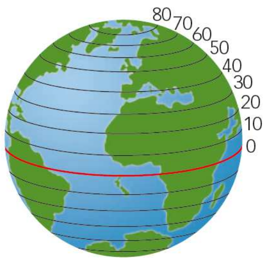
126. **Entre las dos plantas de un edificio se tiene que instalar una escalera. La diferencia de altura entre las plantas es de 3,5 m y se dispone de 5 m en horizontal para poner la escalera.**

a) ¿Cuál será el ángulo de inclinación de la escalera?
b) ¿Cuál será la longitud de la escalera?

a) $tg\ \alpha = \frac{3{,}5}{5} \rightarrow \alpha = 35°$

b) $sen\ 35° = \frac{3{,}5}{l} \rightarrow l = 6{,}10 \text{ m}$

127. **Calcula la longitud del paralelo 38° norte considerando que el radio de la Tierra es de 6 370 km.**

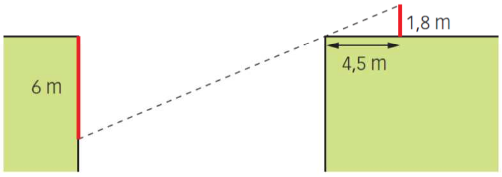


$90° - 38° = 52°$

$r = 6370 \cdot sen\ 52° = 5\,019{,}63 \text{ km}$

$2\pi r = 31539{,}26 \text{ km}$

128. **Esther y María desean medir la anchura de un desfiladero. Para ello se colocan en uno de los bordes del mismo. Esther deja deslizarse una cuerda que tiene 6 m de largo, sosteniéndola desde el borde del precipicio. Por su parte, María, cuyos ojos se hallan a 1,8 m del suelo, debe retirarse 4,5 m para ver el borde más próximo coincidiendo con el final de la cuerda.**



a) ¿Qué anchura tiene el desfiladero?

b) ¿Se podría calcular sin hacer uso de la trigonometría?

Llamamos x a la anchura del desfiladero.

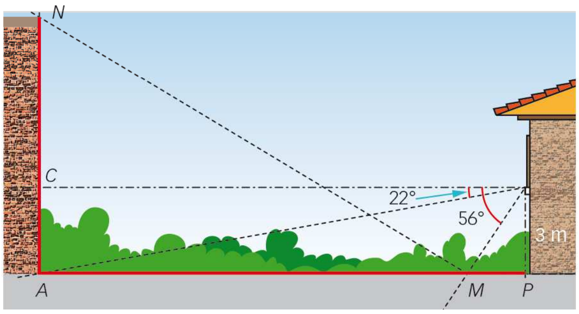
$$tg\ a = \frac{1,8}{4,5} = 0,4$$

$$0,4 = \frac{6}{x} \rightarrow x = 15 \text{ m}$$

a) La anchura del desfiladero es 15 m.

b) Se podría aplicar la semejanza de triángulos para resolver el problema.

129. **Desde la ventana de un edificio, situada a 3 m de altura, se ve la base de un edificio con un ángulo de 22° por debajo de la horizontal. La parte superior de ese edificio no se puede ver pero, sin embargo, se observa su reflejo en un estanque con un ángulo de 56° bajo la horizontal. ¿Cuál es la altura de ese edificio? ¿Qué distancia hay entre los dos edificios?**



Sea V el punto que representa la ventana. Entonces:

$$90° - 56° = 34°$$

$$\overline{MP} = 3 \cdot tg\ 34° = 2 \text{ m} \qquad \overline{MV} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ m}$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{3,6}{sen\ 22°} = \frac{\overline{AM}}{sen\ 34°} \rightarrow \overline{AM} = 5,4 \text{ m}$$

La distancia entre los dos edificios es: $2 + 5,4 = 7,4$ m

Como el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, se utiliza la semejanza de triángulos para hallar la altura.

$$\frac{3}{\overline{AN}} = \frac{2}{5,4} \rightarrow \overline{AN} = 8,1 \text{ m}$$

130. **Las pirámides de Gizeh (Egipto) son de un gran interés arqueológico, artístico e histórico. Estas tres pirámides –Keops, Kefrén y Micerino– fueron construidas por los antiguos egipcios como cámaras mortuorias para los faraones con cuyos nombres se conocen. La mayor de ellas –Keops– fue considerada por los antiguos como una de las siete maravillas del mundo, es una pirámide recta de base cuadrada de 233 m de lado.**

Calcula su altura si al separarse de ella 80 m se ve su vértice con un ángulo 29° 30' con la horizontal.

$$\frac{233}{2} = 116{,}5 \text{ m}$$

$$tg\,(29^\circ\, 30') = \frac{h}{116{,}5 \text{ m} + 80 \text{ m}} \rightarrow h = 111{,}17 \text{ m}$$

131. **Una casa de planta rectangular mide 12 m de largo y 8 m de ancho. El tejado, con una inclinación de 18°, es una superficie plana inclinada cuya parte más elevada está situada sobre uno de los lados mayores del rectángulo. Calcula el área del tejado.**

Como sabemos que el tejado tiene forma rectangular y que uno de sus lados mide 12 m, hallamos la longitud del otro lado, x.

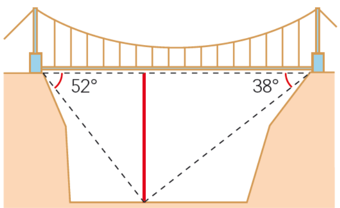
$$\cos 18^\circ = \frac{8}{x} \rightarrow x = 8{,}41 \text{ m}$$

Calculamos el área del tejado:

$$A = 12 \cdot 8{,}41 = 100{,}92 \text{ m}^2$$

El área del tejado es 100,92 m^2.

132. **Calcula la altura a la que caminan los viajeros cuando cruzan un desfiladero por un puente colgante como el de la figura.**



Llamamos y a la altura del puente colgante.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 52^\circ = \dfrac{y}{x} \\[2ex] tg\ 38^\circ = \dfrac{y}{82 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 0{,}78y} 64{,}07 - 0{,}61y = y \rightarrow y = 39{,}8 \text{ m}$$

La altura del puente colgante es 39,8 m.

133. Demuestra que la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual que su producto.

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

$a + b + c = 180°$

$tg\, c = tg\,[180° - (a + b)] = -tg\,(a + b) = -\dfrac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$

Por tanto, la suma de las tangentes es:

$tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a + tg\, b - \dfrac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$

$tg\, c = -\dfrac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b} \to tg\, c(1 - tg\, a \cdot tg\, b) = -tg\, a - tg\, b$

$\to tg\, c - tg\, a \cdot tg\, b \cdot tg\, c = -tg\, a - tg\, b$

$\to tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a \cdot tg\, b \cdot tg\, c$

134. Las medidas de los lados de un triángulo son proporcionales a 5, 6 y 7, respectivamente, y su área es $24\sqrt{6}$. Determina la medida de sus lados y de sus ángulos.

Como los lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y sus ángulos son iguales. Aplicamos el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \to \cos \widehat{A} = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \dfrac{-49 + 36 + 25}{2 \cdot 6 \cdot 5} = 0{,}2$

$\widehat{A} = 78°\ 27'\ 46{,}9''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \to \cos \widehat{B} = \dfrac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \dfrac{-36 + 49 + 25}{2 \cdot 7 \cdot 5} = 0{,}5429$

$\widehat{B} = 57°\ 7'\ 7{,}42''$

$\widehat{C} = 180° - 78°\ 27'\ 46{,}9'' - 57°\ 7'\ 7{,}42'' = 44°\ 25'\ 5{,}68''$

Para hallar la longitud de los lados aplicamos la fórmula de Herón.

Si llamamos p al semiperímetro, entonces:

$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

$a = 5t;\ b = 6t;\ c = 7t;\ p = \dfrac{5t + 6t + 7t}{2} = \dfrac{18t}{2} = 9t$

$24\sqrt{6} = \sqrt{9t(9t - 7t)(9t - 6t)(9t - 5t)} \to 3{,}456 = 9t \cdot 2t \cdot 3t \cdot 4t \to t = 2$

Los lados miden 10, 12 y 14, respectivamente.

135. Expresa, utilizando razones trigonométricas de grado 1, las siguientes razones trigonométricas.

a) $\cos^2 x$ b) $sen^2\, x$

a) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

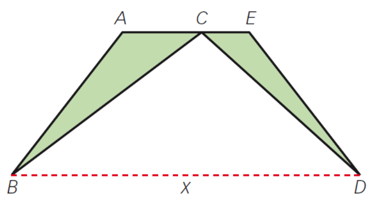
b) $sen^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

136. En la estructura de la figura los puntos *A*, *C* y *E* están alineados y se conocen los siguientes datos:

$\overline{AB} = 15$ cm **$\overline{AC} = 1$ m** **$\widehat{C} = 30°$**

$\overline{DE} = 2$ m **$\widehat{D} = 14°$** **$\widehat{E} = 124°$**

Halla el valor de *x*.



$180° - 124° - 14° = 42°$

Por el teorema del seno: $\dfrac{2}{sen\ 42°} = \dfrac{a}{sen\ 124°} \to a = 2{,}48$ m

$sen\ 42° = \dfrac{h}{a} \to h = 2{,}48 \cdot sen\ 42° = 1{,}66$ m

$cos\ 42° = \dfrac{b}{a} \to b = 2{,}48 \cdot cos\ 42° = 1{,}84$ m

$tg\ 60° = \dfrac{c}{h} \to c = 1{,}66 \cdot tg\ 60° = 2{,}88$ m

$x = 2{,}88 + 1{,}84 = 4{,}72$ m

137. Sabemos que $tg\ z = 1{,}5$. Con estos datos, ¿puedes calcular $tg\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$ sin determinar el ángulo z?

Si aplicas la fórmula del ángulo suma tendrás dificultades. Utiliza esta expresión.

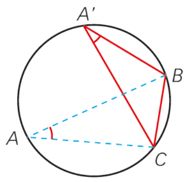
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$tg\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = tg\left(\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{1 - tg\left(z + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + \frac{tg\ z + 1}{1 - tg\ z}}{1 - \frac{tg\ z + 1}{1 - tg\ z}} = \frac{2}{-2\ tg\ z} = -cotg\ z$$

138. Dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco miden igual. Utilízalo para demostrar que:

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

siendo d el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



El triángulo $\widehat{CBA'}$ es recto por ser uno de sus lados el diámetro de la circunferencia.
Los lados opuestos a los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son iguales.

Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A}'$ son iguales por abarcar el mismo arco, luego sus senos son iguales.

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{a}{sen\ \widehat{A}'} = \frac{a}{\frac{a}{d}} = d$$

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = d$$

PARA PROFUNDIZAR

139. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

¿Cuál es el valor de $sen\frac{\pi}{32}\cdot cos\frac{\pi}{32}\cdot cos\frac{\pi}{16}\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{4}$?	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
En el triángulo *ABC* se verifica que $cos(2A-B)+sen(A+B)=2$. Si el lado *AB* mide 4, ¿cuánto mide el lado *BC*?	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$
Un triángulo de lados *a*, *b* y *c* verifica que $(a+b+c)\cdot(a+b-c)=3ab$. El valor del ángulo opuesto al lado *c* es:	15°	30°	45°	60°	150°
En un triángulo acutángulo, un lado mide 7 m, su ángulo opuesto 60° y otro lado 8 m. ¿Cuántos metros mide el tercer lado?	2	3	4	5	6

□ $$\left(sen\frac{\pi}{32}\cdot cos\frac{\pi}{32}\right)\cdot cos\frac{\pi}{16}\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\left(sen\frac{\pi}{16}\cdot cos\frac{\pi}{16}\right)\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(sen\frac{\pi}{8}\cdot cos\frac{\pi}{8}\right)\cdot cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{8}\left(sen\frac{\pi}{4}\cdot cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{16}sen\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}.$$

□ Como el coseno y el seno solo pueden valer como mucho 1:

$$\left.\begin{array}{l}2A-B\\ A+B=90\end{array}\right\}\rightarrow A=30^\circ \qquad B=60^\circ$$

$$sen\,30^\circ=\frac{\overline{BC}}{4}\rightarrow\overline{BC}=2$$

□ $$(a+b+c)\cdot(a+b-c)=a^2+b^2-c^2+2ab=3ab$$

$$\left.\begin{array}{l}c^2=a^2+b^2-2ab\,cos\,C\\ c^2=a^2+b^2-ab\end{array}\right\}\rightarrow cos\,C=\frac{1}{2}\rightarrow C=60^\circ$$

□ $7^2=8^2+x^2-2\cdot8\cdot x\,cos\,60^\circ\rightarrow x^2-8x+15=0\rightarrow x_1=5,\ x_2=3$

$3^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot cos\,\alpha\rightarrow\alpha=21{,}79^\circ\rightarrow$ El tercer ángulo no sería agudo.

$5^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot cos\,\alpha\rightarrow\alpha=38{,}21^\circ\rightarrow$ Todos los ángulos son agudos.

El tercer lado mide 5 m.

140. **¿Para qué valores de *k* tiene solución la ecuación *sen x cos x* = *k*? Acota las posibles soluciones.**

$sen\,x\cdot cos\,x=k\rightarrow 2\,sen\,x\cdot cos\,x=2k\rightarrow sen\,2x=2k$

Como $sen\,x<|1|\rightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{2}$

Las soluciones estarán acotadas en [0°, 180°] + 180° · *k*.

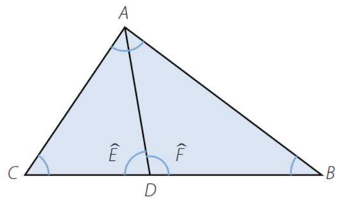
141. **Demuestra que la bisectriz interior del ángulo $\hat{A}$ en el triángulo *ABC* divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados *AB* y *AC*.**

Llamamos *D* al punto de corte de la bisectriz con el lado *CB*.

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{CD}{sen\,\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AD}{sen\,\hat{C}} = \frac{AC}{sen\,\hat{E}} \rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{sen\,\frac{\hat{A}}{2}}{sen\,\hat{E}}$$

$$\frac{DB}{sen\,\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{AD}{sen\,\hat{B}} = \frac{AB}{sen\,\hat{F}} \rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{sen\,\frac{\hat{A}}{2}}{sen\,\hat{F}}$$



Como los ángulos son suplementarios, sus senos son iguales.

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

142. **De un puerto salen dos barcos con rumbos diferentes. El rumbo de uno de ellos es N 23° E, a una velocidad de 11 millas/h.**

El segundo navega en dirección S 67° E a 15 millas/h.

Calcula, aproximadamente, el rumbo desde el segundo barco hacia el primero, una hora después.

Resuélvelo también en el caso de que el segundo ángulo sea de 77°.

$\omega = 180° - 90° - 67° = 23°$

$\sqrt{11^2 + 15^2} = 18{,}6$ millas

$sen\,\alpha = \dfrac{11}{18{,}6} \rightarrow \alpha = 36{,}25°$

$\omega + \alpha = 23° + 36{,}25° = 59{,}25°$

El rumbo desde el segundo barco hacia el primero será N 59,25ºO.

En el caso de que el segundo ángulo sea de 77º:

$\omega = 180° - 90° - 77° = 13°$

$d^2 = 11^2 + 15^2 - 2\cdot 11\cdot 15\cdot cos\,80° \rightarrow d = 17$ millas

Por el teorema del seno: $\dfrac{sen\,\alpha}{11} = \dfrac{sen\,80°}{17} \rightarrow \alpha = 39{,}59°$

$\omega + \alpha = 13° + 39{,}59° = 52{,}59°$

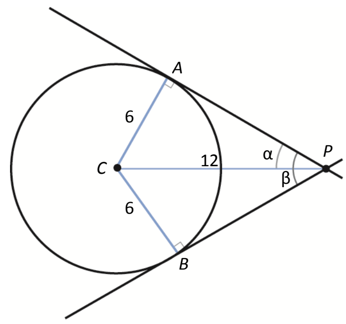
El rumbo desde el segundo barco hacia el primero será N 52,59ºO.

143. **Un punto *P* dista 12 cm del centro de una circunferencia de 6 cm de radio. Averigua el ángulo que forman entre sí las dos tangentes trazadas desde dicho punto a la circunferencia.**

(Premio extraordinario de Bachillerato)

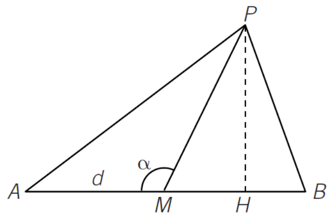
En el triángulo $\widehat{CPA}$ $sen\,\alpha = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30°$

Como $\beta = 2\alpha \rightarrow \beta = 60°$, que es el ángulo comprendido entre las dos tangentes.



144. **Siendo *M* el punto medio del segmento de extremos *A* y *B*, estudia el lugar geométrico de los puntos *P* del plano, tales que *PM* sea media proporcional entre *PA* y *PB*.**

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)



PM es una mediana del triángulo $\widehat{PAB}$.

Aplicamos el teorema del coseno en los triángulos $\widehat{PAM}$ y $\widehat{PMB}$:

$$PA^2 = d^2 + PM^2 - 2d \cdot PM \cdot \cos\alpha$$

$$PB^2 = d^2 + PM^2 - 2d \cdot PM \cdot \cos(180° - \alpha) = d^2 + PM^2 + 2d \cdot PM \cdot \cos\alpha$$

Sumando, se obtiene: $PA^2 + PB^2 = 2d^2 + 2PM^2$

Como $PM^2 = PA \cdot PB$, resulta que:

$$PA^2 + PB^2 = 2d^2 + 2PA \cdot PB \rightarrow PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB = 2d^2 \rightarrow (PA - PB)^2 = 2d^2$$

Por tanto, tenemos que $PA - PB = d\sqrt{2}$, es decir, la diferencia de las distancias de P a los puntos A y B es constante, por lo que el lugar pedido es una hipérbola de focos A y B, luego la distancia focal es $2c = 2d$ y el eje real es $2a = d\sqrt{2}$.

En una hipérbola se verifica que $b^2 = c^2 - a^2$:

$$b^2 = d^2 - \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2} \rightarrow 2b = d\sqrt{2}$$

Al ser los dos ejes iguales, la hipérbola es equilátera.

145. **Calcula los valores de los cosenos de los ángulos *x* que satisfacen la siguiente ecuación.**

$$\mathbf{sen^2\,x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2} sen\,2x = 0}$$ (Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

$$\frac{1-\cos 2x}{2} - 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2} sen\,2x = 0$$

$sen\,2x = -1 + \cos 2x + 2 + 2\cos 2x$ $\qquad$ $3\cos 2x - sen\,2x + 1 = 0$

Sea $t = \cos 2x$. Entonces: $3t - \sqrt{1-t^2} + 1 = 0 \rightarrow (3t+1)^2 = 1 - t^2 \rightarrow 10t^2 + 6t = 0 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -\frac{3}{5}$

$t_2 = -\frac{3}{5}$ no es solución.

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow$ Las soluciones son $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

146. **Obtén los dos valores enteros de *x* más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumple esta ecuación trigonométrica.**

$$\mathbf{2^{sen^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}}$$ (Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

$2^{sen^2 x} + 2^{1-sen^2 x} = 2\sqrt{2}$

Sea $t = 2^{sen^2 x} \rightarrow t + \frac{2}{t} = 2\sqrt{2} \rightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{2}$

$2^{sen^2 x} = \sqrt{2} \rightarrow sen^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45°,\ 135°,\ 225°,\ 315°$

$2\,013 = 5 \cdot 360 + 213 = 1800 + 213$

Aproximación por defecto: $1800° + 135° = 1935°$ $\qquad$ Aproximación por exceso: $1800° + 225° = 2\,025°$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Qué es la fibra óptica? ¿Qué condición cumple el rayo de luz para permanecer en el núcleo hasta el final de la fibra óptica?

La fibra óptica es un hilo muy fino de material transparente, vidrio o materiales plásticos, por el que se envían pulsos de luz que representan datos.

Un haz luminoso cuyo ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción, permanecerá en el núcleo hasta llegar al final de la fibra óptica.

2. La conclusión del texto anterior es que un haz luminoso cuyo ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción, permanecerá en el núcleo hasta llegar al final de la fibra óptica. ¿Cómo se deduce esta conclusión a partir de la ley de Snell?

Como $sen\,90^{\circ} = 1 \rightarrow sen\,\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$

Pero como $sen\,\theta_1 \leq 1$ es necesario que $n_1 > n_2$ para que haya refracción y cambie de medio.

3. Investiga y enumera algunas ventajas e inconvenientes de utilizar la fibra óptica en lugar del tradicional cable de cobre.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Ventajas: Es de menor coste que el cobre y permite la transmisión de una mayor cantidad de datos por unidad de tiempo.
- Inconvenientes: La fibra es más frágil que el cable de cobre, además su reparación es más difícil en caso de ruptura.

4. Si el índice de refracción del aire es 1,0003 y el ángulo límite a la entrada de una fibra óptica es 41,8°, ¿cuál será entonces el índice de refracción del material que forma la fibra óptica?

$$n_2 = \frac{1{,}0003}{sen\,41{,}8^{\circ}} = 1{,}5$$