Números complejos

5

ACTIVIDADES

1. Escribe estos números como números complejos.

a) $\sqrt{-3}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) 3   d) -3

a) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$

b) $\sqrt[4]{-16}=\sqrt{4i}=2\sqrt{i}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

c) $3=3+0i$

d) $-3=-3+0i$

2. Halla *a* y *b* para que sean ciertas las siguientes igualdades.

a) $2+3bi=a-1$ b) $4a-2b=2-ai$

a) $a=2+1=3$ $b=0$

b) $a=0$ $4a-2b=2\rightarrow b=-1$

3. Dado el número complejo $z=-2x+\frac{y}{2}i$, determina el valor de *x* e *y* para que sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

c) Un número complejo que no sea real ni imaginario puro.

a) $y=0$ b) $x=0$ c) $x\neq 0,\ y\neq 0$

4. Halla el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $\sqrt{2}-3i$ c) $3-2i$ e) $\frac{3}{5}i$ g) 0

b) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i$ d) $-3+\frac{2}{5}i$ f) -7 h) $-2i$

a) Opuesto: $-\sqrt{2}+3i$ Conjugado: $\sqrt{2}+3i$

b) Opuesto: $-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i$ Conjugado: $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i$

c) Opuesto: $-3+2i$ Conjugado: $3+2i$

d) Opuesto: $3-\frac{2}{5}i$ Conjugado: $-3-\frac{2}{5}i$

e) Opuesto: $-\frac{3}{5}i$ Conjugado: $-\frac{3}{5}i$

f) Opuesto: 7   Conjugado: -7

g) Opuesto: 0   Conjugado: 0

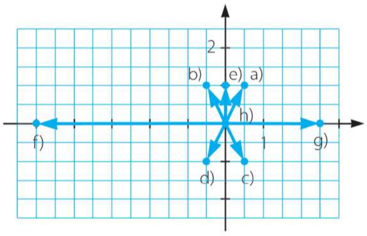
h) Opuesto: $2i$ Conjugado: $2i$

5. Representa gráficamente los siguientes números complejos.

a) $\frac{1}{2}+i$ c) $\frac{1}{2}-i$ e) i g) $\frac{5}{2}$

b) $-\frac{1}{2}+i$ d) $-\frac{1}{2}-i$ f) -5 h) 0

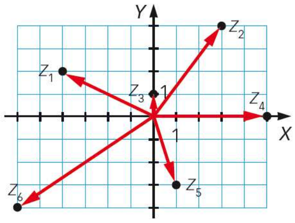
Ahora contesta, ¿dónde estará situado un número real? ¿Y si el número es imaginario puro?



Un número real estará situado en el eje de abscisas.

Un número imaginario puro se situará en el eje de ordenadas.

6. Escribe los números complejos representados gráficamente.



$z_1 = -4 + 2i$ $\quad$ $z_3 = i$ $\quad$ $z_5 = 1 - 3i$

$z_2 = 3 + 4i$ $\quad$ $z_4 = 5$ $\quad$ $z_6 = 6 - 4i$

7. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i)$ $\quad$ c) $(-1 - i)(-4 + 5i)$

b) $\dfrac{-1 - i}{-4 + 5i}$ $\quad$ d) $\dfrac{(-2 + i)(1 + 3i)}{-1 + 2i} - 2i$

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i) = -5 + 4i$

b) $\dfrac{-1-i}{-4+5i} = \dfrac{(-1-i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)} = \dfrac{-1+9i}{41}$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i) = 4 - 5i + 4i + 5 = 9 - i$

d) $\dfrac{(-2+i)(1+3i)}{-1+2i} - 2i = \dfrac{(-5-5i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} - 2i = 3 - i - 2i = 3 - 3i$

8. Halla el inverso de los números complejos que aparecen a continuación.

a) i $\quad$ c) $-1 - i$ $\quad$ e) $4 - 3i$

b) $3 + 4i$ $\quad$ d) $i + 3$ $\quad$ f) $6 + 5i$

a) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{1} = -i$

b) $\dfrac{1}{3+4i} = \dfrac{1}{3+4i} \cdot \dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{3-4i}{25}$

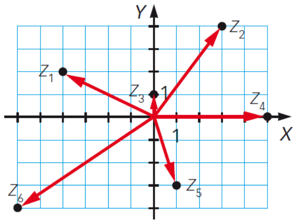
c) $\dfrac{1}{-1-i} \cdot \dfrac{-1+i}{-1+i} = \dfrac{-1+i}{2}$

d) $\dfrac{1}{i+3} = \dfrac{1}{i+3} \cdot \dfrac{-i+3}{-i+3} = \dfrac{-i+3}{10}$

e) $\dfrac{1}{4-3i} = \dfrac{1}{4-3i} \cdot \dfrac{4+3i}{4+3i} = \dfrac{4+3i}{25}$

f) $\dfrac{1}{6+5i} = \dfrac{1}{6+5i} \cdot \dfrac{6-5i}{6-5i} = \dfrac{6-5i}{61}$

6. **Escribe los números complejos representados gráficamente.**



$$Z_1 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ tg\ \alpha = \dfrac{2}{-3} \rightarrow \alpha = 146{,}31^\circ \end{cases} \rightarrow Z_1 = \sqrt{13}_{146{,}31^\circ}$$

$$Z_4 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{4^2} = 4 \\ \alpha = 0^\circ \end{cases} \rightarrow Z_4 = 4_{0^\circ}$$

$$Z_2 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2} = 1 \\ \alpha = 90^\circ \end{cases} \rightarrow Z_2 = 1_{90^\circ}$$

$$Z_5 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-2}{1} \rightarrow \alpha = 296{,}57^\circ \end{cases} \rightarrow Z_5 = \sqrt{5}_{296{,}57^\circ}$$

$$Z_3 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ tg\ \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33{,}7^\circ \end{cases} \rightarrow Z_3 = \sqrt{13}_{33{,}7^\circ}$$

$$Z_6 \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ tg\ \alpha = \dfrac{-2}{-4} \rightarrow \alpha = 206{,}57^\circ \end{cases} \rightarrow Z_6 = 2\sqrt{5}_{206{,}57^\circ}$$

10. **Expresa en forma polar.**

a) $2 + i$ c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e) $-4i$

b) $-2 - i$ d) $2 - \sqrt{3}i$ f) 12

a) $2 + i = \sqrt{5}_{26^\circ 33' 54{,}2''}$

b) $-2 - i = \sqrt{5}_{206^\circ 33' 54''}$

c) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \dfrac{\sqrt{2}}{2}_{135^\circ}$

d) $2 - \sqrt{3}i = \sqrt{7}_{310^\circ 53' 36{,}2''}$

e) $-4i = 4_{270^\circ}$

f) $12 = 12_{0^\circ}$

11. **Expresa en formas binómica y trigonométrica.**

a) 1_{120° b) 3_{240° c) $2_{\frac{\pi}{3}}$ d) $3_{\frac{3\pi}{2}}$

a) $1_{120^\circ} = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = (cos\ 120^\circ + i\ sen\ 120^\circ)$

b) $3_{240^\circ =} = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 3\ (cos\ 240^\circ + i\ sen\ 240^\circ)$

c) $2_{\frac{\pi}{3}} = \left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(cos\ \dfrac{\pi}{3} + i\ sen\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

d) $3_{\frac{3\pi}{2}} = (0, -3) = 3\left(cos\ \dfrac{3\pi}{2} + i\ sen\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$

12. **Expresa en forma polar y trigonométrica.**

a) $3-4i$ b) $2+2i$ c) $-\sqrt{3}+i$ d) $-1-i$

a) $3-4i=5_{306,9°}=5(\cos 306,9°+i\,\mathrm{sen}\,306,9°)$

b) $2+2i=2\sqrt{2}_{45°}=2\sqrt{2}(\cos 45°+i\,\mathrm{sen}\,45°)$

c) $-\sqrt{3}+i=2_{150°}=2(\cos 150°+i\,\mathrm{sen}\,150°)$

d) $-1-i=\sqrt{2}_{225°}=\sqrt{2}(\cos 225°+i\,\mathrm{sen}\,225°)$

13. **Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma polar.**

a) $4_{120°}\cdot 3_{60°}$ c) $1_{260°}:6_{120°}$ e) $3_{100°}:3_{40°}$

b) $2_{230°}\cdot 3_{130°}$ d) $4_{0°}:2_{180°}$ f) $1_{260°}\cdot 6_{120°}$

a) $4_{120°}\cdot 3_{60°}=(4\cdot 3)_{120°+60°}=12_{180°}$

b) $2_{230°}\cdot 3_{130°}=(2\cdot 3)_{230°+130°}=6_{360°}=6_{0°}$

c) $1_{260°}:6_{120°}=\left(\dfrac{1}{6}\right)_{260°-120°}=\left(\dfrac{1}{6}\right)_{140°}$

d) $4_{0°}:2_{180°}=\left(\dfrac{4}{2}\right)_{360°-180°}=2_{180°}$

e) $3_{100°}:3_{40°}=\left(\dfrac{3}{3}\right)_{100°-40°}=1_{60°}$

f) $1_{260°}\cdot 6_{120°}=(1\cdot 6)_{260°+120°}=6_{20°}$

14. **Dados estos números complejos, calcula.**

$z_1=1_{210°}$ $z_2=3\,[\cos(-30°)+i\,\mathrm{sen}\,(-30°)]$

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ b) $\dfrac{(z_1)^2\cdot \overline{z}_2}{z_2}$

$z_1=1_{210°}$ $z_2=3_{330°}$

a) $\dfrac{1_{210°}}{3_{330°}}=\dfrac{1}{3_{240°}}$

b) $\dfrac{(1_{210°})^2\cdot 3_{30°}}{3_{330°}}=\dfrac{1_{420°}\cdot 3_{30°}}{3_{330°}}=\dfrac{3_{450°}}{3_{330°}}=1_{120°}$

15. **Realiza estas operaciones.**

a) $(3_{45°})^2$ c) $\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^6$ e) $(4_{330°})^3$

b) $(3-3i)^5$ d) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}i\right)^8$ f) $(-3i)^5$

a) $(3_{45°})^2=3^2_{2\cdot 45°}=9_{90°}=9i$

b) $(3-3i)^5=\left(3\sqrt{2}_{315°}\right)^5=\left(3\sqrt{2}\right)^5_{5\cdot 315°}=972\sqrt{2}_{135°}$

c) $\left(2_{\frac{\pi}{6}}\right)^6=2^6_{6\cdot\frac{\pi}{6}}=64_{\pi}=-64$

d) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}i\right)^8=\left(\sqrt{10}_{45°}\right)^8=\sqrt{10^8}_{8\cdot 45°}=10\,000_{360°}=10\,000$

e) $(4_{330°})^3=64_{3\cdot 330°}=64_{270°}=-64i$

f) $(-3i)^5=(3_{270°})^5=3^5_{5\cdot 270°}=243_{270°}=-243i$

16. **Resuelve [16 (*cos* 60° + *i sen* 60°)] · $(2_{210°})^4$.**

$[16\,(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)] \cdot (2_{210°})^4 = 16_{60°} \cdot 16_{840°} = 256_{900°} = 256_{180°}$

17. **Utilizando la fórmula de De Moivre, expresa *cos* 3α y *sen* 3α en función de *cos* α y *sen* α.**

Consideramos un número complejo de módulo la unidad:

$(1_\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad:

$$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha - i\,\text{sen}^3\alpha = \\ = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha)i$$

Igualamos este resultado con la segunda parte de la igualdad:

$(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha)i = \cos 3\alpha + i\,\text{sen}\,3\alpha$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias resulta:

$$\begin{cases} \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha \\ \text{sen}\,3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha \end{cases}$$

18. **Calcula las siguientes raíces.**

a) $\sqrt{3_{150°}}$ c) $\sqrt[4]{-i}$

b) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[3]{-1+i}$

a) $\sqrt{3_{150°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{150° + 0 \cdot 360°}{2} = 75°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{150° + 1 \cdot 360°}{2} = 255°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{75°}$ y $\sqrt{3}_{255°}$.

b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $3_{60°}$, $3_{180°} = -3$ y $3_{300°}$.

c) $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 67^\circ\, 30'$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 157^\circ\, 30'$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 247^\circ\, 30'$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{270^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 337^\circ\, 30'$$

Por tanto, las raíces son $1_{67^\circ\, 30'}$, $1_{157^\circ\, 30'}$, $1_{247^\circ\, 30'}$ y $1_{337^\circ\, 30'}$.

d) $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{\,135^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: $\sqrt[6]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{135^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 45^\circ$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{135^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 165^\circ$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{135^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 285^\circ$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{\,45^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{\,165^\circ}$ y $\sqrt[6]{2}_{\,285^\circ}$.

19. **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $z^3 - 1 = 0$

b) $z^5 + 32 = 0$

c) $z^4 + 16 = 0$

d) $z^4 - 81 = 0$

a) $z^3 - 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{1_{0^\circ}}$

El módulo de las soluciones será 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = 0^\circ$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0^\circ + 2 \cdot 360^0}{3} = 240^\circ$$

Por tanto, las raíces de z son 1_{0°, 1_{120°, 1_{240°.

b) $z^5 + 32 = 0 \to z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180°}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \to \beta_1 = \frac{180°}{5} = 36°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{5} = 108°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{5} = 180°$

Si $k = 3 \to \beta_4 = \frac{180° + 3 \cdot 360°}{5} = 252°$

Si $k = 4 \to \beta_5 = \frac{180° + 4 \cdot 360°}{5} = 324°$

Por tanto, las raíces de *z* son $2_{36°}$, $2_{108°}$, $2_{180°}$, $2_{252°}$, $2_{324°}$.

c) $z^4 + 16 = 0 \to z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \to \beta_1 = \frac{180°}{4} = 45°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \frac{180° + 360°}{4} = 135°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \frac{180° + 360° \cdot 2}{4} = 225°$

Si $k = 3 \to \beta_4 = \frac{180° + 360° \cdot 3}{4} = 315°$

Por tanto, las raíces de *z* son $2_{45°}$, $2_{135°}$, $2_{225°}$, $2_{315°}$.

d) $z^4 - 81 = 0 \to z = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{81_{0°}}$

El módulo de las soluciones será 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \to \beta_1 = 0°$

Si $k = 1 \to \beta_2 = \frac{360°}{4} = 90°$

Si $k = 2 \to \beta_3 = \frac{360° \cdot 2}{4} = 180°$

Si $k = 3 \to \beta_3 = \frac{360° \cdot 3}{4} = 270°$

Por tanto, las raíces de *z* son $3_{0°}$, $3_{90°}$, $3_{180°}$, $3_{270°}$.

20. **Calcula y representa las raíces cúbicas de este número.**

$$\frac{1+i}{-1-i}$$

$$\frac{1+i}{-1-i} = \frac{(1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1-1}{1+1} = -1 = 1_{180°}$$

Módulo: $\sqrt[3]{1} = 1$

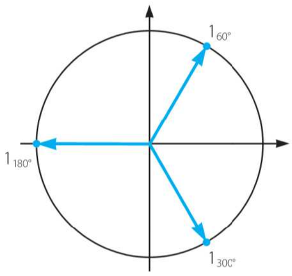
Argumentos:

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$

Por tanto, las raíces son $1_{60°}$, $1_{180°}$ y $1_{300°}$.



21. **Un cuadrado, con centro en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto *A*(3, 2). Determina los demás vértices.**

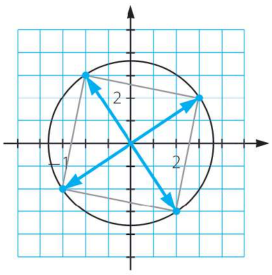
Calculamos las raíces cuartas de $3 + 2i$.

Módulo: $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Argumentos: $tg\ \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33°\ 41'\ 24{,}2''$

Sumamos 90° al argumento de cada vértice para obtener el siguiente.

Por tanto, las raíces son $\sqrt{13}_{33°\ 41'\ 24,2''}$, $\sqrt{13}_{123°\ 41'\ 24,2''}$, $\sqrt{13}_{213°\ 41'\ 24,2''}$ y $\sqrt{13}_{303°\ 41'\ 24,2''}$.



SABER HACER

22. Resuelve las ecuaciones y expresa sus soluciones con números complejos.

a) $x^2 + 2x + 2 = 0$

b) $x^2 + 6x + 10 = 0$

c) $x^2 + 10x + 29 = 0$

d) $x^2 - 10x + 26 = 0$

a) $x^2+2x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm i$

b) $x^2+6x+10=0 \rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=-3\pm i$

c) $x^2+10x+29=0 \rightarrow x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-116}}{2}=-5\pm 2i$

d) $x^2-10x+26=0 \rightarrow x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-104}}{2}=5\pm i$

23. Calcula estas operaciones.

a) $\dfrac{i^{241}}{1-i} - \dfrac{2i^{42}}{1+i^9} + i^{83}$ b) $i^{333} - \dfrac{i^{27}}{1-i^{27}} + \dfrac{i^{72}}{1-i^{25}}$

a) $\dfrac{i^{241}}{1-i}-\dfrac{2i^{42}}{1+i^9}+i^{83}=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-2}{1+i}-i=\dfrac{i(1+i)+2(1-i)-i(1-i^2)}{1-i^2}=\dfrac{1-3i}{2}$

b) $i^{333}-\dfrac{i^{27}}{1-i^{27}}+\dfrac{i^{72}}{1-i^{25}}=i-\dfrac{-i}{1-(-i)}+\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{i(1-i^2)+i(1-i)+(1+i)}{2}=1+2i$

24. Halla los inversos de estos números complejos.

a) $z = 2 - 2i$ b) $z = -1 + i$ c) $z = 1 + 4i$

a) $\dfrac{1}{2-2i}\cdot\dfrac{2+2i}{2+2i}=\dfrac{2+2i}{8}=\dfrac{1+i}{4}$

b) $\dfrac{1}{-1+i}\cdot\dfrac{-1-i}{-1-i}=\dfrac{-1-i}{2}$

c) $\dfrac{1}{1+4i}\cdot\dfrac{1-4i}{1-4i}=\dfrac{1-4i}{17}$

25. Resuelve las ecuaciones sabiendo que *z* es un número complejo.

a) $\dfrac{3 - z\cdot i + 2i}{2} = z + i$ b) $\dfrac{5 + 2z\cdot i - 4i}{3} = z - 2i$

a) $3-z\cdot i+2i=2z+2i \rightarrow 3=2z+zi \rightarrow z=\dfrac{3}{2+i} \rightarrow z=\dfrac{3}{2+i}\cdot\dfrac{2-i}{2-i}=\dfrac{6-3i}{5}$

b) $5+2z\cdot i-4i=3z-6i \rightarrow 5+2i=z(3-2i) \rightarrow z=\dfrac{5+2i}{3-2i} \rightarrow z=\dfrac{5+2i}{3-2i}\cdot\dfrac{3+2i}{3+2i}=\dfrac{11+16i}{13}$

26. **Calcula los conjugados de los siguientes números escritos en forma polar.**

a) $2_{33°}$ b) $3_{22°}$ c) $1_{105°}$ d) $2_{222°}$

a) El conjugado de $2_{33°}$ es $2_{-33°} = 2_{327°}$.

b) El conjugado de $3_{22°}$ es $3_{-22°} = 3_{338°}$.

c) El conjugado de $1_{105°}$ es $1_{-105°} = 1_{255°}$.

d) El conjugado de $2_{222°}$ es $2_{-222°} = 2_{138°}$.

27. **Calcula los opuestos de los siguientes números escritos en forma polar.**

a) $2_{33°}$ b) $3_{22°}$ c) $1_{105°}$ d) $2_{222°}$

a) El opuesto de $2_{33°}$ es $2_{33° + 180°} = 2_{213°}$.

b) El opuesto de $3_{22°}$ es $3_{22° + 180°} = 3_{202°}$.

c) El opuesto de $1_{105°}$ es $1_{105° + 180°} = 1_{285°}$.

d) El opuesto de $2_{222°}$ es $2_{222° + 180°} = 2_{42°}$.

28. **Calcula los inversos de los siguientes números complejos en forma polar.**

a) $2_{33°}$ b) $3_{22°}$ c) $1_{105°}$ d) $2_{222°}$

a) El inverso de $2_{33°}$ es $\left(\frac{1}{2}\right)_{-33°} = \left(\frac{1}{2}\right)_{327°}$.

b) El inverso de $3_{22°}$ es $\left(\frac{1}{3}\right)_{-22°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{338°}$.

c) El inverso de $1_{105°}$ es $1_{-105°} = 1_{255°}$.

d) El inverso de $2_{222°}$ es $\left(\frac{1}{2}\right)_{-222°} = \left(\frac{1}{2}\right)_{138°}$.

29. **Resuelve estas operaciones.**

a) $2_{30°} + 3_{135°} - 3_{270°}$ b) $1_{45°} + 1_{135°} + 1_{225°} + 1_{315°}$

a) $((2\,cos\,30° + i\,2\,sen\,30°) + (3\,cos\,135° + i\,3\,sen\,135°)) - (3\,cos\,270° + i\,3\,sen\,270°) =$

$$= \left(\sqrt{3} + i - \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - (-3i) = \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\left(4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) $(cos\,45° + i\,sen\,45°) + (cos\,135° + i\,sen\,135°) + (cos\,225° + i\,sen\,225°) + (cos\,315° + i\,sen\,315°) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

30. **Calcula.**

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4\left(-\sqrt{7}-\sqrt{7}i\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4\left(-\sqrt{7}-\sqrt{7}i\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3}=\frac{\left(1_{120°}\right)^4\left(\sqrt{14}_{225°}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)_{60°}\right)^3}=\frac{1_{120°}14_{90°}}{\left(\frac{1}{8}\right)_{180°}}=\frac{14_{210°}}{\left(\frac{1}{8}\right)_{180°}}=112_{30°}$$

31. **Determina las coordenadas de los vértices del triángulo *ABC* sabiendo que son los afijos de las raíces cúbicas de -27.**

$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 27, que es 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\frac{180°}{3}=60°$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\frac{180°+360°\cdot 1}{3}=180°$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\frac{180°+360°\cdot 2}{3}=300°$

Por tanto, las raíces son $3_{60°}$, $3_{180°}$, $3_{300°}$.

Las coordenadas de los vértices son:

$A(3\cos 60°, 3\operatorname{sen} 60°)=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$B(3\cos 180°, 3\operatorname{sen} 180°)=(-3, 0)$

$C(3\cos 300°, 3\operatorname{sen} 300°)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

32. **Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $z^4-16=0$ b) $z^3+8=0$ c) $z^4-9=0$ d) $z^3+9=0$

a) $z=\sqrt[4]{16_{0°}} \rightarrow z_1=2_{0°}, z_2=2_{90°}, z_3=2_{180°}, z_4=2_{270°}$

b) $z=\sqrt[3]{8_{180°}} \rightarrow z_1=2_{60°}, z_2=2_{180°}, z_3=2_{300°}$

c) $z=\sqrt[4]{9_{0°}} \rightarrow z_1=\sqrt{3}_{0°},\ z_2=\sqrt{3}_{90°},\ z_3=\sqrt{3}_{180°},\ z_4=\sqrt{3}_{270°}$

d) $z=\sqrt[3]{9_{180°}} \rightarrow z_1=\sqrt[3]{9}_{60°},\ z_2=\sqrt[3]{9}_{180°},\ z_3=\sqrt[3]{9}_{300°}$

ACTIVIDADES FINALES

33. Expresa estos números complejos en forma binómica.

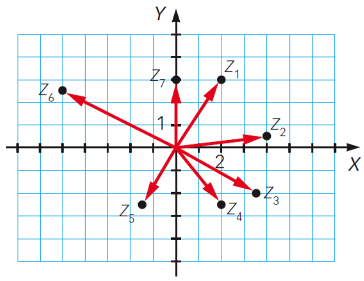
a) $\sqrt{-16} + 3$ b) $-2 - \sqrt{-4}$ c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2}$

a) $\sqrt{-16} + 3 = 3 + 4i$

b) $-2 - \sqrt{-4} = -2 - 2i$

c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{8}\,i$

34. Expresa en forma binómica estos números complejos.



$Z_1 = 2 + 3i$ $Z_5 = \dfrac{-3-5i}{2}$

$Z_2 = 4 + \dfrac{1}{2}i$ $Z_6 = -5 + \dfrac{5}{2}i$

$Z_3 = \dfrac{7}{2} - 2i$ $Z_7 = 3i$

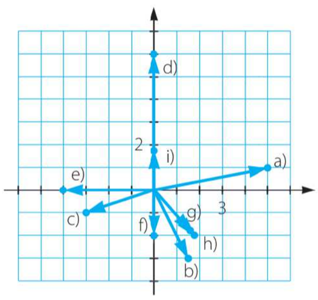
$Z_4 = 2 - \dfrac{5}{2}i$

35. Representa estos números en el plano complejo.

a) $5 + i$ d) $6i$ g) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{3}i$

b) $\sqrt{2} - 3i$ e) -4 h) $\sqrt{3} - 2i$

c) $-3 - i$ f) $-2i$ i) $\sqrt{3}\,i$



36. **Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa sus soluciones mediante números complejos.**

a) $x^2 + 7 = -42$
b) $-x^2 - 64 = 0$
c) $1 - (-x^2) = -120$
d) $-3 + x^2 = 2x^2 + 1$
e) $(x - 10)^2 = -20x$

a) $x^2 = -49 \rightarrow x = \pm\sqrt{-49} = \pm 7i$

b) $x^2 = -64 \rightarrow x = \pm\sqrt{-64} = \pm 8i$

c) $x^2 = -121 \rightarrow x = \pm\sqrt{-121} = \pm 11i$

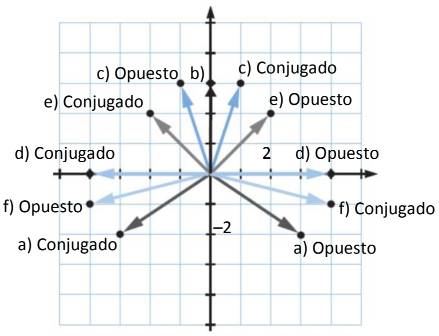
d) $x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

e) $x^2 = -100 \rightarrow x = \pm\sqrt{-100} = \pm 10i$

37. **Escribe y dibuja el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos.**

a) $-3 + 2i$
b) $-3i$
c) $1 - 3i$
d) -4
e) $-2 - 2i$
f) $4 + i$

a) Conjugado: $-3 - 2i$	Opuesto: $3 - 2i$	d) Conjugado: -4	Opuesto: 4
b) Conjugado: $3i$	Opuesto: $3i$	e) Conjugado: $-2 + 2i$	Opuesto: $2 + 2i$
c) Conjugado: $1 + 3i$	Opuesto: $-1 + 3i$	f) Conjugado: $4 - i$	Opuesto: $-4 - i$



38. **Escribe el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos.**

$$2 - 3i \qquad 3 - 2i \qquad -2 + i$$

A la vista de estos ejemplos deduce:

a) ¿Cómo es la representación del conjugado de un número complejo?
b) ¿Cómo es la representación del opuesto de un número complejo?

- $2 - 3i \rightarrow$ Conjugado: $2 + 3i$ Opuesto: $-2 + 3i$
- $3 - 2i \rightarrow$ Conjugado: $3 + 2i$ Opuesto: $-3 + 2i$
- $-2 + i \rightarrow$ Conjugado: $-2 - i$ Opuesto: $2 - i$

a) Es simétrica respecto del eje X.

b) Es simétrica respecto del origen de coordenadas.

39. **Calcula el valor de k para que el número $k + (k - 3)i$ cumpla las siguientes condiciones.**

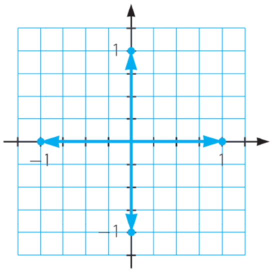
a) Sea un número imaginario puro.

b) Sea un número real.

a) $k = 0$ b) $k - 3 = 0 \rightarrow k = 3$

40. **Calcula y representa en el plano complejo los números $i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, \dots$**

Investiga también lo que ocurre con $i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}, i^{-6}, \dots$



$i^{4n-3} = i$ $i^{-4n+3} = -i$

$i^{4n-2} = -1$ $i^{-4n+2} = -1$

$i^{4n-1} = -i$ $i^{-4n+1} = i$

$i^{4n} = 1$ $i^{-4n} = 1$

41. **Calcula el resultado de estas operaciones.**

a) $(4 - i) + (-2 + 3i)$ c) $5 - (2 - i)$

b) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right)$ d) $\left(\frac{2}{5} - i\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}i\right)$

a) $2 + 2i$ b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i$ c) $3 + i$ d) $\frac{11}{15} - \frac{7}{5}i$

42. **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $(3 - 5i) + (2 - 7i) + (-4 + 8i)$

b) $(-1 + 2i) - (3 + 6i) - (-4 - i)$

c) $-(1 - 2i) - (-7i) - (-4 - 3i)$

d) $2(1 - 4i) - 2(1 + 4i) - 3(4 - 4i)$

e) $2\left(\sqrt{3} + i\right) - 3\left(2\sqrt{3} + 4i\right)$

f) $\left(\sqrt{2} - 3i\right) + 2\left(2 - \sqrt{3}i\right)$

a) $(3 - 5i) + (2 - 7i) + (-4 + 8i) = 1 - 4i$

b) $(-1 + 2i) - (3 + 6i) - (-4 - i) = (-1 + 2i) + (-3 - 6i) + (4 + i) = -3i$

c) $-(1 - 2i) - (-7i) - (-4 - 3i) = (-1 + 2i) + (7i) + (4 + 3i) = 3 + 12i$

d) $2(1 - 4i) - 2(1 + 4i) - 3(4 - 4i) = -12 - 4i$

e) $2\left(\sqrt{3} + i\right) - 3\left(2\sqrt{3} + 4i\right) = \left(2\sqrt{3} + 2i\right) + \left(-6\sqrt{3} - 12i\right) = -4\sqrt{3} - 10i$

f) $\left(\sqrt{2} - 3i\right) + 2\left(2 - \sqrt{3}i\right) = \left(\sqrt{2} - 3i\right) + \left(4 - 2\sqrt{3}i\right) = \left(\sqrt{2} + 4\right) - \left(3 + 2\sqrt{3}\right)i$

43. **Calcula estos productos y potencias.**

a) $(1-3i)(2-6i)$ d) $(5-4i)(5+4i)$

b) $(-3-4i)(7-i)$ e) $\left(-3-2\sqrt{2}\,i\right)\left(-3+2\sqrt{2}\,i\right)$

c) $(-2+5i)^2$ f) $\left(\sqrt{2}-i\right)^3$

a) $(1-3i)(2-6i)=2-6i-6i-18=-16-12i$

b) $(-3-4i)(7-i)=-21+3i-28i-4=-25-25i$

c) $(-2+5i)^2=4-25-20i=-21-20i$

d) $(5-4i)(5+4i)=25+16=41$

e) $\left(-3-2\sqrt{2}\,i\right)\left(-3+2\sqrt{2}\,i\right)=9+8=17$

f) $\left(\sqrt{2}-i\right)^3=\sqrt{2^3}-6i-3\sqrt{2}+i=-\sqrt{2}-5i$

44. **Efectúa las siguientes divisiones.**

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}$ b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}$ c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}$

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}=\dfrac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4}=\dfrac{-13+13i}{13}=-1+i$

b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}=\dfrac{(20+40i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)}=\dfrac{160-120i+320i+240}{64+36}=4+2i$

c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}=\dfrac{(-1+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{-2-i+10i-5}{4+1}=\dfrac{-7+9i}{5}$

45. **Realiza las siguientes divisiones de números complejos.**

a) $(3-i):(1-i)$ c) $(5+2i):(2i)$

b) $\dfrac{5}{2+4i}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\,i}$

a) $\dfrac{3-i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}=\dfrac{3+2i+1}{2}=2+i$

b) $\dfrac{5}{2+4i}\cdot\dfrac{2-4i}{2-4i}=\dfrac{10-20i}{20}=\dfrac{1-2i}{2}$

c) $\dfrac{5+2i}{2i}\cdot\dfrac{-2i}{-2i}=\dfrac{-10i+4}{4}=\dfrac{-5i+2}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}i}\cdot\dfrac{1-\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{2}-2i}{3}$

46. **Obtén, en forma binómica, el resultado de las siguientes operaciones.**

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}$

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i=-3+9i+(3+2i)=11i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}=2i+\dfrac{9}{10}+\dfrac{33}{10}i=\dfrac{9}{10}+\dfrac{53}{10}i$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)=\dfrac{48-4i}{2-6i}-(6+18i-2i+6)=$
$=3+7i-(12+16i)=-9-9i$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}=(-2-5i)-\dfrac{5-15i}{3-i}=$
$=(-2-5i)-(3-4i)=-5-i$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}=\dfrac{-8+6i+4}{-3+4i}=\dfrac{36}{25}-\dfrac{2}{25}i$

47. Realiza la siguiente operación.

$$\frac{1}{i}+\frac{1+i}{i^3}-\frac{(1+i)\cdot(1-i)}{i^2-1}-\frac{2(1+i)}{i-1}$$

$$\frac{1}{i}+\frac{1+i}{-i}-\frac{1-i^2}{i^2-1}-\frac{2+2i}{i-1}=\frac{1}{i}-\frac{1+i}{i}+1-\frac{2+2i}{i-1}=-\frac{2+2i}{i-1}=-\frac{2+2i}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1}=-\frac{(2+2i)(i+1)}{-2}=2i$$

48. Calcula y simplifica las expresiones que aparecen a continuación.

a) $i^{49}\cdot i^{87}$

b) $i^{34}\cdot i^{103}+i^{78}\cdot i^{116}$

c) $(-3i)^3+(2i)^6:(12i^{18})$

d) $i^{19}\cdot(2i^{33}-3i^{28})$

a) $i^{49}\cdot i^{87}=i^{136}=1$

b) $i^{34}\cdot i^{103}+i^{78}\cdot i^{116}=i^{137}+i^{194}=i-1$

c) $(-3i)^3+(2i)^6:(12i^{18})=27i-64:(-12)=27i+\dfrac{16}{3}$

d) $i^{19}\cdot(2i^{33}-3i^{28})=-i\cdot(2i-3)=2+3i$

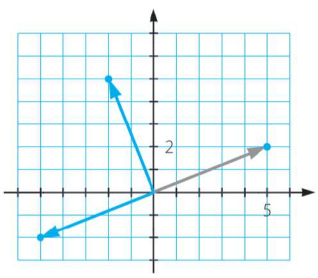
49. Representa $5+2i$. Multiplícalo por i y representa el resultado. Multiplica dos veces por i y explica qué se obtiene.

$(5+2i)i=-2+5i$

$(5+2i)i^2=-5-2i$

Al multiplicar por i el punto se desplaza 90°, mediante un giro de centro el origen, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Al multiplicar por i^2 se obtiene el punto simétrico respecto del origen (su opuesto).



50. **Comprueba si los valores de *z* que se dan son soluciones de cada ecuación.**

Solución	Ecuación
$z = 1 + 2i$	$z^2 - 2z + 5 = 0$
$z = 1 + i$	$z^2 + (3 - i)z - (4 + 4i) = 0$
$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$z^3 + 1 = 0$

- $(1 + 2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5 = 0 \rightarrow 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 = 0 \rightarrow$ Sí es solución.
- $(1 + i)^2 + (3 - i)(1 + i) - (4 + 4i) = 0 \rightarrow 1 + 2i - 1 + 3 + 2i + 1 - 4 - 4i = 0 \rightarrow$ Sí es solución.
- $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 + 1 = 0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 1 + 1 = 2 \rightarrow$ No es solución.

51. **Halla el valor de *k* para que las siguientes expresiones sean números imaginarios puros.**

a) $\frac{3 + ki}{k + 2i}$ b) $3ki \cdot \frac{1 - ki}{1 - i}$

a) $\frac{3+ki}{k+2i} \cdot \frac{k-2i}{k-2i} = \frac{5k + i(-6+k^2)}{k^2+4} \rightarrow k = 0$

b) $3ki \cdot \frac{1-ki}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(3ki+3k^2)(1+i)}{2} = \frac{-3k+3k^2+i(3k+3k^2)}{2} \rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$

Descartamos $k = 0$ porque al sustituir en la expresión original se obtiene el número $0 + 0i = 0$, que no se considera imaginario puro.

52. **Encuentra *p* y *q* para que se cumpla la siguiente igualdad.**

$$(p + 3i)(4 + qi) = 15 + 9i$$

$(p + 3i)(4 + qi) = 15 + 9i \rightarrow (4p - 3q) + (12 + pq)i = 15 + 9i$

$$\left.\begin{array}{l} 4p - 3q = 15 \\ 12 + pq = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 3;\ q_1 = -1 \\ p_2 = \frac{3}{4};\ q_2 = -4 \end{cases}$$

53. **Demuestra que el número complejo $z = 1 - 3i$ verifica la igualdad $\frac{z^2}{2} = z - 5$.**

$$\frac{z^2}{2} = \frac{(1-3i)^2}{2} = \frac{-8-6i}{2} = -4 - 3i = 1 - 3i - 5 = z - 5$$

54. **La suma de dos números complejos es $3 + 2i$ y la parte real del segundo es 2. Halla los dos números sabiendo que el cociente del primero entre el segundo es un número imaginario puro.**

$(a + bi) + (2 + di) = 3 + 2i \rightarrow a = 1,\ b + d = 2$

$\frac{1+bi}{2+di} \cdot \frac{2-di}{2-di} = \frac{2+bd+(2b-d)i}{2+d^2} \rightarrow 2 + bd = 0$

$$\left.\begin{array}{l} b+d=2 \\ 2+bd=0 \end{array}\right\} \rightarrow d = 1+\sqrt{3},\ b = 1-\sqrt{3} \text{ o bien } d = 1-\sqrt{3},\ b = 1+\sqrt{3}$$

Los números son:

$z_1 = 1 + \left(1 + \sqrt{3}\right)i$ y $z_2 = 2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)i$

$z_1 = 1 + \left(1 - \sqrt{3}\right)i$ y $z_2 = 2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)i$

55. Encuentra dos números complejos sabiendo que su suma vale 3 y su cociente es *i*.

$(a + bi) + (c + di) = 3 \rightarrow a + c = 3,\ b + d = 0$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{3-c-di}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{3c-c^2-d^2-3di}{c^2+d^2} = i \rightarrow 3c - c^2 - d^2 - 3di = i\left(c^2+d^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3c - c^2 - d^2 = 0 \\ -3d = c^2 + d^2 \end{array}\right\} \rightarrow c = \frac{3}{2},\ d = -\frac{3}{2},\ a = \frac{3}{2},\ b = \frac{3}{2}$$

Los números son:

$z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ $\qquad$ $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

56. Representa gráficamente cada número complejo y exprésalo en forma binómica.

a) $1_{60°}$ $\quad$ c) $2_{135°}$ $\quad$ e) $\sqrt{5}_{60°}$

b) $5_{90°}$ $\quad$ d) $3_{120°}$ $\quad$ f) $\sqrt{3}_{45°}$

a) $\cos 60° + i \operatorname{sen} 60° = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

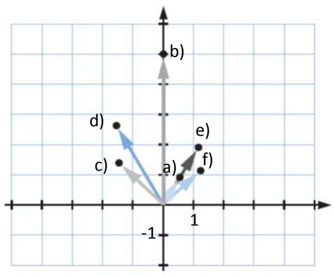
b) $5 \cos 90° + i \operatorname{sen} 90° = 5i$

c) $2 \cos 135° + i\, 2 \operatorname{sen} 135° = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

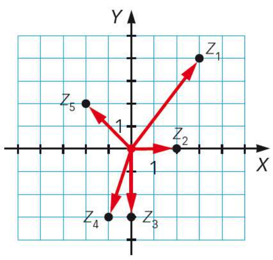
d) $3 \cos 120° + i\, 3 \operatorname{sen} 120° = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $\sqrt{5} \cos 60° + i\sqrt{5} \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{5}}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$

f) $\sqrt{3} \cos 45° + i\sqrt{3} \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$



57. Expresa estos números complejos en forma polar.



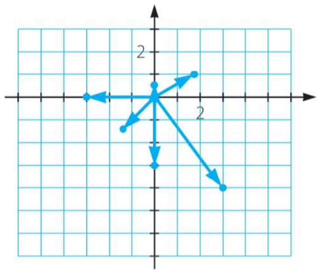
$z_1 = 3 + 4i = 5_{53,13°}$ $\quad$ $z_3 = -3i = 3_{270°}$ $\quad$ $z_5 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

$z_2 = 2 = 2_{0°}$ $\quad$ $z_4 = -1 - 3i = \sqrt{10}_{251,57°}$

58. **Escribe estos números en forma polar y represéntalos gráficamente.**

a) $3 - 4i$
b) $\sqrt{3} + i$
c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
d) $-3i$
e) -3
f) $\frac{1}{2}i$

a) $3 - 4i = 5_{306°\,52'\,11,63''}$
b) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$
c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{225°}$
d) $-3i = 3_{270°}$
e) $-3 = 3_{180°}$
f) $\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}_{90°}$



59. **Escribe en forma binómica los siguientes números complejos.**

a) $4_{60°}$
b) $2_{215°}$
c) $3_{\frac{\pi}{2}}$
d) 2_{π}
e) $3_{150°}$
f) $1_{\frac{3\pi}{2}}$
g) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$
h) $\sqrt{3}_{300°}$

a) $2 + 2\sqrt{3}i$
b) $-1{,}64 - 1{,}15i$
c) $3i$
d) -2
e) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
f) $-i$
g) $1 - i$
h) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

60. **Dados los números complejos:**

$$z_1 = 5_{240°} \qquad z_2 = 3_{135°} \qquad z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$$

escribe, en forma polar y binómica, el conjugado y el opuesto de cada uno de ellos.

Tenemos en cuenta que el conjugado es el punto simétrico respecto del eje de abscisas y el opuesto es el simétrico respecto del origen.

Número		Conjugado		Opuesto	
Polar	Binómica	Polar	Binómica	Polar	Binómica
$5_{240°}$	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{120°}$	$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{60°}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
$3_{135°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{225°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{315°}$	$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
$\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{11\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{6}}$	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

61. **Escribe en forma polar los números complejos que aparecen a continuación.**

a) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$
b) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

a) $\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$
b) $3_{\frac{\pi}{2}}$

62. **Dado el número escrito en forma polar r_α, di cómo sería su opuesto y su conjugado.**

Opuesto: $-r_\alpha = r_{180° + \alpha}$ Conjugado: $r_{-\alpha}$

63. **Efectúa las siguientes operaciones con números complejos.**

a) $4_{120°} \cdot 3_{60°}$ d) $\dfrac{8_{170°}}{2_{50°}}$ g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}}$

b) $\dfrac{6_\pi}{2_{\frac{\pi}{4}}}$ e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$ h) $(2_{120°})^5$

c) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270°}$ f) $2_{260°} \cdot 5_{130°}$ i) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6$

a) $4_{120°} \cdot 3_{60°} = 12_{180°}$ d) $\dfrac{8_{170°}}{2_{50°}} = 4_{120°}$ g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}} = \dfrac{7}{5}_{\frac{\pi}{6}}$

b) $\dfrac{6_\pi}{2_{\frac{\pi}{4}}} = 3_{\frac{3\pi}{4}}$ e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 25_{\frac{2\pi}{3}}$ h) $(2_{120°})^5 = 32_{600°} = 32_{240°}$

c) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270°} = 4_{60°} \cdot 2_{270°} = 8_{330°}$ f) $2_{260°} \cdot 5_{130°} = 10_{390°} = 10_{30°}$ i) $\dfrac{10_{120°}}{5_{240°}} = 2_{240°}$

64. **Expresa en forma polar el inverso de estos números.**

a) $2_{150°}$ c) $4_{\frac{\pi}{3}}$ e) $e_{\frac{\pi}{6}}$

b) $3_{\frac{\pi}{2}}$ d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)_\pi$ f) $\sqrt{7}_{35°}$

Para calcular el inverso de un número en forma polar, hallamos el inverso del módulo y el opuesto del argumento.

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)_{210°}$ c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)_{\frac{5\pi}{3}}$ e) $\left(\dfrac{1}{e}\right)_{\frac{11\pi}{6}}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)_{\frac{3\pi}{2}}$ d) 4_π f) $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)_{325°}$

65. **Calcula las siguientes potencias de números complejos en forma polar.**

a) $(2_{105°})^4$ b) $\left(4_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$ c) $(3_{-25°})^6$ d) $\left(\sqrt{5}_{\frac{3\pi}{4}}\right)^6$

a) $16_{60°}$ b) $16_{\frac{2\pi}{3}}$ c) $729_{210°}$ d) $125_{\frac{9\pi}{2}}$

66. **Efectúa las siguientes operaciones combinadas de números complejos.**

a) $(4_{20°} \cdot 1_{50°}) \cdot 3_{35°}$ c) $\dfrac{6_{60°} \cdot 3_{40°}}{9_{56°}}$

b) $(9_{39°} : 3_{25°}) \cdot 5_{100°}$ d) $(1_{105°})^8 \cdot (1_{65°})^5$

a) $4_{70°} \cdot 3_{35°} = 12_{105°}$ b) $3_{14°} \cdot 5_{100°} = 15_{114°}$ c) $\dfrac{18_{100°}}{9_{56°}} = 2_{44°}$ d) $1_{120°} \cdot 1_{325°} = 1_{85°}$

67. **Realiza las siguientes operaciones combinadas con números complejos.**

a) $\left[(4-2i)-\left(3-2\sqrt{2}\,i\right)\cdot 2_{30°}\right]^2$ b) $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^2-4_{\frac{3\pi}{2}}}{-3+3i}$

a) $\left((4-2i)-\left(3-2\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^2=\left((4-2i)-\left(3\sqrt{3}+3i-2\sqrt{6}i+2\sqrt{2}\right)\right)^2$

$\left(4-3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\left(-5+2\sqrt{6}\right)i\right)^2=2-40i-(16+16i)\sqrt{2}-(24-14i)\sqrt{3}+(32+16i)\sqrt{6}$

b) $\dfrac{\left(2_{60°}\right)^2+4i}{-3+3i}=\dfrac{4_{120°}+4i}{-3+3i}=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i+4i}{-3+3i}\cdot\dfrac{-3-3i}{-3-3i}=\dfrac{18+6\sqrt{3}-6i-6\sqrt{3}i}{18}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}-i\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$

68. **Realiza estas operaciones, expresando primero los números en forma polar.**

a) $(1-i)^4$ c) $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^4$

b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^6$ d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7$

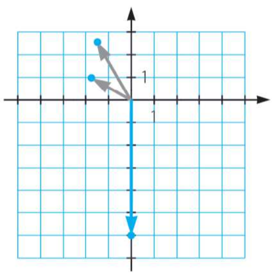
a) $(1-i)^4=\left(\sqrt{2}_{315°}\right)^4=4_{180°}$ c) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4=\left(2_{120°}\right)^4=16_{120°}$

b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6=\left(2_{135°}\right)^6=64_{90°}$ d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7=\sqrt{3}_{324°\,44'\,8,2''}$

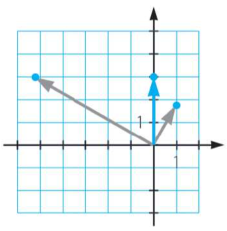
69. **Representa en el plano complejo estos números y los resultados de sus operaciones. Explica lo que sucede en cada caso.**

a) $2_{150°}\cdot 3_{120°}$ b) $\dfrac{6_{150°}}{2_{60°}}$ c) $\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^4$

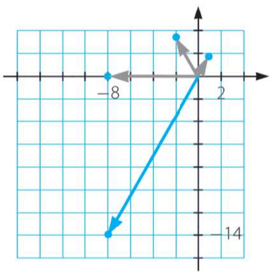
a) El módulo del resultado es el producto de los módulos, y el argumento es la suma de los argumentos de los números dados.



b) El módulo del resultado es el cociente de los módulos, y el argumento es la resta de los argumentos de los números dados.



c) El módulo del resultado es la cuarta potencia del módulo, y el argumento es el cuádruple del argumento del número dado.



70. **Realiza las siguientes potencias empleando la fórmula de De Moivre.**

a) $[3(\cos 25° + i\ \mathrm{sen}\ 25°)]^4$

b) $[2(\cos 40° + i\ \mathrm{sen}\ 40°)]^9$

c) $[5(\cos 115° + i\ \mathrm{sen}\ 115°)]^7$

d) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\ \frac{\pi}{3}\right)^3$

e) $\left[3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i\ \mathrm{sen}\ \frac{3\pi}{2}\right)\right]^4$

a) $(3(\cos 25° + i\ \mathrm{sen}\ 25°))^4 = 81(\cos 100° + i\ \mathrm{sen}\ 100°)$

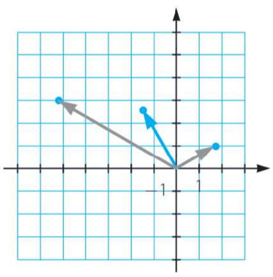
b) $(2(\cos 40° + i\ \mathrm{sen}\ 40°))^4 = 512(\cos 0° + i\ \mathrm{sen}\ 0°) = 512$

c) $(5(\cos 115° + i\ \mathrm{sen}\ 115°))^7 = 78\,125(\cos 85° + i\ \mathrm{sen}\ 85°)$

d) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\ \frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos \pi + i\ \mathrm{sen}\ \pi = -1$

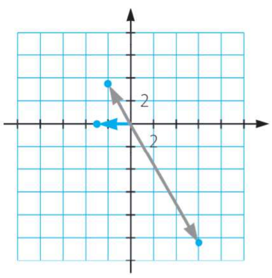
e) $\left(3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i\ \mathrm{sen}\ \frac{3\pi}{2}\right)\right)^4 = 81(\cos 0 + i\ \mathrm{sen}\ 0) = 81$

71. **Dibuja los números $2_{30°}$ y $6_{150°}$. ¿Por qué número complejo hay que multiplicar al primero para obtener el segundo?**



Hay que multiplicar por $3_{120°}$.

72. **Dibuja los números $12_{300°}$ y $4_{120°}$. ¿Por qué númerocomplejo hay que dividir al primero para obtener el segundo?**



Hay que dividir entre $3_{180°}$.

73. Calcula las soluciones de las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$ c) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}}$ e) $\sqrt[4]{9_{220°}}$

b) $\sqrt[5]{1_{150°}}$ d) $\sqrt[6]{64_{180°}}$ f) $\sqrt[6]{2_{75°}}$

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo = 4.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{120° + 0 \cdot 360°}{3} = 40°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{120° + 1 \cdot 360°}{3} = 160°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{120° + 2 \cdot 360°}{3} = 280°$

Por tanto, las raíces son $4_{40°}$, $4_{160°}$, $4_{280°}$.

b) El módulo de las soluciones será la raíz quinta de 1 = 1.

Existirán tantos números como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{150° + 0 \cdot 360°}{5} = 30°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{150° + 1 \cdot 360°}{5} = 102°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{150° + 2 \cdot 360°}{5} = 174°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{150° + 3 \cdot 360°}{5} = 246°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{150° + 4 \cdot 360°}{5} = 318°$

Por tanto, las raíces son $1_{30°}$, $1_{102°}$, $1_{174°}$, $1_{246°}$, $1_{318°}$.

c) El módulo de las soluciones será la raíz quinta de 32 = 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{225° + 0 \cdot 360°}{5} = 45°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{225° + 1 \cdot 360°}{5} = 117°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{225° + 2 \cdot 360°}{5} = 189°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{225° + 3 \cdot 360°}{5} = 261°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{225° + 4 \cdot 360°}{5} = 333°$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{117°}$, $2_{189°}$, $2_{261°}$, $2_{333°}$.

d) El módulo de las soluciones será la raíz sexta de 64 = 2.

Existirán tantos números como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{6} = 30^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{6} = 90^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{6} = 150^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{180^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{6} = 210^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{180^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{6} = 270^\circ$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \dfrac{180^\circ + 5 \cdot 360^\circ}{6} = 330^\circ$

Por tanto, las raíces son 2_{30°, 2_{90°, 2_{150°, 2_{210°, 2_{270°, 2_{330°.

e) El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de 9 = $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{220^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 55^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{220^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 145^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{220^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 235^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{220^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 325^\circ$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{55^\circ}$, $\sqrt{3}_{145^\circ}$, $\sqrt{3}_{235^\circ}$, $\sqrt{3}_{325^\circ}$.

f) El módulo de las soluciones será la raíz sexta de 2.

Existirán tantos números como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{75^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{6} = 12{,}5^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{75^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{6} = 72{,}5^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{75^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{6} = 132{,}5^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{75^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{6} = 192{,}5^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{75^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{6} = 252{,}5^\circ$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \dfrac{75^\circ + 5 \cdot 360^\circ}{6} = 312{,}5^\circ$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{12{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{72{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{132{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{192{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{252{,}5^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{312{,}5^\circ}$.

74. **Calcula las siguientes raíces de números complejos.**

a) $\sqrt{1}$ c) $\sqrt[4]{1}$ e) $\sqrt[3]{i}$

b) $\sqrt[3]{1}$ d) $\sqrt{i}$ f) $\sqrt[4]{i}$

a) $\sqrt{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{180^\circ} = -1$ Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{0^\circ} = 1$

b) $\sqrt[3]{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{120^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{0^\circ} = 1$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{240^\circ}$

c) $\sqrt[4]{1} = 1_{\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{90^\circ} = i$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270^\circ} = -i$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{180^\circ} = -1$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{0^\circ} = 1$

d) $\sqrt{i} = 1_{\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{45^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{225^\circ}$

e) $\sqrt[3]{i} = 1_{\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{30^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270^\circ} = -i$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{150^\circ}$

f) $\sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{22,5^\circ}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{202,5^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{112,5^\circ}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{292,5^\circ}$

75. **Realiza las raíces y represéntalas.**

a) $\sqrt[6]{-16}$ c) $\sqrt[3]{16i}$ e) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$

b) $\sqrt[3]{-i}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$ f) $\sqrt[4]{625}$

a) $\sqrt[6]{-16} = \sqrt[6]{16_{180^\circ}}$

El módulo de las raíces será la raíz sexta de 16 = $\sqrt[3]{4}$.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180^\circ + 0\cdot 360^\circ}{6} = 30^\circ$

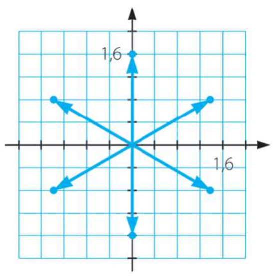
Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180^\circ + 1\cdot 360^\circ}{6} = 90^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180^\circ + 2\cdot 360^\circ}{6} = 150^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{180^\circ + 3\cdot 360^\circ}{6} = 210^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{180^\circ + 4\cdot 360^\circ}{6} = 270^\circ$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \dfrac{180^\circ + 5\cdot 360^\circ}{6} = 330^\circ$



Por tanto, las raíces son $\sqrt[3]{4}_{30^\circ}$, $\sqrt[3]{4}_{90^\circ} = \sqrt[3]{4}i$, $\sqrt[3]{4}_{150^\circ}$, $\sqrt[3]{4}_{210^\circ}$, $\sqrt[3]{4}_{270^\circ} = -\sqrt[3]{4}i$, $\sqrt[3]{4}_{330^\circ}$.

b) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}}$

El módulo de las raíces será la raíz cúbica de $1 = 1$.

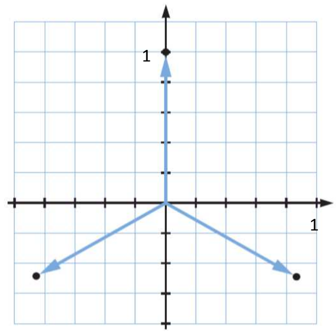
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 90^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 210^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 330^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{90°, 1_{210°, 1_{330°.



c) $\sqrt[3]{16i} = \sqrt[3]{16_{90^\circ}}$

El módulo de las raíces será la raíz cúbica de $16 = 2\sqrt[3]{2}$.

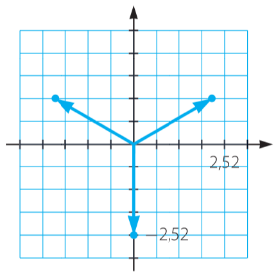
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 150^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 270^\circ$

Por tanto, las raíces son $2\sqrt[3]{2}_{30^\circ}$, $2\sqrt[3]{2}_{150^\circ}$, $2\sqrt[3]{2}_{270^\circ} = -2\sqrt[3]{2}i$.



d) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i} = \sqrt[3]{1_{45^\circ}}$

El módulo de las raíces será la raíz cúbica de $1 = 1$.

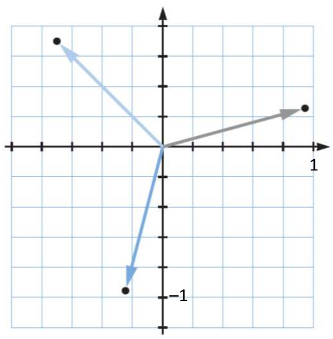
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{45^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 15^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{45^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 135^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{45^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 255^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{15°, 1_{135°, 1_{255°.



e) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{300°}}$

El módulo de las raíces será la raíz quinta de 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

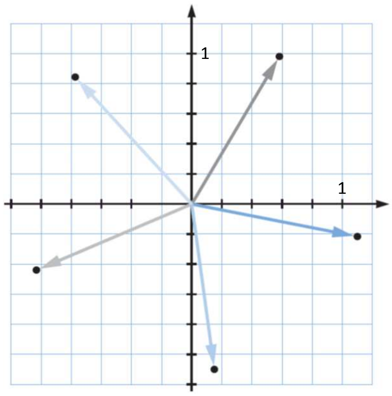
Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{300° + 0 \cdot 360°}{5} = 60°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{300° + 1 \cdot 360°}{5} = 132°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{300° + 2 \cdot 360°}{5} = 204°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{300° + 3 \cdot 360°}{5} = 276°$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{300° + 4 \cdot 360°}{5} = 348°$



Por tanto, las raíces son $\sqrt[5]{2}_{60°}$, $\sqrt[5]{2}_{132°}$, $\sqrt[5]{2}_{204°}$, $\sqrt[5]{2}_{276°}$, $\sqrt[5]{2}_{348°}$.

f) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{625_{0°}}$

El módulo de las raíces será la raíz cuarta de $625 = 5$.

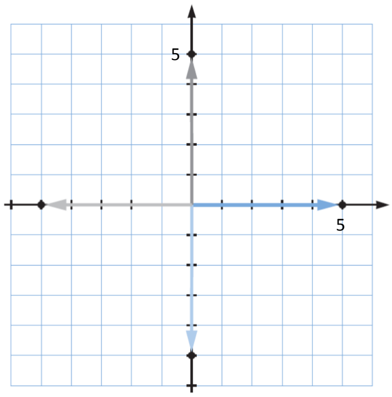
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{0° + 0 \cdot 360°}{4} = 0°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{0° + 1 \cdot 360°}{4} = 90°$

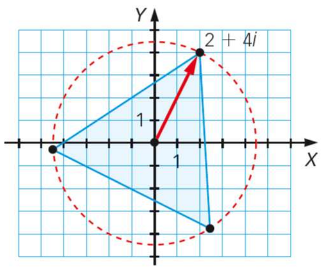
Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{0° + 2 \cdot 360°}{4} = 180°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{0° + 3 \cdot 360°}{4} = 270°$



Por tanto, las raíces son $5_{0°}$, $5_{90°}$, $5_{180°}$, $5_{270°}$.

76. Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $2 + 4i$. Halla las otras dos.



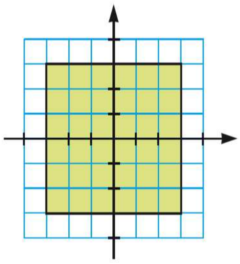
Las otras dos raíces tendrán el mismo módulo.

$z_1 = 2 + 4i = \sqrt{20}_{63,435°}$

$z_2 = \sqrt{20}_{63,435°} \cdot 1_{120°} = \sqrt{20}_{183,435°}$

$z_3 = \sqrt{20}_{63,435°} \cdot 1_{240°} = \sqrt{20}_{303,435°}$

77. **Los vértices del polígono representado son las raíces cuartas de un número complejo.**



Determina el número y sus raíces.

Las raíces son:

$z_1 = 4 + 4i = \sqrt{32}_{45°}$ $z_2 = -4 + 4i = \sqrt{32}_{135°}$ $z_3 = -4 - 4i = \sqrt{32}_{225°}$ $z_4 = 4 - 4i = \sqrt{32}_{315°}$

El número es:

$z = 1\,024_{180°} = -1\,024$.

78. **El número complejo $2_{30°}$ es uno de los vértices de un pentágono regular. Calcula los otros cuatro vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son dichos números.**

Las raíces son:

$z_1 = 2_{30°}$ $z_2 = 2_{102°}$ $z_3 = 2_{174°}$ $z_4 = 2_{246°}$ $z_5 = 2_{318°}$.

El número es $z = 32_{150°}$.

79. **Encuentra n y z de manera que dos de las soluciones de $\sqrt[n]{z}$ sean $6_{30°}$ y $6_{120°}$. ¿Hay una única solución? ¿Cuál es el menor número n que puedes encontrar?**

Sea $z = r_\alpha$.

La raíz n-ésima de r debe ser 6.

El argumento debe ser múltiplo de 30 y de 120.

La solución no es única.

El menor número que cumple las condiciones es $n = 4$.

$z_1 = 1\,296_{120°}$

Otra solución es $n = 8$.

$z_2 = 1\,679\,616_{240°}$

80. **Calcula todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^5 + 1 = 0$ c) $x^5 - 1 = 0$

b) $x^4 - 625 = 0$ d) $x^4 + 16 = 0$

a) $x=\sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{1_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta de 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\dfrac{180^\circ+0\cdot 360^\circ}{5}=36^\circ$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\dfrac{180^\circ+1\cdot 360^\circ}{5}=108^\circ$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\dfrac{180^\circ+2\cdot 360^\circ}{5}=180^\circ$

Si $k=3 \rightarrow \beta_4=\dfrac{0^\circ+3\cdot 360^\circ}{5}=252^\circ$

Si $k=4 \rightarrow \beta_5=\dfrac{180^\circ+3\cdot 360^\circ}{5}=324^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{36°, 1_{108°, 1_{180°, 1_{252°, 1_{324°.

b) $x=\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{625_{0^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de $625=5$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\dfrac{0^\circ+0\cdot 360^\circ}{4}=0^\circ$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\dfrac{0^\circ+1\cdot 360^\circ}{4}=90^\circ$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\dfrac{0^\circ+2\cdot 360^\circ}{4}=180^\circ$

Si $k=3 \rightarrow \beta_4=\dfrac{0^\circ+3\cdot 360^\circ}{4}=270^\circ$

Por tanto, las raíces son 5_{0°, 5_{90°, 5_{180°, 5_{270°.

c) $x=\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{1_{0^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta de 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\dfrac{0^\circ+0\cdot 360^\circ}{5}=0^\circ$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\dfrac{0^\circ+1\cdot 360^\circ}{5}=72^\circ$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\dfrac{0^\circ+2\cdot 360^\circ}{5}=144^\circ$

Si $k=3 \rightarrow \beta_4=\dfrac{0^\circ+3\cdot 360^\circ}{5}=216^\circ$

Si $k=4 \rightarrow \beta_5=\dfrac{0^\circ+4\cdot 360^\circ}{5}=288^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{0°, 1_{72°, 1_{144°, 1_{216°, 1_{288°.

d) $x=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de 16 = 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \longrightarrow \beta_1=\dfrac{180^\circ+0\cdot 360^\circ}{4}=45^\circ$

Si $k=1 \longrightarrow \beta_2=\dfrac{180^\circ+1\cdot 360^\circ}{4}=135^\circ$

Si $k=2 \longrightarrow \beta_3=\dfrac{180^\circ+2\cdot 360^\circ}{4}=225^\circ$

Si $k=3 \longrightarrow \beta_4=\dfrac{180^\circ+3\cdot 360^\circ}{4}=315^\circ$

Por tanto, las raíces son 2_{45°, 2_{135°, 2_{225°, 2_{315°.

81. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2-4x+13=0$
b) $x^4-8x=0$
c) $x^4-6x^2-9=0$
d) $x^4+27x=0$

a) $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=2\pm 3i$

b) $x\left(x^3-8\right)=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{8_{0^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 8 = 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \longrightarrow \beta_1=\dfrac{0^\circ+0\cdot 360^\circ}{3}=0^\circ$

Si $k=1 \longrightarrow \beta_2=\dfrac{0^\circ+1\cdot 360^\circ}{3}=120^\circ$

Si $k=2 \longrightarrow \beta_3=\dfrac{0^\circ+2\cdot 360^\circ}{3}=240^\circ$

Por tanto, las raíces son 0, 2, 2_{120°, 2_{140°.

c) $t=x^2$

$t=\dfrac{6\pm\sqrt{36+36}}{2}=3\pm 3\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{3+3\sqrt{2}}$

$x_2=-\sqrt{3+3\sqrt{2}}$

$x_3=\sqrt{3-3\sqrt{2}}=i\sqrt{3\left(\sqrt{2}-1\right)}$

$x_4=-\sqrt{3-3\sqrt{2}}=-i\sqrt{3\left(\sqrt{2}-1\right)}$

d) $x\,(x^3+27)=0$

$$x=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^\circ}}$$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 27 = 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \longrightarrow \beta_1=\dfrac{180^\circ+0\cdot 360^\circ}{3}=60^\circ$

Si $k=1 \longrightarrow \beta_2=\dfrac{180^\circ+1\cdot 360^\circ}{3}=180^\circ$

Si $k=2 \longrightarrow \beta_3=\dfrac{180^\circ+2\cdot 360^\circ}{3}=300^\circ$

Por tanto, las raíces son 0, 3_{60°, 3_{180°, 3_{300°.

82. Realiza las siguientes operaciones con complejos.

a) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{i}}$ b) $\sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i}}$ c) $\sqrt[3]{(2-i)^2-3(1-i)}$

a) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{i}}=\sqrt[4]{-16i}=\sqrt[4]{16_{270^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de 16 = 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \longrightarrow \beta_1=\dfrac{270^\circ+0\cdot 360^\circ}{4}=67{,}5^\circ$

Si $k=1 \longrightarrow \beta_2=\dfrac{270^\circ+1\cdot 360^\circ}{4}=157{,}5^\circ$

Si $k=2 \longrightarrow \beta_3=\dfrac{270^\circ+2\cdot 360^\circ}{4}=247{,}5^\circ$

Si $k=3 \longrightarrow \beta_4=\dfrac{270^\circ+3\cdot 360^\circ}{4}=337{,}5^\circ$

Por tanto, las raíces son $2_{67{,}5^\circ}$, $2_{157{,}5^\circ}$, $2_{247{,}5^\circ}$, $2_{337{,}5^\circ}$.

b) $\sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i}}=\sqrt{\dfrac{-1+i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}}=\sqrt{i}=\sqrt{1_{90^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada de 1 = 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \longrightarrow \beta_1=\dfrac{90^\circ+0\cdot 360^\circ}{2}=45^\circ$

Si $k=1 \longrightarrow \beta_2=\dfrac{90^\circ+1\cdot 360^\circ}{2}=225^\circ$

Por tanto, las raíces son 1_{45°, 1_{225°.

c) $\sqrt[3]{(2-i)^2-3(1-i)}=\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1_{270°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de 1 = 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\dfrac{270°+0\cdot 360°}{3}=90°$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\dfrac{270°+1\cdot 360°}{3}=210°$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\dfrac{270°+2\cdot 360°}{3}=330°$

Por tanto, las raíces son $1_{90°}$, $1_{210°}$, $1_{330°}$.

83. Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

$$\sqrt[4]{\frac{12_{70°}\cdot(1_{20})^4}{3+3\sqrt{3}i}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{12_{70°}\cdot(1_{20})^4}{3+3\sqrt{3}i}}=\sqrt[4]{\frac{12_{70°}\cdot 1_{80°}}{6_{60°}}}=\sqrt[4]{2_{90°}}$$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k=0 \rightarrow \beta_1=\dfrac{90°+0\cdot 360°}{4}=22,5°$

Si $k=1 \rightarrow \beta_2=\dfrac{90°+1\cdot 360°}{4}=112,5°$

Si $k=2 \rightarrow \beta_3=\dfrac{90°+2\cdot 360°}{4}=202,5°$

Si $k=3 \rightarrow \beta_4=\dfrac{90°+3\cdot 360°}{4}=292,5°$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[4]{2}_{22,5°}$, $\sqrt[4]{2}_{112,5°}$, $\sqrt[4]{2}_{202,5°}$, $\sqrt[4]{2}_{292,5°}$.

84. Escribe una ecuación de segundo grado con coeficientes reales que tenga por soluciones estos números complejos.

a) $1-i$ b) $3-2i$

a) Como $1-i$ es solución, entonces $1+i$ también lo es.

$(x-(1+i))(x-(1-i))=x^2-2x+2$

b) Como $3-2i$ es solución, entonces $3+2i$ también lo es.

$(x-(3+2i))(x-(3-2i))=x^2-6x+13$

85. **Calcula el valor de m para que el polinomio**

$$x^2 - 6x - m$$

tenga la raíz $3 - i$. Halla la raíz que falta.

$(3-i)^2 - 6(3-i) - m = 0 \rightarrow 8 - 6i - 18 + 6i = m \rightarrow m = -10$

La raíz que falta es $3 + i$.

86. **Calcula el valor de los números complejos p y q para que el polinomio**

$$x^3 + px^2 + qx - 2$$

tenga las raíces i y $2i$. Halla la raíz que falta.

$(x-i)(x-2i) = x^2 - 3xi - 2$

$(x^2 - 3xi - 2)(x - a) = x^3 + (-a - 3i)x^2 + (-2 + 3ia)x + 2a \rightarrow a = -1$

$p = 1 - 3i$

$q = -2 - 3i$

La raíz que falta es $x = a = -1$.

87. **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 + ix + 1 = 0$

b) $x^2 - 2x + 3i = 0$

c) $ix^2 + 7x - 12i = 0$

d) $ix^3 + 27 = 0$

a) $x = \dfrac{-i \pm \sqrt{-1-4}}{2} = \dfrac{-i \pm \sqrt{5}i}{2} \rightarrow x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}i,\ x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}i$

b) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 1 + i\sqrt{2},\ x_2 = 1 - i\sqrt{2}$

c) $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2i} = \dfrac{-7 \pm 1}{2i} \rightarrow x_1 = 3i,\ x_2 = 4i$

d) $x^3 = \dfrac{-27}{i} = 27i \rightarrow x = \sqrt[3]{27_{90^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica de $27 = 3$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 150^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 270^\circ$

Por tanto, las raíces son 3_{30°, 3_{150°, 3_{270°.

88. **Halla el valor de b para que la siguiente operación sea cierta.**

$$4_{72°} \cdot (1 + bi) = 8_{132°}$$

$$1 + bi = \frac{8_{132°}}{4_{72°}} = 2_{60°} \rightarrow tg\ 60° = \sqrt{3} = b$$

89. **¿Qué número complejo hay que sumarle a $-3 + 2i$ para que resulte $5_{270°}$? ¿Y para que resulte $6_{\frac{5\pi}{3}}$?**

$(-3 + 2i) + (a + bi) = -5i \rightarrow a = 3, b = -7$
$(-3 + 2i) + (a + bi) = 3 - 3\sqrt{3}i \rightarrow a = 6, b = -2 - 3\sqrt{3}$

90. **Comprueba que las siguientes raíces suman 0.**

a) Las raíces cuartas de $-1 + \sqrt{3}i$.
b) Las raíces sextas de 64.

a) Las soluciones de $\sqrt[4]{2}_{120°}$ son $\sqrt[4]{2}_{120°}$, $\sqrt[4]{2}_{120°}$, $\sqrt[4]{2}_{210°}$, $\sqrt[4]{2}_{300°}$.

$$\sqrt[4]{2}(cos\ 30° + i\ sen\ 30°) + \sqrt[4]{2}(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) + \sqrt[4]{2}(cos\ 210° + i\ sen\ 210°) + \sqrt[4]{2}(cos\ 300° + i\ sen\ 300°) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

b) Las soluciones de $\sqrt[6]{64}$ son $2_{0°}$, $2_{60°}$, $2_{120°}$, $2_{180°}$, $2_{240°}$, $2_{300°}$.

$$2(cos\ 0° + i\ sen\ 0°) + 2(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) + 2(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) +$$

$$+ 2(cos\ 180° + i\ sen\ 180°) + 2(cos\ 240° + i\ sen\ 240°) + 2(cos\ 300° + i\ sen\ 300°) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

91. **Averigua el valor que debe tener k para que $\frac{2 + i}{k - i}$ sea un número real. ¿De qué número real se trata?**

$$\frac{2+i}{k-i} \cdot \frac{k+i}{k+i} = \frac{2k - 1 + (2+k)i}{k^2 + 1} \rightarrow k = -2$$

El número es $\frac{-4-1}{4+1} = -1$.

92. **Averigua el valor que debe tener k para que $\frac{k - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata?**

$$\frac{k - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - i} \cdot \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} + i} = \frac{\sqrt{2}k + \sqrt{2} + (k-2)i}{2+1} \rightarrow k = -1$$

El número es $\frac{-3i}{3} = -i$.

93. **Calcula el valor de *a* para que el número $\frac{6-2i}{1+ai}$ sea:**

a) Un número imaginario puro.

b) Un número real.

c) El número complejo $2-4i$.

d) Un número complejo con módulo 1.

e) Un número complejo con argumento $\frac{7\pi}{4}$.

$$\frac{6-2i}{1+ai}\cdot\frac{1-ai}{1-ai}=\frac{6-2a+(-6a-2)i}{1+a^2}$$

a) $6-2a=0\rightarrow a=3$

b) $-6-2a=0\rightarrow a=-3$

c) $\frac{6-2i}{2-4i}=\frac{3-i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{5+5i}{5}=1+i\rightarrow a=1$

d) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{1+a^2}}=1\rightarrow 40=1+a^2\rightarrow a=\pm\sqrt{39}$

e) $\frac{\sqrt{40}_{arc\,tg\left(-\frac{1}{3}\right)}}{\sqrt{1+a^2}_{arc\,tg\,a}}=r_{\frac{7\pi}{4}}$

$$arc\,tg\left(-\frac{1}{3}\right)-arc\,tg\,a=\frac{7\pi}{4}\rightarrow arc\,tg\,a=arc\,tg\left(-\frac{1}{3}\right)-315^{\circ}\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

94. **Halla el valor de *a* para que el siguiente número complejo cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.**

$$a+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Calculamos el cuadrado: $\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=a^2-\frac{3}{4}+\sqrt{3}ai$

Hallamos el conjugado: $a-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\left.\begin{cases}a^2-\frac{3}{4}=a\\ \sqrt{3}a=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\right\}\rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

95. **Resuelve la ecuación $\frac{xi}{1+3i}-\frac{2x}{4-i}=1$.**

$$xi\,(4-i)-2x\,(1+3i)=(1+3i)(4-i)\rightarrow x\,(4i+1-2-6i)=7+11i\rightarrow x=\frac{7+11i}{-1-2i}\cdot\frac{-1+2i}{-1+2i}=\frac{-29+3i}{5}$$

96. **Halla el número complejo que cumple que su cubo es un número real y que la parte real del mismo número es una unidad superior a la parte imaginaria.**

$a = b + 1$

$(b + 1 + bi)^3 = -2b^3 + 6b^2i + 2b^3i + 3b + 3bi + 1$

$2b^3 + 6b^2 + 3b = 0 \rightarrow b\,(2b^2 + 6b + 3) = 0$

Los números son (1, 0), $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

97. **Halla los números complejos cuyo cubo es igual a su conjugado.**

$(r_\alpha)^3 = r_{-\alpha} \rightarrow r = 1$

$3\alpha = -\alpha \rightarrow \alpha = 0°$ $\qquad$ $3\alpha = 720° - \alpha \rightarrow \alpha = 180°$

$3\alpha = 360° - \alpha \rightarrow \alpha = 90°$ $\qquad$ $3\alpha = 1\,080° - \alpha \rightarrow \alpha = 270°$

Los números son 1, i, -1, $-i$.

98. **Calcula c sabiendo que la representación gráfica de $\frac{12 + ci}{-5 + 2i}$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante.**

Para que esté sobre la bisectriz del primer cuadrante, la parte imaginaria debe ser igual a la parte real.

$$\frac{12 + ci}{-5 + 2i} = \frac{(12 + ci)(-5 - 2i)}{(-5 + 2i)(-5 - 2i)} = \frac{-60 + 2c + (-24 - 5c)i}{29}$$

$-60 + 2c = -24 - 5c \rightarrow c = \frac{36}{7}$

99. **Halla dos números complejos conjugados tales que su diferencia sea $6i$ y su cociente la unidad imaginaria.**

$(a + bi) - (a - bi) = 2bi = 6i \rightarrow b = 3$

$$\frac{a+bi}{a-bi}\cdot\frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - 9 + 6ai}{9 + a^2} = i$$

$a^2 - 9 = 0$ y $\frac{6a}{18} = 1 \rightarrow a = 3$

Los números son $3 + 3i$ y $3 - 3i$.

100. **La ecuación $z^3 + az^2 + bz - 6i = 0$ tiene por raíces 2 y 3. Calcula el valor de a, b y el resto de raíces.**

$$\left.\begin{array}{l} 8 + 4a + 2b - 6i = 0 \\ 27 + 9a + 3b - 6i = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -5 - i,\ b = 6 + 5i$$

$$z^3 - (5+i)z^2 + (6+5i)z - 6i = (z-3)(z-2)(z-a) = z^3 - az^2 - 5z^2 + 5za + 6z - 6a \rightarrow a = i$$

La otra raíz es $z = i$.

101. **Halla dos números complejos, *z* y *w*, tales que su suma sea *i*, y 2*i* sea una raíz cuadrada de su cociente.**

$z = a + bi \qquad\qquad w = c + di$

$(a + bi) + (c + di) = i \to a = -c,\ b = 1 - d$

$$\sqrt{\frac{-c+(1-d)i}{c+di}} = 2i \to -c+(1-d)i = -4(c+di) \to c = 0,\ d = -\frac{1}{3}$$

$z = \frac{4}{3}i \qquad\qquad w = -\frac{1}{3}i$

102. **Encuentra un número complejo que al sumarle $\frac{1}{2}$ dé como resultado otro número complejo de módulo *c* y argumento 60°.**

$$a+bi+\frac{1}{2} = a+\frac{1}{2}+bi$$

$$c = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$tg\ 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{b}{a+\frac{1}{2}} \to b = \sqrt{3}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$c = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(a+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$a = \frac{c-1}{2},\ b = \sqrt{3}\,\frac{c}{2}$$

El número complejo es de la forma $\frac{c-1}{2} + \sqrt{3}\,\frac{c}{2}i$.

103. **Busca un número complejo que sumándole $\frac{1+i}{2-2i}$ dé otro complejo de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45°.**

$$\frac{1+i}{2-2i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{i}{2}$$

$$a+bi+\frac{1}{2}i = a+\left(b+\frac{1}{2}\right)i$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{a^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2} \to a^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$tg\ 45^\circ = 1 = \frac{b+\frac{1}{2}}{a} \to a = b+\frac{1}{2}$$

$$a = 1,\ b = \frac{1}{2}$$

El número complejo es $1+\frac{1}{2}i$.

104. **Halla el área del cuadrilátero cuyos vértices son las soluciones de la ecuación $x^4 + 4 = 0$.**

$x = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta de $4 = \sqrt{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180° + 0 \cdot 360°}{4} = 45°$

Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180° + 1 \cdot 360°}{4} = 135°$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180° + 2 \cdot 360°}{4} = 225°$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{180° + 3 \cdot 360°}{4} = 315°$

Por tanto, las raíces son $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$.

Es un cuadrado de lado 2: $A = l^2 = 2^2 = 4$.

105. **Un pentágono regular, con centro en el origen de coordenadas, tiene en $(-3, -2)$ uno de sus vértices. Halla los demás vértices usando números complejos.**

$z_2 = -3 - 2i$

Elevamos a la quinta: $z = \sqrt{13^5}_{213°\,41'\,24{,}2''}$

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{13}_{\frac{213°\,41'\,24{,}2'' + k \cdot 360°}{5}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{13}_{42°\,44'\,16{,}85''}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt{13}_{114°\,44'\,16{,}85''}$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt{13}_{186°\,44'\,16{,}85''}$

Si $k = 3 \rightarrow x_4 = \sqrt{13}_{258°\,44'\,16{,}85''}$

106. **¿Qué número complejo forma un triángulo equilátero con su conjugado y con -5?**

Sea L la longitud del lado del triángulo equilátero, uno de los vértices es el complejo $a + bi$ y el otro vértice es su conjugado $a - bi$.

$b = L \cdot \text{sen } 30° = \dfrac{L}{2}$ $\qquad a = -5 + L \cdot \cos 30° = -5 + \dfrac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$

Todos los triángulos tienen -5 como el vértice situado más a la izquierda.

Si el vértice -5 estuviera situado a la derecha del triángulo, las coordenadas de los otros vértices serían:

$b = L \cdot \text{sen } 30° = \dfrac{L}{2}$ $\qquad a = -5 - L \cdot \cos 30° = -5 - \dfrac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$

107. **Calcula el área del hexágono regular que determinan los afijos de las raíces sextas de -64.**

$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz sexta de 64: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

Si $k = 0 \rightarrow \beta_1 = \dfrac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{6} = 30^\circ$

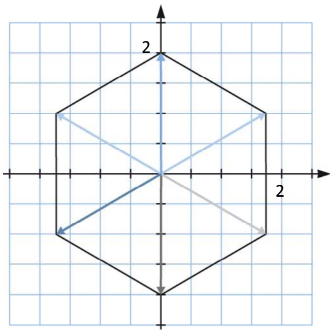
Si $k = 1 \rightarrow \beta_2 = \dfrac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{6} = 90^\circ$

Si $k = 2 \rightarrow \beta_3 = \dfrac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{6} = 150^\circ$

Si $k = 3 \rightarrow \beta_4 = \dfrac{180^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{6} = 210^\circ$

Si $k = 4 \rightarrow \beta_5 = \dfrac{180^\circ + 4 \cdot 360^\circ}{6} = 270^\circ$

Si $k = 5 \rightarrow \beta_6 = \dfrac{180^\circ + 5 \cdot 360^\circ}{6} = 330^\circ$



Por tanto, las raíces son 2_{30°, 2_{90°, 2_{150°, 2_{210°, 2_{270°, 2_{330°.

El área del hexágono es $A = \dfrac{p \cdot ap}{2} = \dfrac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ u^2.

108. **Las cuatro raíces cuartas de -4096 describen un cuadrado. Calcula su área. Además, sus raíces cúbicas describen un triángulo equilátero. Determina su área.**

Las raíces cuartas de –4 096 son:

$z_1 = 8_{45^\circ} = \left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ $z_3 = 8_{225^\circ} = \left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$

$z_2 = 8_{135^\circ} = \left(-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ $z_4 = 8_{315^\circ} = \left(4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$

Calculamos el lado: $\sqrt{\left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$.

Por tanto, el área es de 128.

Las raíces cúbicas de –4 096 son:

$z_1 = 16_{60^\circ} = \left(8, 8\sqrt{3}\right)$ $z_2 = 16_{180^\circ} = (-16, 0)$ $z_3 = 16_{300^\circ} = \left(8, -8\sqrt{3}\right)$

Se forma un triángulo cuya base mide 16 y su altura es de 24.

Por tanto, su área mide $192\sqrt{3}$ u^2.

109. **Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los afijos de los números $6 + 5i$ y $3 + i$. Determina el resto de sus vértices sabiendo que tiene uno en el cuarto cuadrante.**

El vector del lado es $(6 + 5i) - (3 + i) = 3 + 4i$ y el perpendicular es $4 - 3i$.

En el cuarto cuadrante estará el vértice $(3 + i) + (4 - 3i) = 7 - 2i$.

El vértice que falta es $(6 + 5i) + (4 - 3i) = 10 + 2i$.

110. El número complejo 3 + 5*i* es una de las raíces cúbicas de *z*. Halla las otras dos raíces.

$z_1 = 3 + 5i = \sqrt{35}_{59^\circ\,2'\,10{,}48''}$

Las raíces tendrán el mismo módulo.

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{35}_{59^\circ\,2'\,10{,}48'' + \frac{k\cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{35}_{59^\circ\,2'\,10{,}48''}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt{35}_{299^\circ\,2'\,10{,}48''}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt{35}_{179^\circ\,2'\,10{,}48''}$

111. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 + *i* y 3 − *i*. Haz lo mismo con −2 − 5*i* y −2 + 5*i*.

$(x - 3 + i)(x - 3 - i) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - ix - 3x + 9 + 3i + ix - 3i + 1 = 0$
$\rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$

$(x + 2 + 5i)(x + 2 - 5i) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 5ix + 2x + 4 - 10i + 5ix + 10i + 25 = 0$
$\rightarrow x^2 + 4x + 29 = 0$

112. Demuestra que si una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son números reales tiene dos raíces complejas, estas deben ser números conjugados.

Tenemos una ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \end{cases}$$

Luego sus soluciones son dos números complejos conjugados.

113. Calcula el producto de las dos raíces de $\sqrt{1}$ y el producto de las tres raíces de $\sqrt[3]{1}$. Ahora halla una fórmula para el producto de las *n* raíces *n*-ésimas de la unidad.

Las raíces cuadradas de 1 son 1_{0°, 1_{180° y su producto es $1_{180^\circ} = -1$.

Las raíces cúbicas de 1 son 1_{0°, 1_{120°, 1_{240° y su producto es $1_{360^\circ} = 1$.

El módulo del producto de las *n* raíces *n*-ésimas será 1.

El argumento del producto de las *n* raíces *n*-ésimas será:

$$\frac{360^\circ \cdot 0}{n} + \frac{360^\circ \cdot 1}{n} + \ldots + \frac{360^\circ \cdot (n-1)}{n} = \frac{360^\circ}{n} \cdot \left(0 + 1 + \ldots + (n-1)\right) = \frac{360^\circ \cdot n \cdot (n-1)}{2n} = 180^\circ (n-1)$$

El producto de las *n* raíces *n*-ésimas será $(-1)^{n+1}$.

114. Averigua la relación que existe entre el módulo de la suma de dos complejos y la suma de sus módulos.

El módulo de la suma de dos números complejos es siempre inferior a la suma de los módulos de los números.

115. ¿Es cierto que siempre que multiplicas un número real por un número complejo z el resultado tiene el mismo argumento que z?

Si no es cierto, enuncia una propiedad correcta.

No es cierto, ya que: $1_{180°} \cdot 1_{90°} = 1_{270°}$.

Solo es cierto si el número real es positivo.

Si multiplicamos un número real positivo por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z.

116. ¿Es cierto que el inverso del producto de dos números complejos es el producto de sus inversos?

Es cierto, pues, dados z_1 y z_2 dos números complejos cualesquiera, se tiene que:

$$(z_1 \cdot z_2)^{-1} = \frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}$$

117. Demuestra que para cualquier par de números complejos se cumple que:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Usando estas propiedades, demuestra que si $z = a + bi$ es una solución de la ecuación de grado n siguiente:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, entonces el valor $\overline{z}$ también es solución de la misma ecuación.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = a + c - (b+d)i = a - bi + c - di = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac - db + (bc+ad)i} = ac - bd - (bc+ad)i = (a-bi)(c-di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Veamos que si $z = a + bi$ es una solución de la ecuación de grado n, entonces $\overline{z}$ también es solución de la misma ecuación:

$$a_n(a+bi)^n + \ldots + a_1(a+bi) + a_0 = 0 \rightarrow \overline{a_n(a+bi)^n + \ldots + a_1(a+bi) + a_0} = \overline{0} = 0$$

$$\overline{a_n(a+bi)^n} + \ldots + \overline{a_1(a+bi)} + \overline{a_0} = a_n\overline{(a+bi)^n} + \ldots + a_1\overline{(a+bi)} + a_0 =$$

$$= a_n\overline{(a+bi)}^n + \ldots + a_1\overline{(a+bi)} + a_0 = a_n(a-bi)^n + \ldots + a_1(a-bi) + a_0 = 0$$

118. Resuelve en los números complejos las siguientes ecuaciones.

a) $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$

b) $z^4 + (4 - 2i)z^2 - 8i = 0$

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

a) $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-2+4i)}}{2} = 1 \pm \sqrt{3 - 4i} = 1 \pm \sqrt{5}_{306,87°} = 1 \pm (-2 + i)$

$z_1 = -1 + i \qquad z_2 = 3 - i$

b) $t = \dfrac{-4 + 2i \pm \sqrt{12 + 16i}}{2} = -2 + i \pm \sqrt{3 + 4i} = -2 + i \pm \sqrt{5}_{53,13°} = -2 + i \pm (-2 - i)$

$t_1 = 2i,\ t_2 = -4$

$z_1 = \sqrt{2}_{\frac{90°}{2}} = 1 + i \qquad z_2 = \sqrt{2}_{\frac{90°+360°}{2}} = -1 - i \qquad z_3 = \sqrt{4}_{\frac{180°}{2}} = 2i \qquad z_4 = \sqrt{4}_{\frac{180°+360°}{2}} = -2i$

c) $t = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 676}}{2} = -5 \pm 12i$

$t_1 = -5 + 12i$, $t_2 = -5 - 12i$

$z_1 = \sqrt{13}_{56,31°} = 2 + 3i$ $\quad z_2 = \sqrt{13}_{236,31°} = -2 - 3i$ $\quad z_3 = \sqrt{13}_{123,69°} = -2 + 3i$ $\quad z_4 = \sqrt{13}_{303,69°} = 2 - 3i$

119. Resuelve las siguientes ecuaciones con números complejos.

a) $\dfrac{z}{5-i} + (2-i)6i = -3 + 2i$

b) $z(-2+6i) + \dfrac{-41+37i}{4-3i} + 10 - 8i = z(1+7i)$

a) $\dfrac{z}{5-i} + (2-i)6i = -3+2i \rightarrow \dfrac{z}{5-i} + 6 + 12i = -3 + 2i$

$\rightarrow \dfrac{z}{5-i} = -9 - 10i \rightarrow z = (5-i)(-9-10i) \rightarrow z = -55 - 41i$

b) $z(-2+6i) + \dfrac{-41+37i}{4-3i} + 10 - 8i = z(1+7i) \rightarrow z(-2+6i) - 11 +$

$+ i + 10 - 8i = z(1+7i) \rightarrow z(-2+6i) - 1 - 7i = z(1+7i)$

$\rightarrow z(-2+6i) - z(1+7i) = 1 + 7i \rightarrow z(-2+6i-1-7i) = 1+7i$

$\rightarrow z = \dfrac{1+7i}{-3-i} \rightarrow z = -1 - 2i$

120. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\}$

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8i \pm \sqrt{-64 - 4\cdot 1\cdot(4i-19)}}{2\cdot 1} = \dfrac{8i \pm \sqrt{10 - 16i}}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\} \xrightarrow{x = iy} y - i(iy) = 4 - 6i \rightarrow y + y = 4 - 6i \rightarrow y = 2 - 3i$

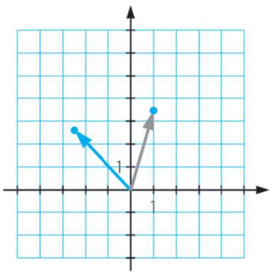
$x = i(2-3i) = 3 + 2i$

121. Representa el número complejo $1 + 2\sqrt{3}i$ y realiza en este punto un giro de 60° centrado en el origen. Halla las expresiones binómica y polar del número complejo resultante.

$z = 1 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{13}_{73°\,53'\,52,39''}$

Hacemos un giro de 60°:

$\sqrt{13}_{133°\,53'\,52,39''} = -2,5 + 2,6i$



122. **La suma de dos números complejos conjugados es 16 y la suma de sus módulos es 20. ¿Cuáles son estos números?**

Sea $z = a + bi$.

$$\left.\begin{array}{r} a + bi + a - bi = 16 \\ \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (-b)^2} = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 8 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 64 + b^2 = 100 \rightarrow b = \pm 6$$

Los números son: $8 + 6i$ y $8 - 6i$.

123. **Sea $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Comprueba que si $z = -2 + 5i$, entonces z, $u \cdot z$ y $u^2 \cdot z$ son las tres raíces cúbicas de un número complejo. Demuestra que eso sucede para cualquier número z. ¿Qué tiene de particular el número u?**

$$z = -2 + 5i = \sqrt{29}_{111^\circ\,48'\,5{,}07''}$$

$$u \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2 + 5i) = 1_{120^\circ} \cdot \sqrt{29}_{111^\circ\,48'\,5{,}07''} = \sqrt{29}_{231^\circ\,48'\,5{,}07''}$$

$$u^2 \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 (-2 + 5i) = 1_{120^\circ} \cdot \sqrt{29}_{111^\circ\,48'\,5{,}07''} = \sqrt{29}_{351^\circ\,48'\,5{,}07''}$$

Son las raíces cúbicas de $29_{335^\circ\,24'\,15{,}2''}$.

Esto sucede para cualquier número complejo, ya que las raíces cúbicas de un número complejo tienen el mismo módulo y su argumento se diferencia en 120°.

Al multiplicar cualquier número por u, su módulo no varía y su argumento aumenta 120°.

124. **Del número complejo z_1 se sabe que su argumento es 150°, y el módulo de z_2 es 2. Calcula z_1 y z_2 sabiendo que su producto es $-8i$.**

$$z_1 = r_{150^\circ}$$

$$z_2 = 2_\alpha$$

$$-8i = 8_{270^\circ}$$

$$r_{150^\circ} \cdot 2_\alpha = 8_{270^\circ}$$

$$\left.\begin{array}{r} r \cdot 2 = 8 \\ 150^\circ + \alpha = 270^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} r = 4 \\ \alpha = 120^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 4_{150^\circ} \\ z_2 = 2_{120^\circ} \end{array}$$

125. **Uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen tiene coordenadas $(-1, 3)$. Utiliza los números complejos para determinar los otros vértices y su área.**

Módulo: $\sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Argumento: $tg\, \alpha = \frac{3}{-1} \rightarrow \alpha = 108{,}43^\circ$

Los vértices son: $\sqrt{10}_{18{,}43^\circ} = \sqrt{10}(\cos 18{,}43^\circ + i\,\mathrm{sen}\, 18{,}43^\circ) = 3 + i \rightarrow (3, 1)$

$\sqrt{10}_{108{,}43^\circ} \rightarrow (-1, 3)$ $\quad$ $\sqrt{10}_{198{,}43^\circ} \rightarrow (-3, -1)$ $\quad$ $\sqrt{10}_{288{,}43^\circ} \rightarrow (1, -3)$

El área del cuadrado es $\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 40$ u².

126. Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética de diferencia $1 + 2i$ y cuyo primer término es $-6 - 2i$.

$d = 1 + 2i$

$a_1 = -6 - 2i$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$a_{10} = -6 - 2i + (10 - 1)(1 + 2i) = 3 + 16i$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(-6 - 2i + 3 + 16i)10}{2} = -15 + 70i$$

127. Simplifica la siguiente expresión para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^n$$

Observamos que $1 + i + i^2 + i^3 = 0$.

Sea $m \in \mathbb{N}$:

Si $n = 4m - 4$ entonces la expresión vale 1.

Si $n = 4m - 3$ entonces la expresión vale $1 + i$.

Si $n = 4m - 2$ entonces la expresión vale i.

Si $n = 4m - 1$ entonces la expresión vale 0.

128. Si el número complejo $a + bi$ tiene módulo m y argumento α, ¿cómo expresarías en forma binómica un número complejo con módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$? ¿Y si el módulo es $3m$ y el argumento es $\alpha + \frac{3\pi}{2}$?

Sea $w = c + di$ el número complejo que tiene por módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$.

$c = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos(2\pi - \alpha) = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$

$d = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}(2\pi - \alpha) = -6\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}\,\alpha$

Sea $v = e + fi$ el número complejo que tiene por módulo $3m$ y argumento $\alpha + \frac{3\pi}{2}$.

$$e = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}\,\alpha$$

$$f = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \text{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$$

129. **Sea $z = r_\alpha$ un número complejo en forma polar y $\bar{z}$ su conjugado. Calcula el valor del cociente.**

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(z+\bar{z})\cdot[z^2+(\bar{z})^2]\cdot\ldots\cdot[z^n+(\bar{z})^n]}$$

$$z = r_\alpha = r\,(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)$$

$$\bar{z} = r_{360^\circ-\alpha} = r\,(\cos\alpha - i\,sen\,\alpha)$$

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(z+\bar{z})\cdot\left(z^2+(\bar{z})^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^n+(\bar{z})^n\right)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(r\,(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha) + r\,(\cos\alpha - i\,sen\,\alpha))\cdot\ldots\cdot(r^n\,(\cos n\alpha + i\,sen\,n\alpha) + r^n\,(\cos n\alpha - i\,sen\,n\alpha))} =$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{2r\cos\alpha \cdot 2r^2\cos 2\alpha \cdot 2r^n\cos n\alpha} = \frac{1}{2^n \cdot r^{\frac{n+n^2}{2}}}$$

130. **Dada la ecuación $z^2 + (a+bi)z + c + di = 0$, con a, b, c y d números reales, encuentra la relación entre ellos para que sus raíces tengan el mismo argumento.**

$$z^2 + (a+bi)z + c + di = 0$$

$$z = \frac{-a-bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 4(c+di)}}{2} = \frac{-a-bi \pm \sqrt{a^2-b^2+2abi-4c-4di}}{2}$$

Para que tengan el mismo argumento, el cociente entre la parte imaginaria y la parte entera debe ser el mismo.

$$a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 4c &= 0 \\ 2ab - 4d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Como solo tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas tenemos que dejar dos de las incógnitas en función de las otras.

$$a_1 = \frac{\left(\sqrt{2c^2+2d^2}+\sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}-c}}{d} \qquad b_1 = \sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}-2c}$$

$$a_2 = -\frac{\left(\sqrt{2c^2+2d^2}+\sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}-c}}{d} \qquad b_2 = -\sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}-2c}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}+c}\left(\sqrt{2c^2+2d^2}-\sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_3 = -\sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}+2ci}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{-\sqrt{c^2+d^2}+c}\left(\sqrt{2c^2+2d^2}-\sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_4 = \sqrt{2\sqrt{c^2+d^2}+2ci}$$

PARA PROFUNDIZAR

131. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

¿Cuántas ternas ordenadas (x, y, z) de enteros no negativos menores que 20 verifican que hay justamente dos elementos distintos en el conjunto $\{i^x, (1+i)^y, z\}$, siendo $i^2=-1$?	149	205	215	225	235
Uno de los números complejos z que verifican el sistema $\begin{cases} z\cdot t = 6_{60} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ}\end{cases}$ es:	$2+2\sqrt{3}i$	$2\sqrt{3}-2i$	$3+3i$	$2+2i$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
¿Cuál de los siguientes números no es raíz del polinomio z^4-5z^2-36?	$2i$	2_{180°	2_{270°	3_{180°	3
¿Para qué valor de n se verifica que $i+2i^2+3i^3++4i^4+\ldots+ni^n$ es el número complejo $48+49i$?	24	48	49	97	98
El valor de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$ es:	1	16	243	1024	$-1-\sqrt{3}$

□ Para que en una terna dos elementos sean distintos, tiene que suceder que dos de ellos sean iguales y el tercero diferente. En este caso puede suceder que $i^x=z$, $i^x=(1+i)^y$ o $(1+i)^y=z$.

Si lo pasamos a polares, tenemos $\{1_{90x}, \sqrt{2^y}_{45\cdot y}, z_0\}$.

Si $i^x=z$ e $y\neq z$, implica que $1_{90x}=z_0$ y $\sqrt{2^y}_{45\cdot y}\neq 1_{90x}$.

$1_{90x}=z_0 \longrightarrow z=1$ y x es múltiplo de 4 (0 mod 4).

$\sqrt{2^y}_{45\cdot y}\neq 1_0 \longrightarrow y\neq 0$

Por lo que hay 5 casos para la x (0, 4, 8, 12, 16), 19 casos para la y (1, 2, 3, 4, ..., 18 y 19), un caso para la z (1). En total $5\cdot 19\cdot 1=95$ casos.

Si $i^x=(1+i)^y$ e $i^x\neq z$, implica que $1_{90x}=\sqrt{2^y}_{45\cdot y}$ y $z_0\neq 1_{90x}$.

$1_{90x}=\sqrt{2^y}_{45\cdot y} \longrightarrow y=0$ y x es múltiplo de 4 (0 mod 4).

$z_0\neq 1_{90x} \longrightarrow z\neq 1$ o x no es múltiplo de 4 (0 mod 4) (esto no es posible porque tiene que ser múltiplo de 4 por lo anterior).

Por lo que hay 5 casos para la x (0, 4, 8, 12, 16), un casos para la y (0), 19 casos para la z (1, 2, 3, 4, ..., 18 y 19). En total, $5\cdot 19\cdot 1=95$ casos.

Si $(1+i)^y=z$ e $i^x\neq z$, implica que $\sqrt{2^y}_{45\cdot y}=z_0$ y $z_0\neq 1_{90x}$.

$\sqrt{2^y}_{45\cdot y}=z_0 \longrightarrow z=2^{y/2}$ e y es múltiplo de 8 (0 mod 8) (el valor 16 de y no es válido porque $z=2^8>19$).

$z_0\neq 1_{90x} \longrightarrow x$ no es múltiplo de 4 (0 mod 4) o $z\neq 1$.

Por lo que hay 2 casos para la y (0, 8), para cada y un solo valor de z ($y=0$, $z=1$; $y=8$, $z=16$), para $y=0$, $z=1$, x puede ser cualquier no múltiplo de 4; 15 posibilidades; para $y=8$, $z=16$, x puede tomar cualquier valor; 20 posibilidades. En total hay $15+20=35$ casos.

Sumando los tres casos tenemos $95+95+35=215$.

- Despejando z de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, se tiene:

  $z = t \cdot 3_{30°} \longrightarrow t^2 \cdot 3_{30°} = 6_{60°}$

  Despejando t:

  $$t^2 = 2_{30°} \rightarrow t = \sqrt{2_{30°}} \rightarrow t_1 = \sqrt{2}_{15°},\ t_2 = \sqrt{2}_{195°}$$

  $$z = \frac{6_{60°}}{\sqrt{2}_{15°}} = 3\sqrt{2}_{45°} = 3 + 3i$$

- $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \dfrac{5 \pm 13}{2} \rightarrow t_1 = 9,\ t_2 = -4$

  $z_1 = 3$ $\quad z_2 = -3$ $\quad z_3 = 2i$ $\quad z_4 = -2i$

  No es solución $2_{180°} = -2$.

- Observamos que cada cuatro números estamos sumando $2 - 2i$.

  Para llegar a 48 necesitamos $24 \cdot 4 = 96$ números, y obtenemos $48 - 48i$.

  El siguiente número será $97i^{97} = 97i$.

  Por lo que $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 97i^{97} = 48 - 48i + 97i = 48 + 49i \longrightarrow n = 97$.

- $1 + i\sqrt{3} = 2_{60°}$ y $-1 + i\sqrt{3} = 2_{300°}$. Entonces, realizando la operación dada en coordenadas polares:

  $$\left(\frac{2_{60°}}{2_{300°}}\right)^{12} = \left(1_{-240°}\right)^{12} = \left(1_{120°}\right)^{12} = 1_{1440°} = 1_{0°} = 1$$

132. Demuestra que si un número complejo cualquiera z es una raíz del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, su conjugado $\bar{z}$ es también una raíz de dicho polinomio.

$z = d + ei$

$$P(d+ei) = a(d+ei)^2 + b(d+ei) + c = a(d^2 - e^2 + 2dei) + bd + ebi + c = \\ = ad^2 - ae^2 + 2adei + bd + ebi + c = 0$$

Por tanto, resulta que: $ad^2 - ae^2 + bd + c = 0 \qquad 2adei + ebi = 0$

$$P(d-ei) = a(d-ei)^2 + b(d-ei) + c = a(d^2 - e^2 - 2dei) + bd - ebi + c = \\ = ad^2 - ae^2 - 2adei + bd - ebi + c = \\ = ad^2 - ae^2 + bd + c - (2adei + ebi) = 0$$

133. Calcula las cinco soluciones complejas de la siguiente ecuación.

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

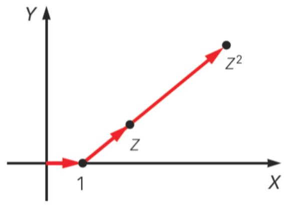
El primer término es la suma de los términos de una progresión geométrica.

$a_1 = 1, r = x \qquad S_5 = \dfrac{(x^6 - 1)}{x - 1}$

Por tanto, resulta que: $\dfrac{(x^6-1)}{x-1} = 0 \rightarrow x^6 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1_{60°} \\ x_3 = 1_{120°} \\ x_4 = 1_{180°} \\ x_5 = 1_{240°} \\ x_6 = 1_{300°} \end{cases}$

Las soluciones son: x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6.

134. Halla la expresión de z sabiendo que los afijos de los números complejos 1, z y z^2 están alineados.



Las coordenadas de los números complejos son:

$A(1, 0)$ $B(a, b)$ $C(a^2 - b^2, 2ab)$

Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (a - 1, b)$ $\overrightarrow{AC} = (a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

Los puntos están alineados si los vectores son proporcionales.

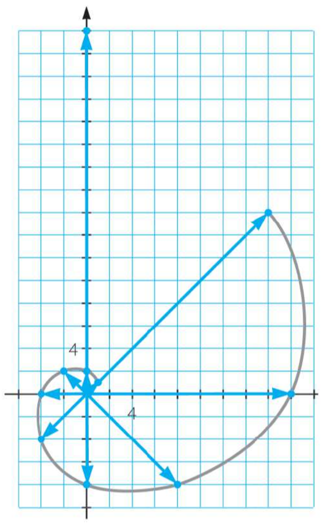
$\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{AC} \rightarrow (a - 1, b) = t\,(a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

$$\left.\begin{array}{r} a-1=t(a^2-b^2-1) \\ b=t\cdot 2ab \end{array}\right\} \xrightarrow{t=\frac{1}{2a}} a-1=\left(\frac{1}{2a}\right)(a^2-b^2-1)$$

$$\rightarrow a^2 - 2a + 1 = b \rightarrow b = a - 1$$

Por tanto, resulta que: $z = a + (a - 1)i$

135. Representa el número $1 + i$. Pásalo a forma polar, calcula sus 10 primeras potencias y represéntalas en el plano complejo. Observa que los afijos de esos números complejos describen una curva espiral.



$z = 1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

$z^2 = 2_{90°}$

$z^3 = 2\sqrt{2}_{135°}$

$z^4 = 4_{180°}$

$z^5 = 4\sqrt{2}_{225°}$

$z^6 = 8_{270°}$

$z^7 = 8\sqrt{2}_{315°}$

$z^8 = 16_{0°}$

$z^9 = 16\sqrt{2}_{45°}$

$z^{10} = 32_{90°}$

136. Calcula, en el campo complejo, las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, sabiendo que son iguales que las de los polinomios $cx^2 + ax + b$ y $bx^2 + cx + a$.

(Certamen Número de Oro. Argentina)

Aplicando la propiedad de la suma de las raíces de un polinomio de segundo grado, y suponiendo que las raíces comunes son α y β:

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{c} = -\frac{c}{b} \rightarrow a = b = c \rightarrow$ El polinomio es $ax^2 + ax + a$, con raíces $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

137. **Sean los conjuntos de números complejos:**

$$A = \{z: \arg [z - (2 + 3i)] = \frac{\pi}{4}$$

$$B = \{z: |z - (2 + i)| < 2\}$$

Determina la proyección ortogonal del conjunto intersección de *A* y *B* sobre el eje *X*.

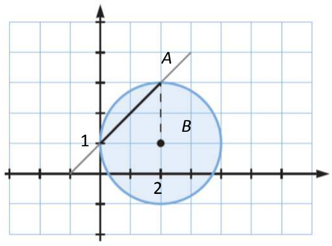
(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Los conjuntos *A* y *B* son:

$$A = \left\{z = x + yi : \arg[z - (2+3i)] = \frac{\pi}{4}\right\} = \{(x, y) / x - y + 1 = 0\}$$

$$B = \{z = x + yi : |z - (2+i) < 2|\} = \{(x, y) / (x-2)^2 + (y-1)^2 < 4\}$$

Sea *A* el conjunto formado por los puntos de la recta $x - y + 1 = 0$, y *B* el de los puntos interiores de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ con centro *C* (2, 1) y radio $r = 2$.



La intersección de ambos conjuntos es la solución del sistema $\left.\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 < 4 \end{array}\right\}$, que es el segmento abierto *D* (0, 1) y *E* (2, 3).

Su proyección sobre el eje *X* es el segmento de extremos *O* (0, 0) y *E'* (2, 0), sin incluir *O* y *E'*.

138. **Sea la sucesión de números complejos $\{a_n\}$, $n \geq 1$:**

$$a_n = (1 + i) \cdot \left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right)$$

Averigua si existe un número natural *m* tal que:

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 1\,990$$

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Los módulos de las diferencias de los términos de la sucesión valen:

$$|a_n - a_{n+1}| = \left|(1+i)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right) - (1+i)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right)\right| =$$

$$= \left|\left[(1+i)\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\right]\cdot\left[1 - \left(1+\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right)\right]\right|$$

Como el módulo del producto es el producto de los módulos, resulta:

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 1 + 1 + \ldots + 1 = m \rightarrow m = 1990$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Qué es un circuito eléctrico y por qué elementos está formado?**

Un circuito eléctrico es un camino cerrado por el que circula la corriente. Está formado por resistencias, inductancias, condensadores y fuentes o dispositivos electrónicos semiconductores.

2. **¿Qué son la impedancia y la admitancia en un circuito eléctrico?**

La impedancia y la admitancia son parámetros para analizar un circuito eléctrico. La impedancia es la oposición de un conductor al flujo de una corriente alterna.

La admitancia es la facilidad que el circuito ofrece al paso de la corriente.

3. **¿Qué relación numérica existe entre la impedancia y la admitancia?**

La admitancia, *Y*, es la inversa de la impedancia, *Z*, es decir, $Y = \frac{1}{Z}$.

4. **Averigua las aplicaciones de la impedancia y la admitancia. Por ejemplo, ¿qué es la impedancia del cuerpo humano? ¿Qué importancia crees que tiene?**

La impedancia y la admitancia se utilizan en la resolución de circuitos eléctricos.

La impedancia es la generalización de la resistencia que opone el cuerpo humano a la electrocución, según las condiciones de la piel.

5. **Si un circuito eléctrico tiene una impedancia de $Z = 3 + 4j$, determina su magnitud a partir del módulo del número complejo y, por otro lado, calcula la admitancia en siemens como un número complejo.**

Magnitud: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \Omega$ Admitancia: $\frac{1}{3+4j} \cdot \frac{3-4j}{3-4j} = \frac{3-4j}{5}\ S$

6. **Si en un circuito eléctrico la admitancia es 0,25 S, calcula su impedancia.**

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0{,}25} = 4\ \Omega$$

7. **Multiplica el numerador y el denominador en la expresión de admitancia (*Y*) por el conjugado $R - Xj$ para obtener la parte real de la admitancia, conocida como conductancia, y la parte imaginaria, conocida como susceptancia.**

$Y = \frac{1}{R+Xj} \cdot \frac{R-Xj}{R-Xj} = \frac{R-Xj}{R^2+X^2} \to$ Conductancia: $\frac{R}{R^2+X^2}$ Susceptancia: $\frac{-X}{R^2+X^2}$

8. **Si un circuito eléctrico tiene una impedancia de $Z = 6 - 4j$, halla su conductancia y su susceptancia.**

Si un circuito tiene una impedancia de $Z = 6 - 4j$, halla su conductancia y su susceptancia.

$\frac{1}{6-4j} \cdot \frac{6+4j}{6+4j} = \frac{3+2j}{26} \to$ Conductancia: $\frac{3}{26}$ Susceptancia: $\frac{1}{13}$