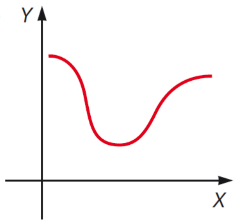
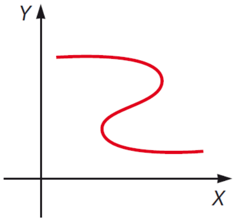
ACTIVIDADES

1. Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.

a) 

b) 

a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y.

2. Indica, en cada caso, si la relación entre las dos magnitudes es una función o no.

a) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el número de piezas de fruta que se lleva.
b) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el precio de la compra.
c) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilos, y el precio de un kilo de fruta.

a) No se trata de una función, ya que el tamaño y el peso de cada fruta varía.

b) Es una función, ya que para cada cantidad de fruta comprada hay un único precio según el peso en kilos.

c) No es una función.

3. Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

e) $f(x) = \cos(x + 1)$

f) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

g) $f(x) = \log(x - 16)$

h) $f(x) = e^{x^2 - 1}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

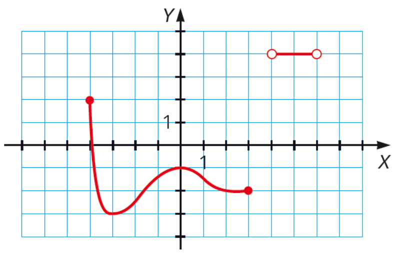
e) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

f) $\text{Dom } f = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

g) $\text{Dom } f = (16, +\infty)$

h) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

4. Halla el dominio y el recorrido de la función cuya gráfica es la siguiente.



$\text{Dom } f = [-4, 3] \cup (4, 6)$

$\text{Im } f = [-3, 2] \cup \{4\}$

5. **Estudia la simetría de las siguientes funciones.**

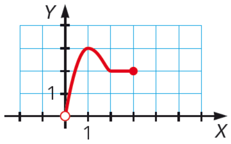
a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5}{3x^2}$

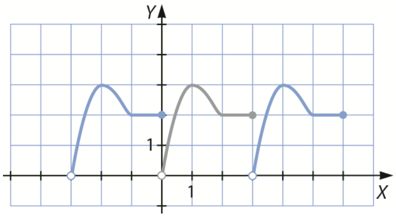
a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{2(-x)} = \dfrac{x^2 - 1}{-2x} = -\dfrac{x^2 - 1}{2x} = -f(x) \longrightarrow f(x)$ es impar.

b) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 6(-x) - 7}{(-x)^2} = \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2} \longrightarrow f(x)$ no es par ni impar.

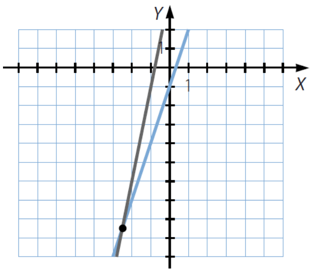
c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 5}{3(-x)^2} = \dfrac{x^4 - 5}{3x^2} = f(x) \longrightarrow f(x)$ es par.

6. **Completa la gráfica de esta función periódica de período 3.**





7. **Representa, sobre los mismos ejes, las funciones $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 5x + 4$. Halla su punto en común.**



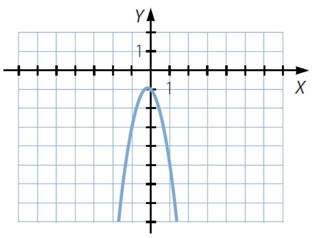
El punto de intersección es:

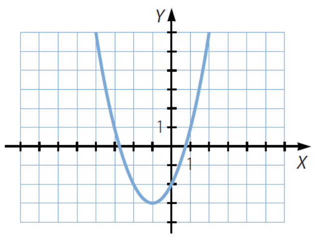
$\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{17}{2}\right)$

8. **Representa gráficamente estas funciones cuadráticas.**

a) $f(x) = -3x^2 - x - 1$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

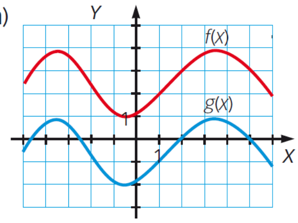
a) $V\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{11}{12}\right)$ b) $V(-1, -3)$



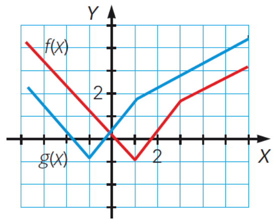


9. **Teniendo en cuenta la gráfica de $f(x)$, expresa $g(x)$ utilizando $f(x)$.**

a)



b)



a) $g(x) = f(x) - 3$

b) $g(x) = f(x + 2)$

10. **Representa gráficamente esta función.**

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

A partir de ella, representa las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $h(x) = x^2 - 2x - 2$

c) $i(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) + 1$

d) $j(x) = x^2 + 2x + 1$

e) $k(x) = -x^2 + 2x - 1$

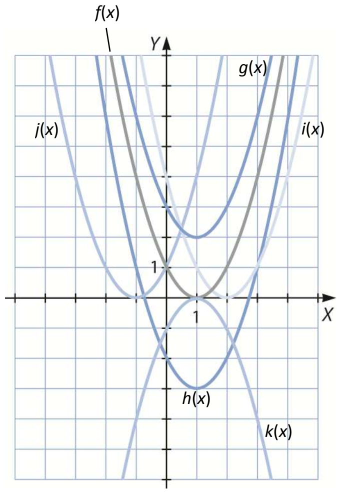
a) $g(x) = f(x) + 2$

b) $h(x) = f(x) - 3$

c) $i(x) = f(x - 1)$

d) $j(x) = f(-x)$

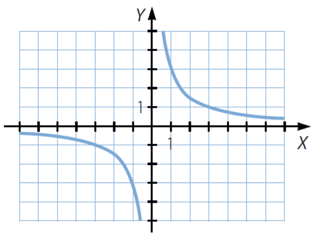
e) $k(x) = -f(x)$



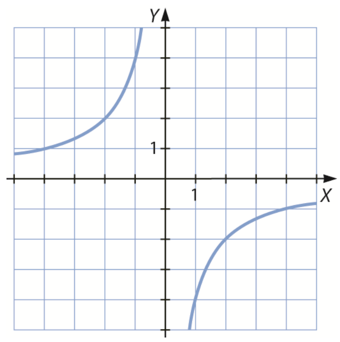
11. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ b) $f(x) = -\frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{-4}{x}$ d) $f(x) = \frac{-1}{x}$

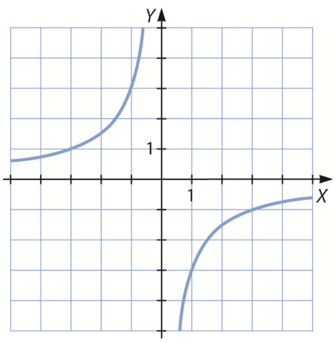
a)



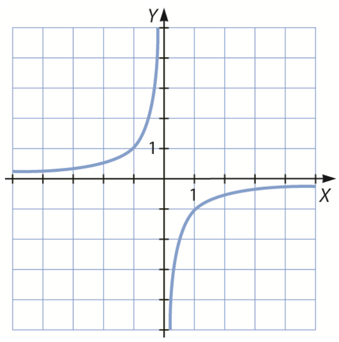
c)



b)



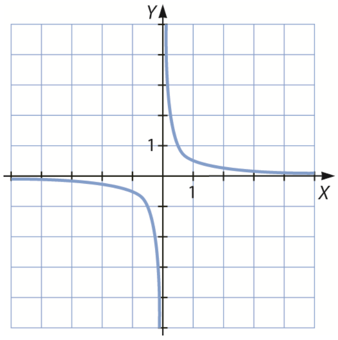
d)



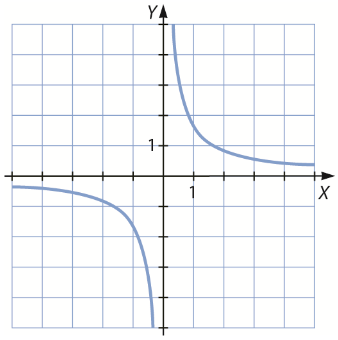
12. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ b) $f(x) = -\dfrac{1}{2x}$ c) $f(x) = \dfrac{5}{3x}$ d) $f(x) = \dfrac{-2}{5x}$

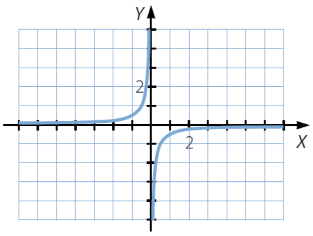
a)



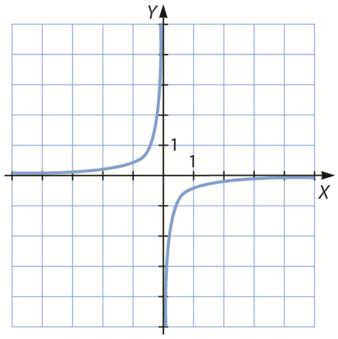
c)



b)



d)



13. **Halla el dominio de las funciones con radicales.**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

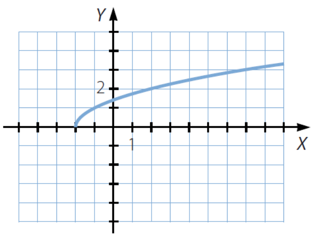
a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

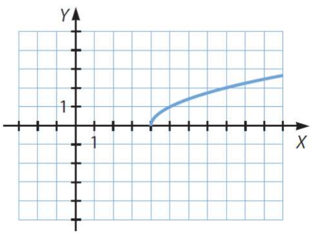
14. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

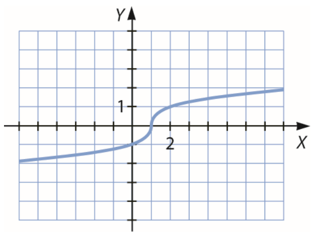
a)



b)



c)



15. **Calcula la función inversa de las funciones que aparecen a continuación.**

a) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2} - 2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

a) $x = -\dfrac{y}{2} + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 2$

b) $x = -y^2 + 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$

c) $x = \sqrt{\dfrac{y}{2} - 2} \rightarrow f^{-1}(x) = 2x^2 + 4$

d) $x = \sqrt[3]{y^2 - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

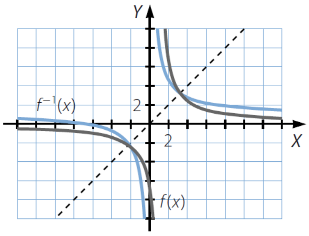
16. Averigua cuál es la función inversa de $f(x) = \frac{7+x}{x}$ y realiza lo siguiente.

a) Representa las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

b) Comprueba si sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

$$y = \frac{7+x}{x} \rightarrow xy = 7 + x \rightarrow xy - x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}$$

a)



b) Las funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

17. Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = 1{,}2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $f(x) = 0{,}8^x$

d) $f(x) = (\sqrt{3})^x$

a) Creciente, pues $a > 1$.

b) Decreciente, pues $a < 1$.

c) Decreciente, pues $a < 1$.

d) Creciente, pues $a > 1$.

18. Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = -(3^x)$

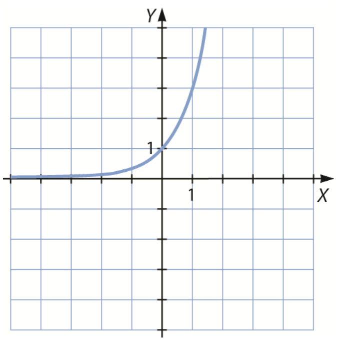
c) $f(x) = 3^{-x}$

d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

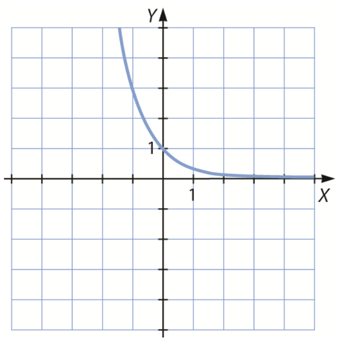
e) $f(x) = \left(-\frac{2}{3}\right)^x$

f) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

a)

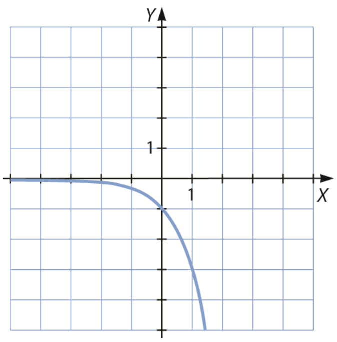


c)

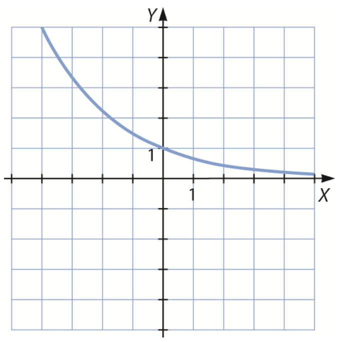


e) $a < 0 \rightarrow$ no se puede representar.

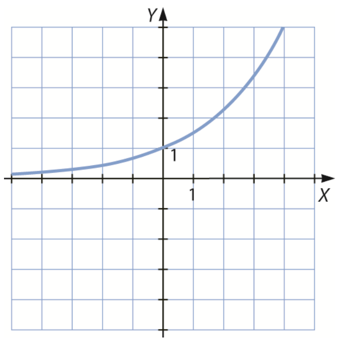
b)



d)



f)



19. **Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.**

a) $f(x) = \log_{1,2} x$ c) $f(x) = \log_7 x$ e) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ d) $f(x) = \log_{0,8} x$ f) $f(x) = \log_{8,2} x$

a) Creciente, pues $a > 1$.

b) Decreciente, pues $a < 1$.

c) Creciente, pues $a > 1$.

d) Decreciente, pues $a < 1$.

e) Creciente, pues $a > 1$.

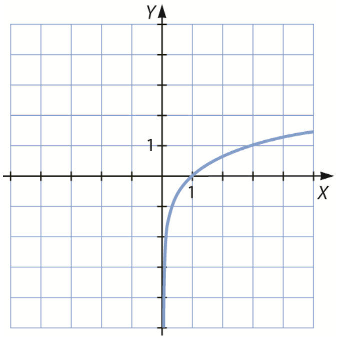
f) Creciente, pues $a > 1$.

20. **Representa gráficamente las funciones que aparecen a continuación.**

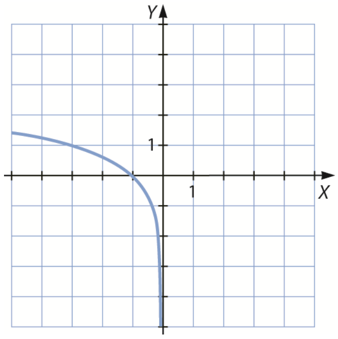
a) $f(x) = \log_3 x$ c) $f(x) = \log_3 (-x)$ e) $f(x) = -\log_3 (-x)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$ f) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(-x)$

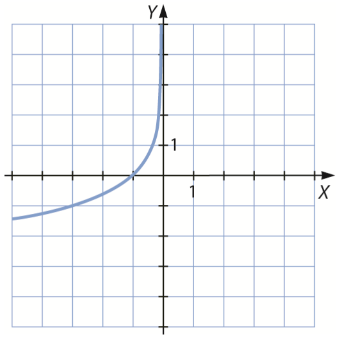
a)



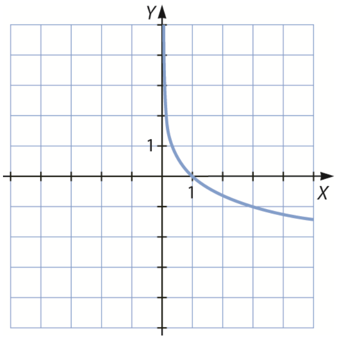
c)



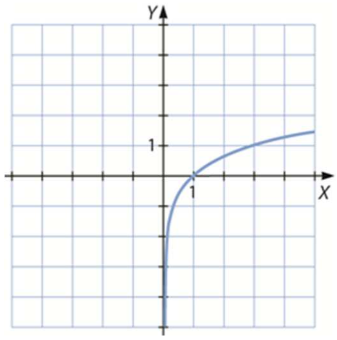
e)



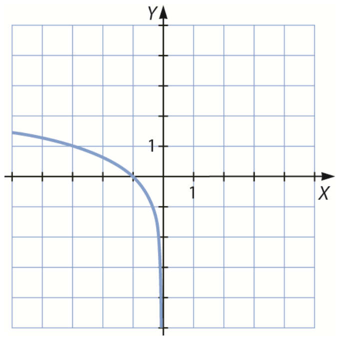
b)



d)



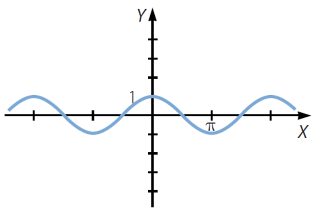
f)



21. **Representa gráficamente estas funciones.**

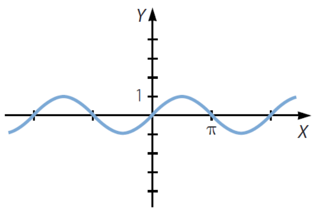
a) $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

a)



$f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\, x$

b)



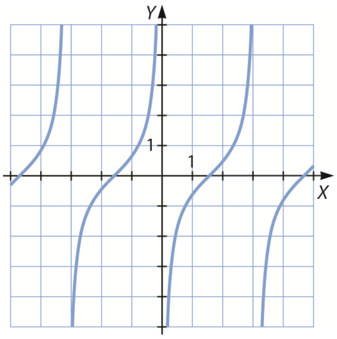
$g(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\, x$

22. **Representa estas funciones.**

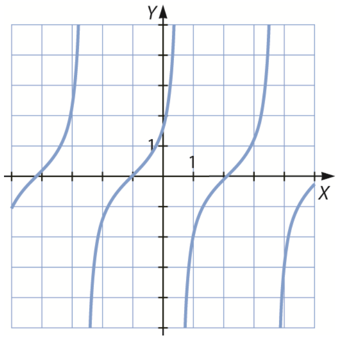
a) $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f(x) = tg\,(x + 1)$

a)



b)



23. **Calcula las siguientes expresiones.**

a) $arc\ sen \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $arc\ cos\ 0$

c) $arc\ tg\,(-1)$

a) $arc\ sen \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

b) $arc\ cos\ 0 = \frac{\pi}{2}$

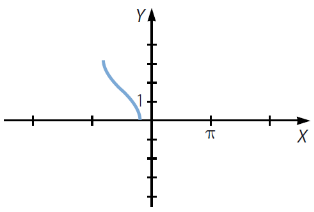
c) $arc\ tg\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$

24. **Representa gráficamente estas funciones.**

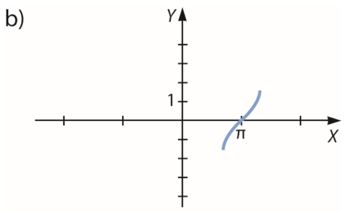
a) $f(x) = arc\ cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f(x) = arc\ sen\,(x - \pi)$

a)



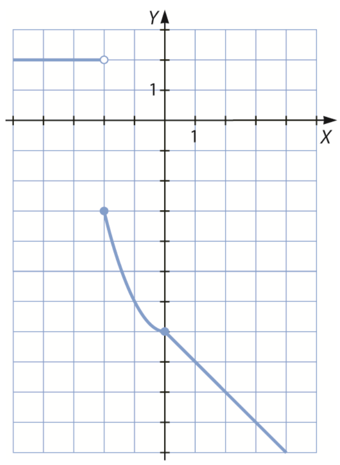
b)



25. **Representa gráficamente esta función definida a trozos.**

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 7 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -7 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Describe sus principales características.



- Primer intervalo $(-\infty, -2)$:

  $f(x) = 2 \longrightarrow$ Recta horizontal, paralela al eje X en $y = 2$ con extremo en $(-2, 2)$.

- Segundo intervalo $[-2, 0]$:

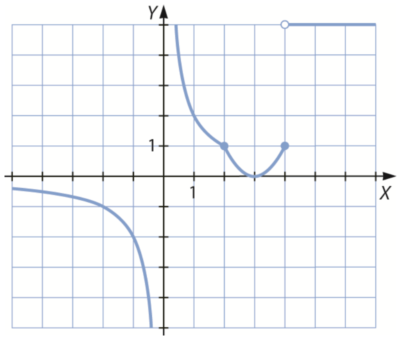
  $f(x) = x^2 - 7 \longrightarrow$ Parábola con mínimo $(a = 1 > 0)$ en el vértice $(0, -7)$ y con extremos en $(-2, -3)$ y $(0, -7)$.

- Tercer intervalo $(0, +\infty)$:

  $f(x) = -7 - x \longrightarrow$ Recta decreciente $(m = -1 < 0)$ con extremo en $f(0) = (0, -7)$.

26. **Representa la gráfica de esta función describiendo sus principales características**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 5 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$



- Primer intervalo $(-\infty, 2]$:

  $f(x) = \dfrac{x}{2} \longrightarrow$ Decreciente en ese intervalo, con extremo en (2, 1).

- Segundo intervalo (2, 4]:

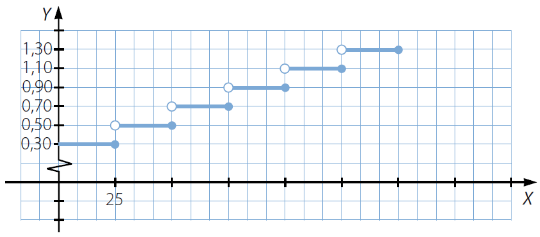
  $f(x) = x^2 - 6x + 9 \longrightarrow$ Parábola con mínimo ($a = 1 > 0$) en el vértice (3, 0) y con extremos en (2, 1) y (4, 1).

- Tercer intervalo $(4, +\infty)$:

  $f(x) = 5 \longrightarrow$ Recta horizontal, paralela al eje X en $y = 5$ con extremo en (4, 5).

27. **El servicio de correos cobra 0,30 € por los primeros 25 g de envío y, a partir de esa cantidad, cobra 0,20 € por cada 25 g (o fracción) de peso extra. Representa la gráfica del coste del envío de cartas hasta 150 g.**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}30 \text{ si } x \in (0, 25] \\ 0{,}30 + 0{,}20 \text{ si } x \in (25, 50] \\ 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 2 \text{ si } x \in (50, 75] \\ \ldots \end{cases} \rightarrow f(x) = 0{,}30 + 20 \cdot \left[\frac{x}{25}\right]$$



28. **La función que asocia a cada número su parte decimal es:**

$$f(x) = x - [x]$$

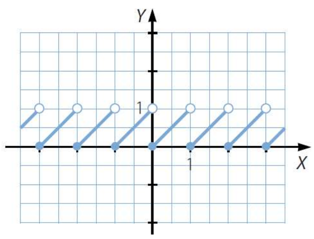
Representa la función y analiza sus propiedades.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [0, 1)$

La función no es continua. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

Es periódica, de período 1. No es simétrica.

Es creciente en $(k, k + 1)$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.
No tiene máximos ni mínimos.



29. **Determina el valor de las siguientes funciones en el punto $x = -2$, teniendo en cuenta que:**

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad g(x) = 3x^2 - 1$$

a) $(f - g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x+1} - (3x^2-1) = \frac{-3x^3-3x^2+2x+1}{x+1} \to (f-g)(-2) = \frac{-3(-2)^3-3(-2)^2+2(-2)+1}{(-2)+1} = -9$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)(3x^2-1) = \frac{3x^3-x}{x+1} \to (f \cdot g)(-2) = \frac{3(-2)^3-(-2)}{(-2)+1} = 22$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x+1}}{3x^2-1} = \frac{x}{3x^3+3x^2-x-1} \to \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(-2)}{3(-2)^3+3(-2)^2-(-2)-1} = \frac{2}{11}$

30. **Halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican, teniendo en cuenta que:**

$$f(x) = \sqrt{x^5} \qquad g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

a) $(f \cdot g)(4)$ b) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$ c) $(f^2)(2)$

a) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^5} \cdot \frac{x^2+3}{x+1} \to (f \cdot g)(4) = \sqrt{4^5} \cdot \frac{4^2+3}{4+1} = \sqrt{(2)^{2 \cdot 5}} \cdot \frac{19}{5} = \frac{608}{5}$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^5}}{\frac{x^2+3}{x+1}} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5}}{x^2+3}$

No existe $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$, porque $\sqrt{(-1)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

c) $(f^2)(x) = \left(\sqrt{x^5}\right)^2 = x^5 \to (f^2)(2) = 2^5 = 32$

31. **Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2x-1}$, calcula el valor de las composiciones que aparecen a continuación en $x = 2$.**

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $(f \circ f)(x)$

d) $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = \frac{1}{7}$

c) $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 16$

d) $(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g\left(\frac{1}{3}\right) = -3$

32. **Si $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x - 4$, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos indicados, determinando primero la composición de funciones.**

a) $(f \circ g)(5)$ b) $(g \circ f)(5)$

Justifica, a partir de los resultados, si la composición de funciones es conmutativa.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-4) = \sqrt{2(x-4)^3}$

$(f \circ g)(5) = \sqrt{2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{2x^3}\right) = \sqrt{2x^3} - 4$

$(g \circ f)(5) = \sqrt{250} - 4 = 5\sqrt{10} - 4$

$(f \circ g)(5) \neq (g \circ f)(5) \to$ La composición de funciones no es conmutativa.

SABER HACER

33. **Calcula el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x+3}$.**

$\dfrac{1}{x}$ está definida en $x \neq 0$.

$\sqrt{x+3}$ está definida en $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$.

Dom $f = [-3, 0) \cup [0, +\infty) = [-3, +\infty) - \{0\}$

34. **Determina el período de $f(x) = \cos 2x$.**

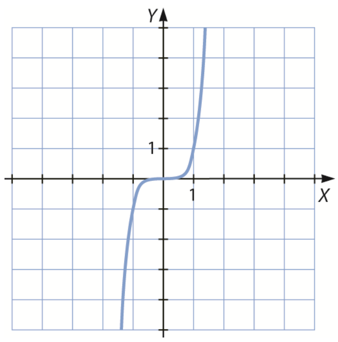
$\cos x = \cos (x + 2\pi) \rightarrow f(x) = \cos 2x = \cos (2x + 2\pi) = \cos (2(x + \pi)) = f(x + \pi) \rightarrow$ Período $= \pi$

35. **Representa gráficamente estas funciones.**

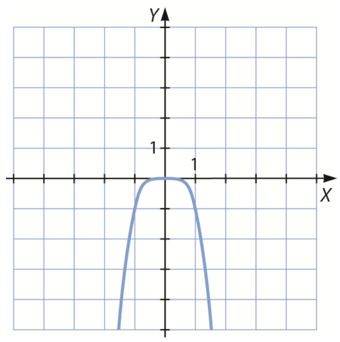
a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = -x^4$

a)



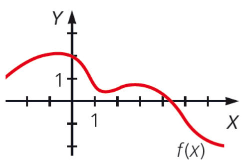
b)



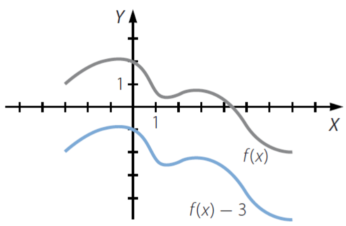
36. **A partir de la gráfica de $f(x)$, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 3$

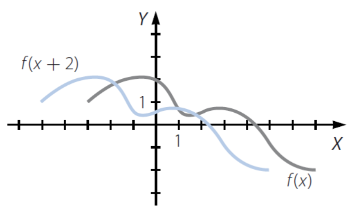
b) $g(x) = f(x + 2)$



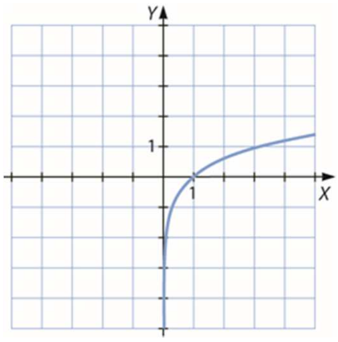
a)



b)



37. **Representa la función $f(x) = 2 \log x$.**

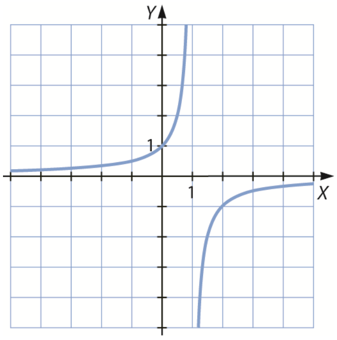


38. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

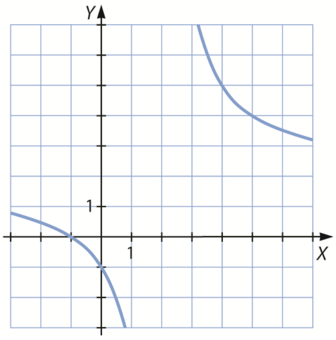
a) $f(x) = \dfrac{-1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-2}$

a) $f(x) = -g(x-1)$ con $g(x) = \dfrac{1}{x}$



b) $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x-2} \rightarrow g(x) = \dfrac{6}{x} \rightarrow f(x) = 2 + g(x-2)$



39. **Representa la gráfica de las funciones inversas de estas funciones.**

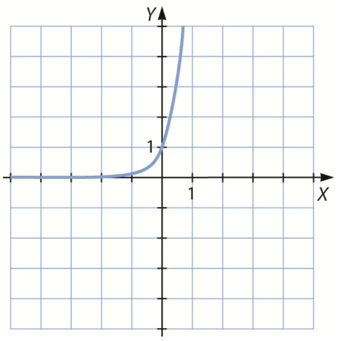
a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \log(x-1)$

a) $y = x^2 \rightarrow x = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

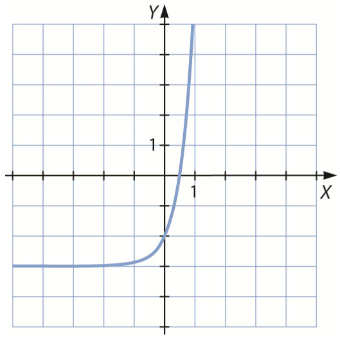
No es una función, ya que para cada valor de x, se tienen dos valores y.

b) $y = \log x \rightarrow x = \log y \rightarrow 10^x = y \rightarrow f^{-1}(x) = 10^x$



40. **Representa gráficamente la función exponencial $f(x) = 3^{2x} - 3$.**

$g(x) = 9^x \rightarrow f(x) = g(x) - 3$

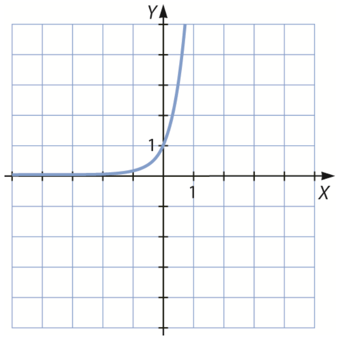


41. **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.**

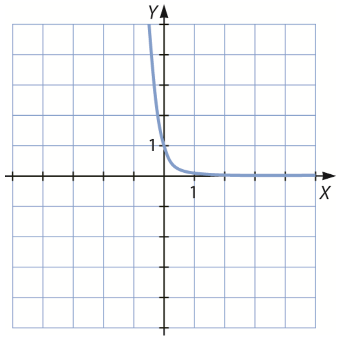
a) $f(x) = 3^{2x}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$

a) $f(x) = 9^x$

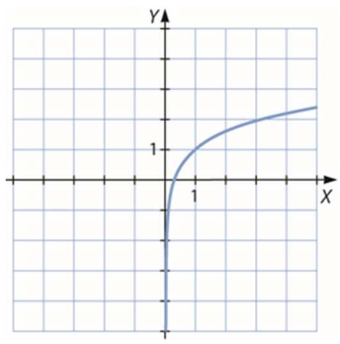


b) $f(x) = \left(\frac{1}{27}\right)^x$



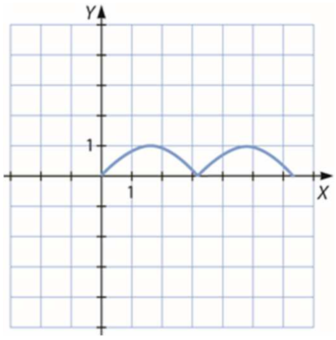
42. **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \log 10x^2$.**

$f(x) = \log 10x^2 = \log 10 + 2 \log x = 1 + 2 \log x$



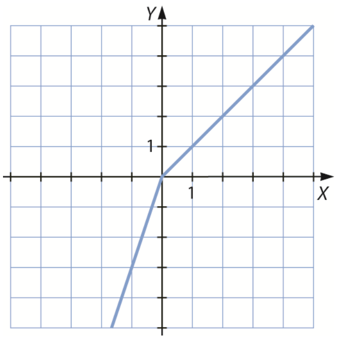
43. **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |sen\ x|$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -sen\ x & \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$



44. **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 2x - |x|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



45. **Expresa estas funciones como composición de funciones más sencillas.**

a) $f(x) = sen^2 (x^2 + 1)$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x - 1}}$

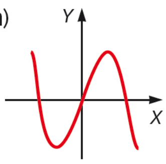
a) $f_1(x) = x^2 + 1$ $\quad f_2(x) = sen\ x$ $\quad f_3(x) = x^2 \rightarrow f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

b) $f_1(x) = x - 1$ $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad f_3(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

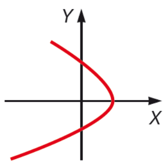
ACTIVIDADES FINALES

46. **Di si estas gráficas corresponden a una función.**

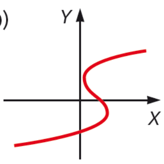
a)



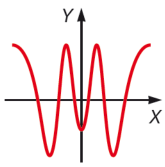
c)



b)



d)



a) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

b) La gráfica no corresponde a una función porque hay valores de *x* a los que les corresponden dos valores de *y*.

c) La gráfica no corresponde a una función porque hay valores de *x* a los que les corresponden dos valores de *y*.

d) La gráfica corresponde a una función porque a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

47. Observa estos ejemplos de tarificación telefónica.

- **Establecimiento de llamada 0,15 € y 3 cént. el minuto o fracción.**
- **Cada minuto o fracción 5 cént.**
- **Cada minuto o fracción entre semana 4 cént., y si es fin de semana, 3 cént.**

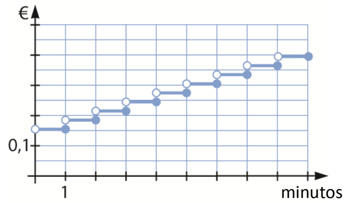
Completa una tabla como esta para cada tipo de tarificación y determina si definen una función. En caso afirmativo, dibuja su gráfica.

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)					

- Tarificación 1:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,18	0,30	0,36	0,42	0,51

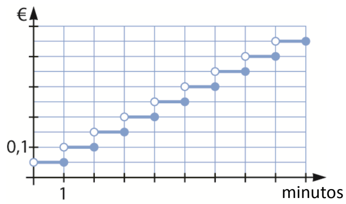
Corresponde a una función porque por cada duración de la llamada le corresponde un único precio.



- Tarificación 2:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,05	0,25	0,35	0,45	0,60

Corresponde a una función porque por cada duración de la llamada le corresponde un único precio.



- Tarificación 3:
  - Entre semana:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,04	0,20	0,28	0,36	0,48

– Fin de semana:

Minutos	1	5	7	9	12
Precio (€)	0,03	0,15	0,21	0, 27	0,36

No corresponde a una función porque a cada duración de la llamada le corresponden dos precios, dependiendo del día de la semana en el que se realice la llamada.

48. Comprueba si los puntos $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ pertenecen al dominio de estas funciones.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 3x}$

c) $f(x) = \sqrt{-2x + 1}$

d) $f(x) = \ln(-x - 4)$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow$ Los tres puntos pertenecen al dominio de la función.

b) $x^2 + 3x = 0 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, -3\} \rightarrow$ Solo $x = 2$ pertenece al dominio de la función.

c) $-2(-3) + 1 = 7 > 0 \rightarrow x = -3$ pertenece al dominio.

$0 + 1 = 1 > 0 \rightarrow x = 0$ pertenece al dominio.

$-2 \cdot 2 + 1 = -3 < 0 \rightarrow x = 2$ no pertenece al dominio.

d) $-(-3) - 4 = -1 < 0 \rightarrow x = -3$ no pertenece al dominio.

$0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow x = 0$ no pertenece al domino.

$-2 - 4 = -6 < 0 \rightarrow x = 2$ no pertenece al dominio.

49. Estudia si los valores de la ordenada, y, están incluidos en los recorridos de estas funciones.

a) $y = 3$, $y = 2$, $y = -5$ para $f(x) = \sqrt{3x - 3}$

b) $y = 0$, $y = 30$, $y = -3$ para $f(x) = x^2 - 5x + 6$

a) $\sqrt{3x - 3} = 3 \rightarrow 3x - 3 = 9 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 3 \in \text{Im } f$

$\sqrt{3x - 3} = 2 \rightarrow 3x - 3 = 4 \rightarrow x = \dfrac{7}{3} \rightarrow y = 2 \in \text{Im } f$

$y = -5 \notin \text{Im } f$, porque la raíz no puede tomar valores negativos.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$ o $x = 3 \rightarrow y = 0 \in \text{Im } f$

$x^2 - 5x + 6 = 30 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow x = 8$ o $x = -3 \rightarrow y = 30 \in \text{Im } f$

$x^2 - 5x + 6 = -3 \rightarrow x^2 - 5x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -11 < 0$

$\rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones $\rightarrow y = -3 \in \text{Im } f$

50. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{4 - 3x + x^2}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{12x - x^2}{x - 5}$

c) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x + 4}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{5\}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

51. **Estudia el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{3x - 7}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 10}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$

a) $\text{Dom } f = \left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c) $\text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

d) $\text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

52. **Escribe el dominio de las funciones.**

a) $f(x) = \log_4 (x - 4)$

b) $f(x) = \cos (1 - x)$

c) $f(x) = 3^{\ln x}$

d) $f(x) = \text{sen } (x - \pi)$

a) $\text{Dom } f = (4, +\infty)$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

53. **Determina el dominio de las funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{8 - x}$

b) $f(x) = \sqrt{2x - 4} \cdot \sqrt{1 - x}$

a) $\text{Dom } f = [-1, 8]$

b) $\text{Dom } f = \varnothing$

54. **Determina si estas funciones tienen algún tipo de simetría.**

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^4 - 1$

c) $f(x) = x^2 - x$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

a) $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow$ La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 1 = x^4 - 1 = f(x) \rightarrow$ La función es par, es simétrica respecto al eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \rightarrow$ La función no es simétrica.

d) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x) \rightarrow$ La función es par, es simétrica respecto al eje Y.

55. **Determina el tipo de simetría de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x}$

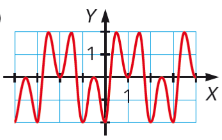
b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

a) $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 - (-x)}{(-x)} = \dfrac{3x^2 + x}{-x} = -\dfrac{3x^2 + x}{x} \rightarrow$ La función no tiene simetría.

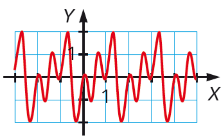
b) $f(-x) = \dfrac{2(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-2x^3 + x}{x^2 + 1} = -f(x) \rightarrow$ La función es impar, es simétrica respecto el origen de coordenadas.

56. **Determina el período de estas funciones.**

a)



b)



a) $T = 3 - 0 = 3$

b) $T = 2 - 0 = 2$

57. **Considera la función que relaciona el tiempo, en días, con la superficie visible de la Luna. ¿Es una función periódica? En caso afirmativo, indica el período.**

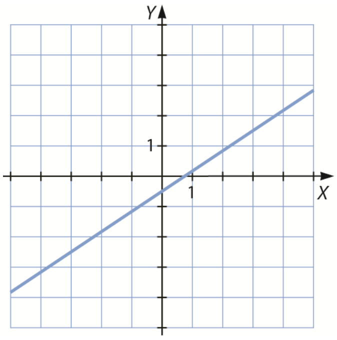
Al depender la superficie visible de las fases en la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, la función es periódica. El período es de 28 días.

58. **Representa, sin hacer las tablas de valores correspondientes, las funciones lineales y afines.**

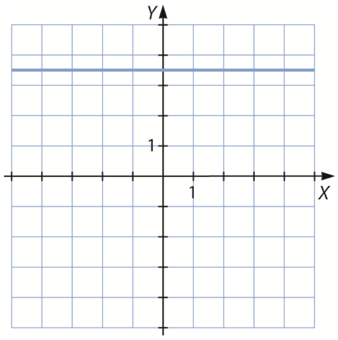
a) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \frac{7}{2}$ e) $f(x) = -3x + \frac{5}{2}$

b) $f(x) = -2$ d) $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}x$

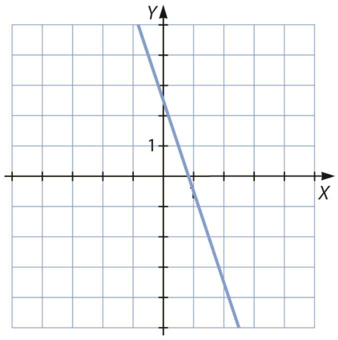
a)



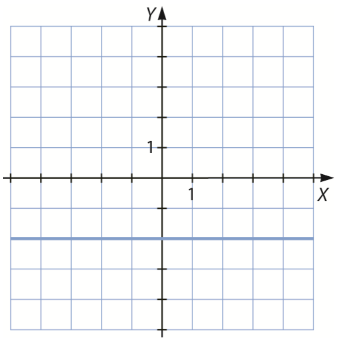
c)



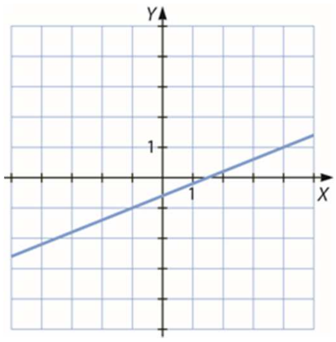
e)



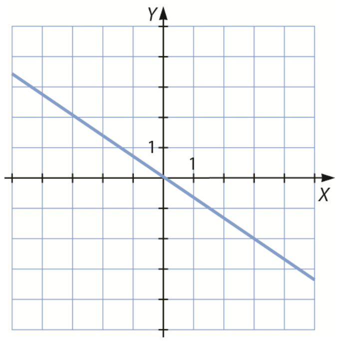
b)



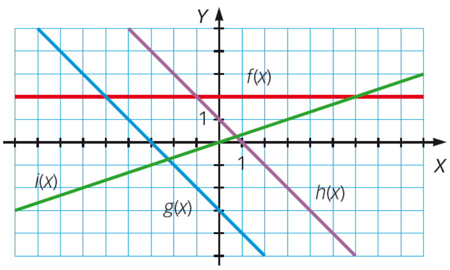
d)



f)



59. **Escribe la expresión algebraica de las funciones representadas, y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.**



$f(x) = 2 \rightarrow$ Pendiente: $m = 0$ Ordenada en el origen: $n = 2$

$g(x) = -x - 3 \rightarrow$ Pendiente: $m = -1$ Ordenada en el origen: $n = -3$

$h(x) = -x + 1 \rightarrow$ Pendiente: $m = -1$ Ordenada en el origen: $n = 1$

$i(x) = \frac{1}{3}x \rightarrow$ Pendiente: $m = \frac{1}{3}$ Ordenada en el origen: $n = 0$

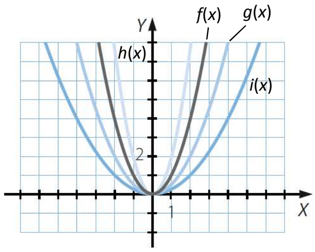
60. **Representa estas funciones en los mismos ejes de coordenadas y relaciona la abertura de las ramas de cada parábola con el coeficiente de x^2.**

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $h(x) = 2x^2$

d) $i(x) = \frac{1}{4}x^2$



La abertura es menor cuando el coeficiente es mayor.

61. **Encuentra las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas.**

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

b) $f(x) = -x^2 - 4x + 10$

c) $f(x) = x^2 - 4$

d) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$

a) $V\left(\frac{-(-6)}{2 \cdot 1}, -\frac{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4 \cdot 1}\right) = V(3, 1)$

c) $V\left(0, -\frac{-4 \cdot 1 \cdot (-4)}{4 \cdot 1}\right) = V(0, -4)$

b) $V\left(\frac{-(-4)}{2 \cdot (-1)}, -\frac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10}{4 \cdot (-1)}\right) = V(-2, 14)$

d) $V\left(\frac{-(-4)}{2 \cdot (-1)}, -\frac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}{4 \cdot (-1)}\right) = V(-2, 6)$

62. **Representa gráficamente las siguientes parábolas.**

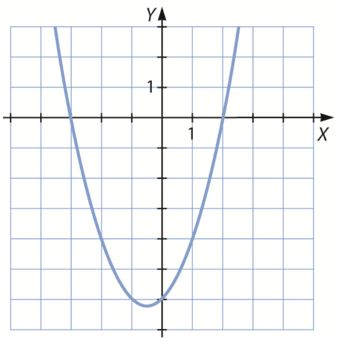
a) $f(x) = x^2 + x - 6$

b) $f(x) = x^2 - 10x + 25$

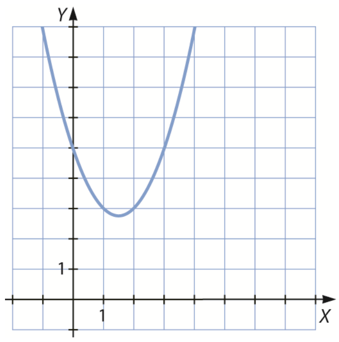
c) $f(x) = x^2 - 3x + 5$

d) $f(x) = -x^2 - 3x + 1$

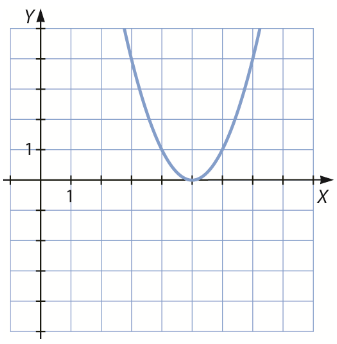
a)



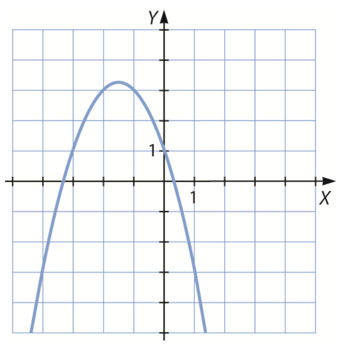
c)



b)



d)



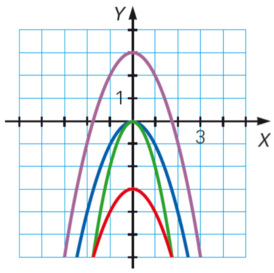
63. **Asocia cada función con su gráfica.**

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = -x^2 + 3$

c) $h(x) = -x^2 - 3$

d) $i(x) = -2x^2$



a) Azul. b) Morada. c) Roja. d) Verde.

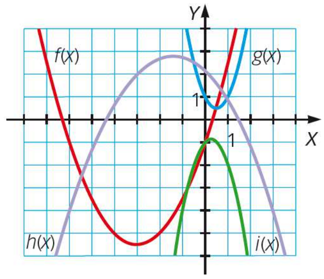
64. **Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.**

a) $y = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$

c) $y = -\frac{x^2}{3} - x + 2$

d) $y = -2x^2 + x - 1$



a) $y = f(x)$, porque si $a = \frac{1}{2} > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = -1$.

b) $y = g(x)$, pues si $a = 2 > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = 1$.

c) $y = h(x)$, porque si $a = -\frac{1}{3} < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = 2$.

d) $y = i(x)$, ya que si $a = -2 < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = -1$.

65. **Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones.**

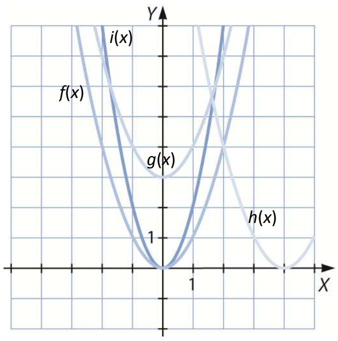
a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = x^2 + 3$

c) $h(x) = (x - 4)^2$

d) $i(x) = 2x^2$

¿En qué se parecen y en qué se diferencian estas funciones?



Todas son parábolas cuyo vértice es un mínimo, pues el coeficiente de x^2 es mayor que 0.

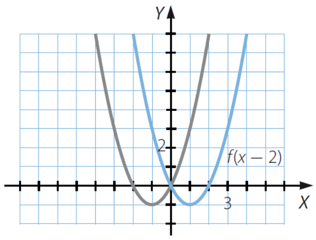
Se obtienen desplazando la parábola x^2 o ampliando/reduciendo la apertura de sus ramas.

66. **Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$. Obtén la expresión algebraica de las siguientes funciones y represéntalas.**

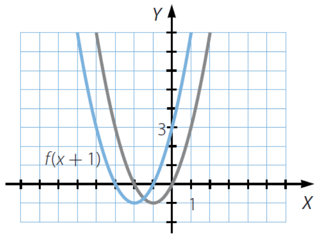
a) $f(x - 2)$ b) $f(x) - 4$ c) $f(x + 1)$ d) $f(x) + 2$

¿Hay alguna relación entre estas gráficas?

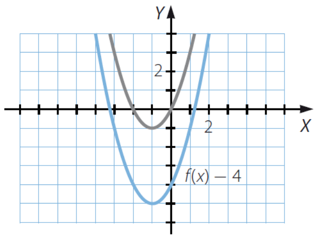
a) $f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) = x^2 - 2x$



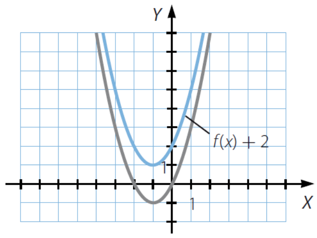
c) $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$



b) $f(x) - 4 = x^2 + 2x - 4$



d) $f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$

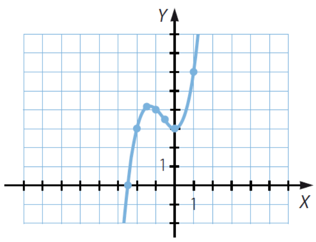


67. **Construye la tabla de valores y dibuja la gráfica de estas funciones.**

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ b) $f(x) = -x^3 + 6x + 1$

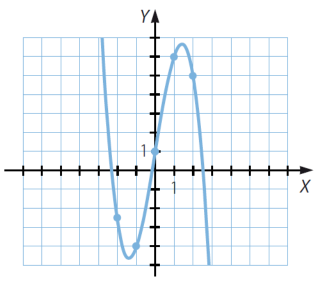
a)

x	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}125$	3	4,125	4	3,375	3	6	19



b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10	-3	-4	1	6	5	-8



68. **Representa las siguientes funciones polinómicas, indicando los puntos de corte con los ejes.**

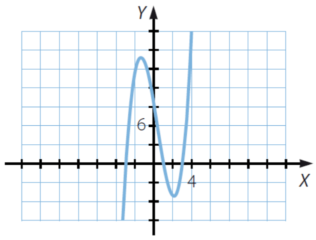
a) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

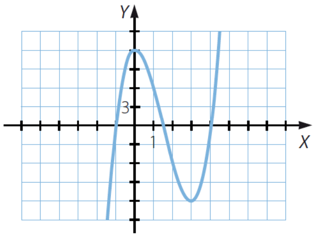
c) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

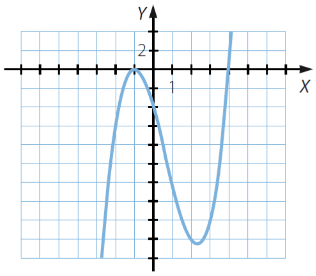
a) Puntos de corte con el eje X:
$(-3, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, 9)$



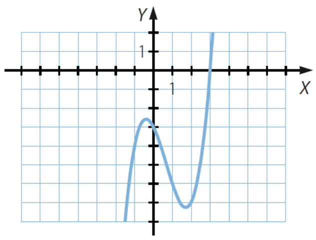
b) Puntos de corte con el eje X:
$(-1, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y $(4, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, 12)$



c) Puntos de corte con el eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, 4)$



d) Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $(0, -3)$



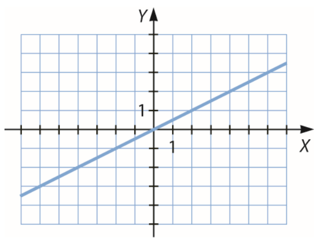
69. **Halla y representa las funciones polinómicas de grado mínimo que pasan por los siguientes puntos.**

a) $A(0, 0)$, $B\left(5, \dfrac{5}{2}\right)$ y $C(-2, -1)$

b) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 0)$

c) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(4, 1)$

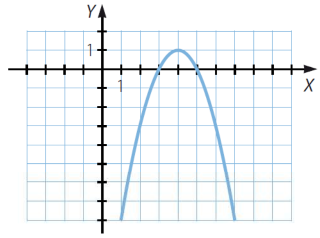
a) Los puntos A, B y C están alineados. La función que pasa por ellos es $f(x) = \dfrac{x}{2}$.



b) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b \quad = 1 \\ 16a + 2b \quad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b \quad = 1 \\ 2a \quad = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -15 \end{array}$$

La expresión de la función es:
$f(x) = -x^2 + 8x - 15$



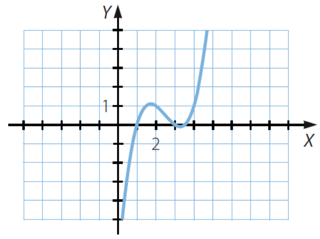
c) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \quad = 1 \\ 13a + 4b + c \quad = 0 \\ 63a + 15b + 3c \quad = 1 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \quad = 1 \\ 6a + b \quad = -1 \\ 21a + 3b \quad = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c \quad = 1 \\ 6a + b \quad = -1 \\ 3a \quad = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} \\ b = -5 \\ c = \frac{34}{3} \\ d = -7 \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{34}{3}x - 7$$

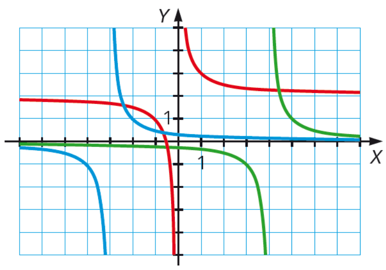


70. Asocia cada gráfica con su función.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

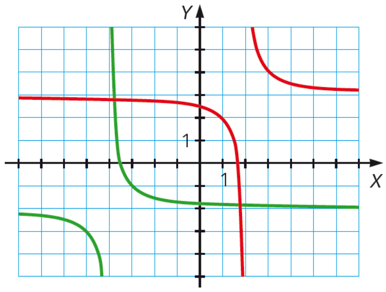


a) Azul. b) Verde. c) Roja.

71. **Asocia cada gráfica con su función.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 3$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x+4} - 2$



a) Roja. b) Verde.

72. **Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$, determina la expresión algebraica de las siguientes funciones.**

a) $g(x) = f(x - 3)$

b) $g(x) = f(x + 1)$

c) $g(x) = f(x) - 2$

d) $g(x) = f(x) + 3$

e) $g(x) = f(-x)$

f) $g(x) = -f(x)$

a) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$

c) $g(x) = \dfrac{2}{x} - 2 = \dfrac{2-2x}{x}$

d) $g(x) = \dfrac{2}{x} + 3 = \dfrac{2+3x}{x}$

e) $g(x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x}$

f) $g(x) = -\dfrac{2}{x}$

73. **Sin representarlas, escribe la relación que hay entre las gráficas de estas funciones y la de $f(x) = \dfrac{12}{x}$.**

a) $g(x) = \dfrac{12}{x+4}$

b) $h(x) = \dfrac{12}{x} + 1$

c) $i(x) = -\dfrac{12}{x}$

a) La gráfica de $g(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ 4 unidades a la izquierda sobre el eje X.

b) La gráfica de $h(x)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ una unidad hacia arriba sobre el eje Y.

c) La gráfica de $i(x)$ es la simétrica de $f(x)$ con respecto al eje X; que equivale a la simétrica con respecto al eje Y.

74. **Representa la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$. A partir de ella representa las siguientes funciones.**

a) $g(x) = \dfrac{x+4}{x+1}$

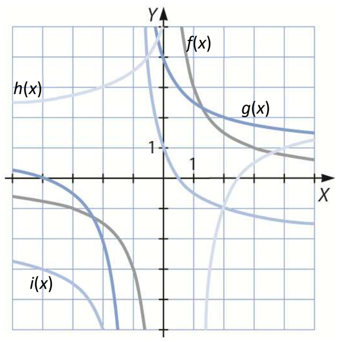
b) $h(x) = \dfrac{2x-5}{x-1}$

c) $i(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$

a) $g(x) = \dfrac{3}{x+1} + 1 \rightarrow g(x) = f(x+1) + 1$

b) $h(x) = 2 - \dfrac{3}{x-1} \rightarrow h(x) = -f(x-1) + 2$

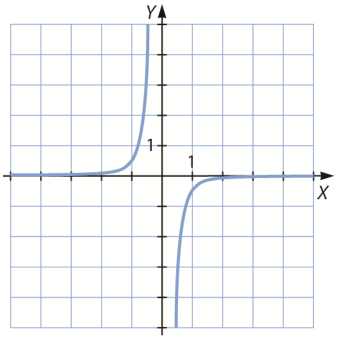
c) $i(x) = -2 + \dfrac{3}{x+1} \rightarrow i(x) = f(x+1) - 2$



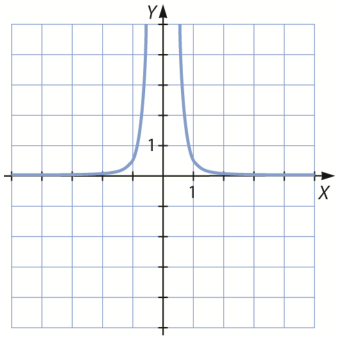
75. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2x^3}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4}$ c) $f(x) = -\dfrac{1}{2x^6}$

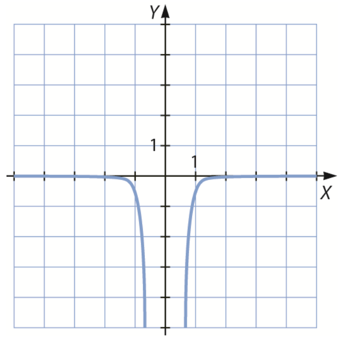
a)



b)



c)



76. **Calcula el dominio de estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2-1}$

d) $f(x) = 1-\sqrt{x}$

a) $3x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \dfrac{1}{3} \rightarrow \text{Dom } f = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

b) $x^2-4 \geq 0 \rightarrow 2 \leq x, x \leq -2 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = [0, +\infty)$

77. **¿Cuál es el dominio de estas funciones con radicales?**

a) $f(x) = \dfrac{7x}{2-\sqrt{x-5}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{4-\sqrt{x+1}}$

a) $x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$ $\sqrt{x-5} \neq 2 \rightarrow x-5 \neq 4 \rightarrow x \neq 9$

$\text{Dom } f = [5, 9) \cup (9, +\infty) = [5, +\infty) - \{9\}$

b) $3x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \dfrac{1}{3}$ $x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$ $\sqrt{x+1} \neq 4 \rightarrow x+1 \neq 16 \rightarrow x \neq 15$

$\text{Dom } f = \left[\dfrac{1}{3}, 15\right) \cup (15, +\infty) = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right) - \{15\}$

78. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

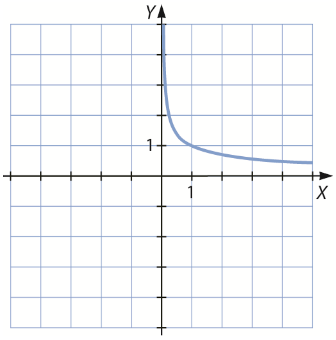
a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

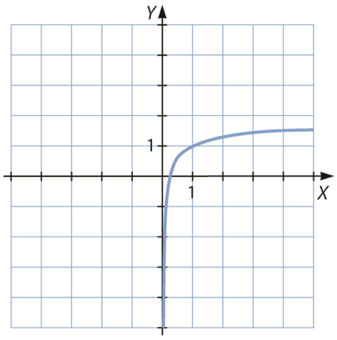
c) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$

d) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x-2}} - 3$

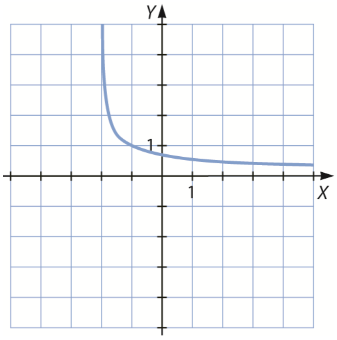
a)



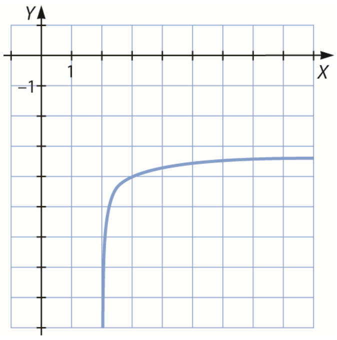
c)



b)



d)



79. Comprueba si estos pares de funciones son inversas.

a) $f(x) = 2x - 5$ $\quad g(x) = \dfrac{x+5}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{3-x}{4}$ $\quad g(x) = 3 - 4x$

c) $f(x) = x^3 + 1$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

a) $x = 2y - 5 \rightarrow y = \dfrac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

b) $x = \dfrac{3-y}{4} \rightarrow y = 3 - 4x \rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

c) $x = y^3 + 1 \rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow$ Son inversas.

80. Calcula, si es posible, la inversa de estas funciones.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

d) $f(x) = x^2 + x$

e) $f(x) = \sqrt{2 - 5x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

a) $x = 2y - 1 \rightarrow y = \dfrac{x+1}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b) $x = y^2 - 5 \rightarrow y = \pm\sqrt{x+5} \rightarrow$ No existe la inversa, $f^{-1}(x)$ no es una función, porque para cada valor de x se obtienen dos imágenes.

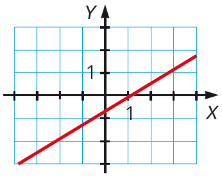
c) $x = \dfrac{1}{y+2} \rightarrow y = \dfrac{1-2x}{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}$

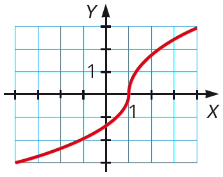
d) $x = y^2 - y \rightarrow$ No existe la inversa; $f^{-1}(x)$ no es una función, porque para cada valor de x se obtienen dos imágenes.

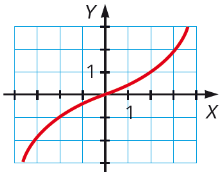
e) $x = \sqrt{2-5y} \rightarrow y = \dfrac{2-x^2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2-x^2}{5}$

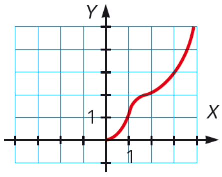
f) $x = \dfrac{1}{y-2} \rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

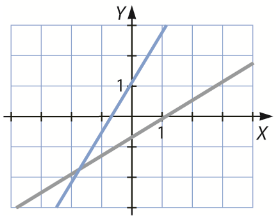
81. Dibuja la gráfica de la inversa de cada función.

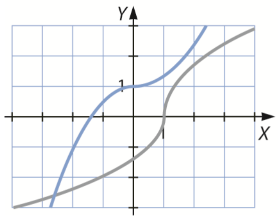
a)


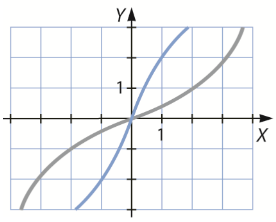
c)


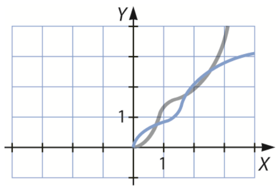
b)


d)


a)


c)


b)


d)


82. Calcula las funciones inversas de estas funciones.

a) $f(x) = \ln(x+3)$

b) $f(x) = 3 + 4 \cdot 5^x$

c) $f(x) = \dfrac{1 + tg\, x}{2}$

d) $f(x) = sen\; 2x$

e) $f(x) = |x+1|$

f) $f(x) = \dfrac{1 + \log_3 x}{5}$

a) $x = \ln(y+3) \rightarrow e^x = y + 3 \rightarrow y = e^x - 3 \rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 3$

b) $x = 3 + 4 \cdot 5^y \rightarrow \log_5 \dfrac{x-3}{4} = y \rightarrow y = \log_5(x-3) - \log_5 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \log_5(x-3) - \log_5 4$

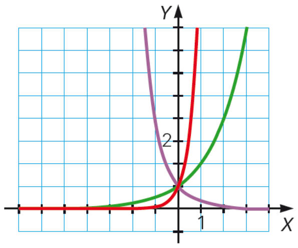
c) $x = \dfrac{1 + tg\, y}{2} \rightarrow y = arc\; tg(2x-1) \rightarrow f^{-1}(x) = arc\; tg(2x-1)$

d) $x = sen\; 2y \rightarrow y = \dfrac{arc\,sen\, x}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{arc\,sen\, x}{2}$

e) $x = |y+1| \rightarrow$ No existe inversa, ya que para cada valor de x, $f^{-1}(x)$ devuelve dos imágenes; $f^{-1}(x)$ no es una función.

f) $x = \dfrac{1 + \log_3 y}{5} \rightarrow 5x - 1 = \log_3 y \rightarrow y = 3^{5x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = 3^{5x-1}$

83. **Asocia cada gráfica con su función.**



a) $f(x) = 12^x$ b) $g(x) = 2^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

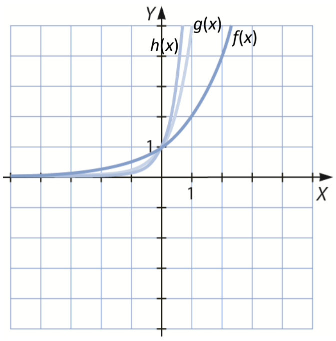
a) $f(x) \rightarrow$ Roja.   b) $g(x) \rightarrow$ Verde.   c) $h(x) \rightarrow$ Morada.

84. **Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes ternas de funciones exponenciales.**

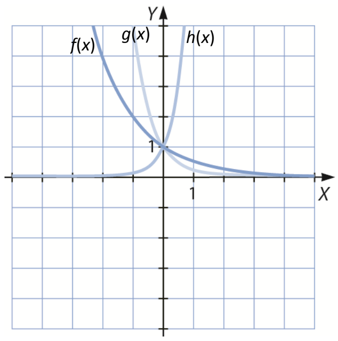
a) $f(x) = 2^x$ $g(x) = 5^x$ $h(x) = 10^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $h(x) = 10^x$

a)

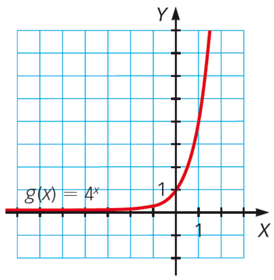


b)

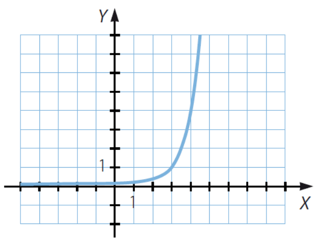


85. **A partir de la gráfica de la función exponencial $g(x) = 4^x$ representa las siguientes funciones.**

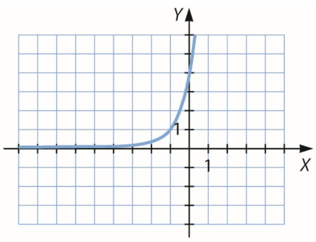
a) $f(x) = 4^{x-3}$
b) $f(x) = 4^{x+1}$
c) $f(x) = 1 + 4^x$
d) $f(x) = -4^x$
e) $f(x) = 2 - 4^x$
f) $f(x) = 4^x - 1$



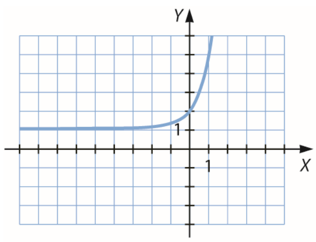
a) $4^{x-3} = g(x-3)$



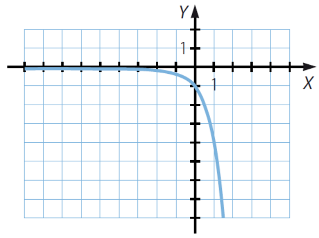
b) $4^{x+1} = g(x+1)$



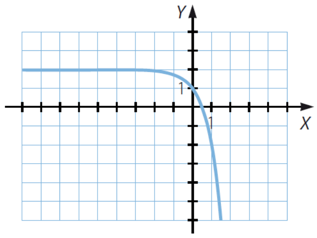
c) $1 + f(x) = 1 + 4^x$



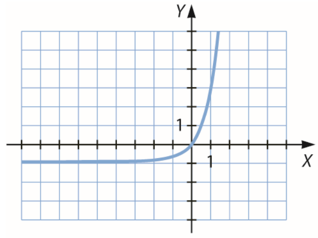
d) $-f(x) = -4^x$



e) $2 - f(x) = 2 - 4^x$



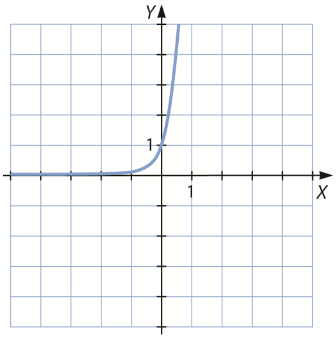
f) $f(x) - 1 = 4^x - 1$



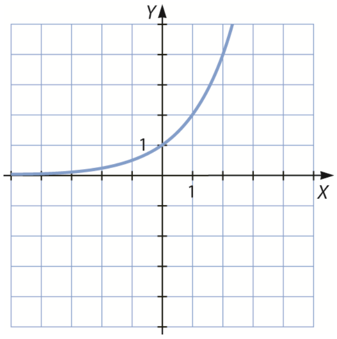
86. **A partir de la gráfica de la función exponencial $g(x) = 4^x$ representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 4^{2x}$ b) $f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$

a)



b)

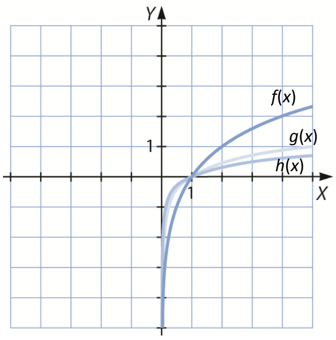


87. **Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes ternas de funciones logarítmicas.**

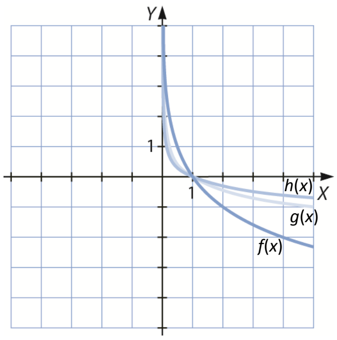
a) $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = \log_5 x$ $h(x) = \log_{10} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ $h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

a)



b)

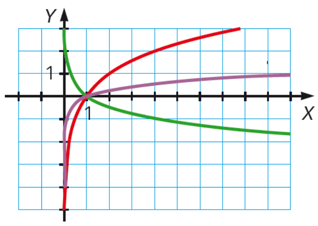


88. **Asocia cada gráfica con su función.**

a) $f(x) = \log_{12} x$

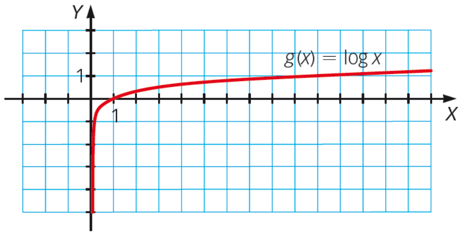
b) $g(x) = \log_2 x$

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



a) Morada. b) Roja. c) Verde.

89. **A partir de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log x$ representa las siguientes funciones.**



a) $f(x) = \log x - 3$

b) $f(x) = \log x + 1$

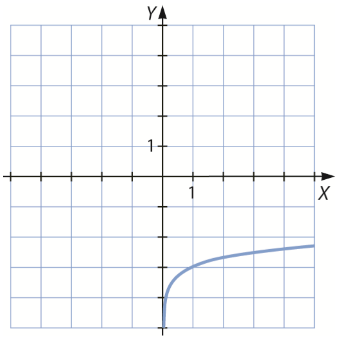
c) $f(x) = 1 - \log x$

d) $f(x) = -\log x$

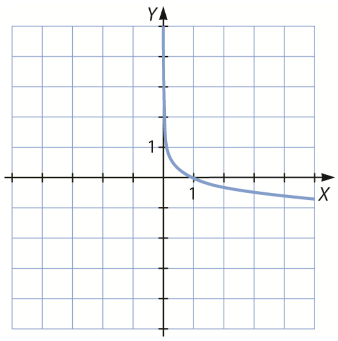
e) $f(x) = 2 - \log x$

f) $f(x) = \log x - 1$

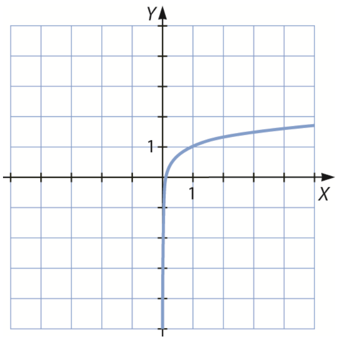
a)



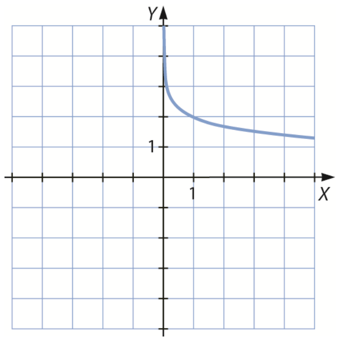
d)



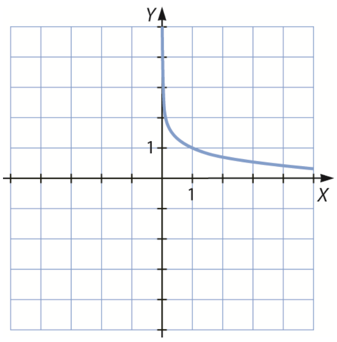
b)



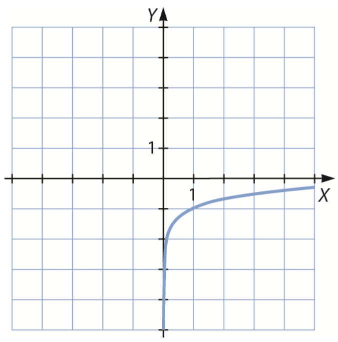
e)



c)



f)

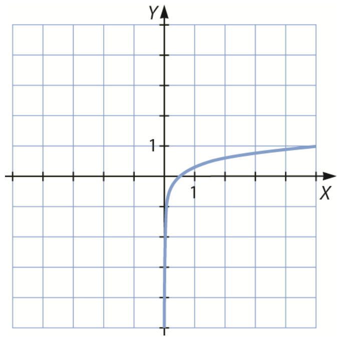


90. **A partir de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log x$ representa las siguientes funciones.**

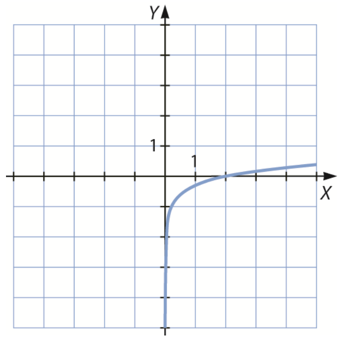
a) $f(x) = \log 2x$

b) $f(x) = \log \dfrac{x}{2}$

a) $f(x) = \log 2x = \log 2 + \log x$



b) $f(x) = \log \left(\frac{x}{2}\right) = \log x - \log 2$



91. **Dibuja la gráfica de la función $g(x) = \cos x$. A partir de ella representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \cos(-x)$

b) $f(x) = -\cos x$

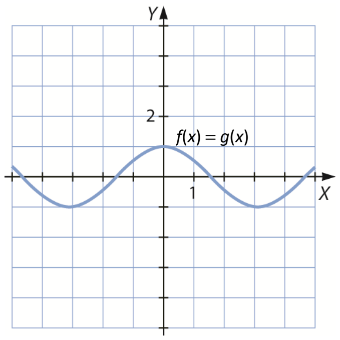
c) $f(x) = \cos(x + \pi)$

d) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

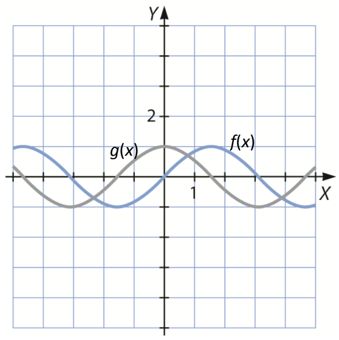
e) $f(x) = \cos x + 2$

f) $f(x) = 1 - \cos x$

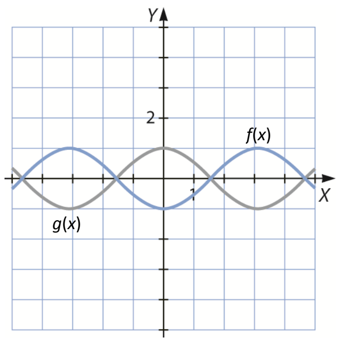
a)



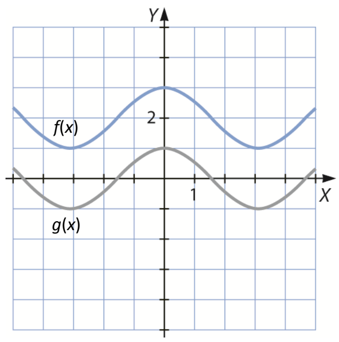
d)



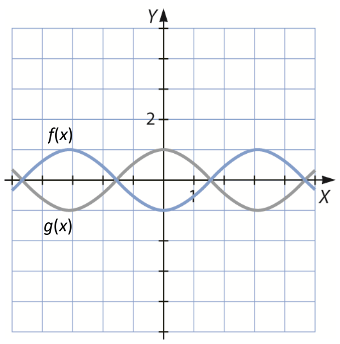
b)



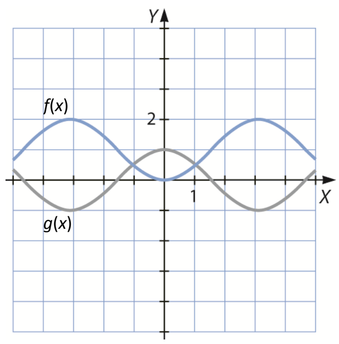
e)



c)



f)



92. **Dibuja la gráfica de la función $g(x) = sen\ x$. A partir de ella representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = sen\ (-x)$

b) $f(x) = -sen\ x$

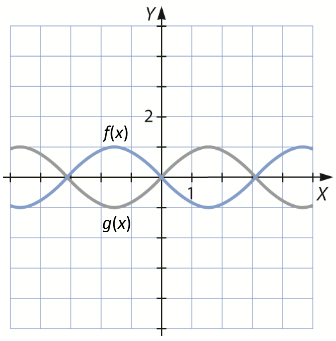
c) $f(x) = sen\ (x + \pi)$

d) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

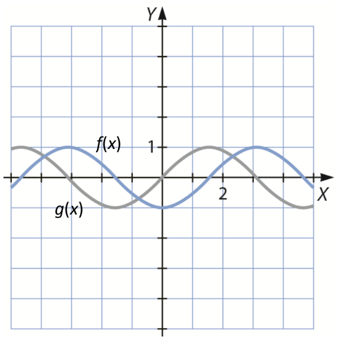
e) $f(x) = sen\ x + 2$

f) $f(x) = 1 - sen\ x$

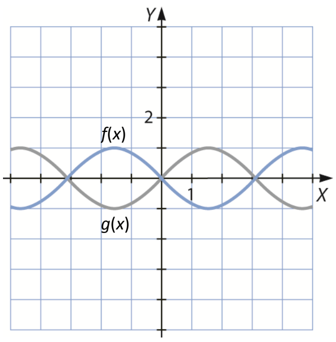
a)



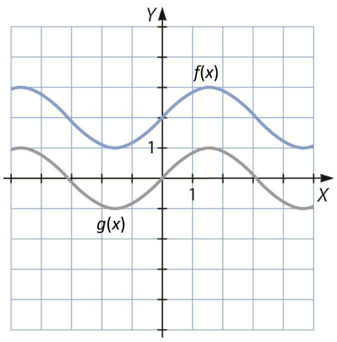
d)



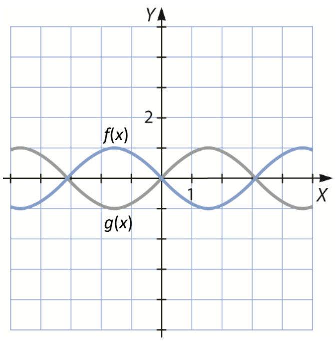
b)



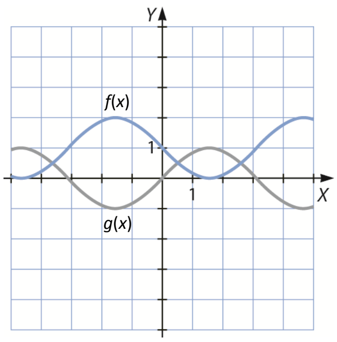
e)



c)



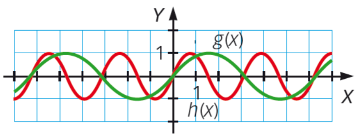
f)



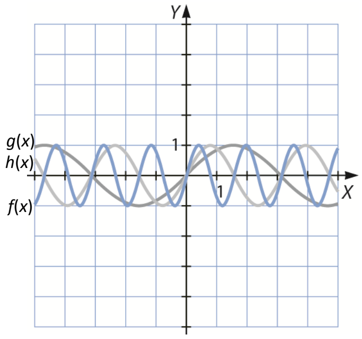
93. **A partir de las gráficas de las funciones $g(x) = sen\ x$, $h(x) = sen\ 2x$ representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = sen\ 4x$

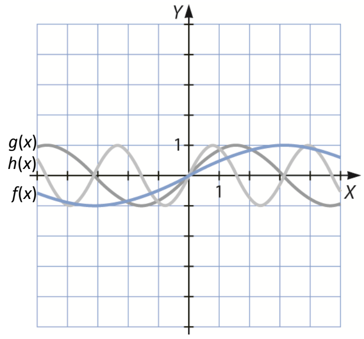
b) $f(x) = sen\ \dfrac{x}{2}$



a)



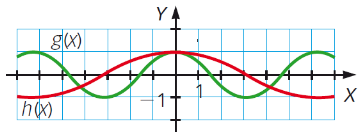
b)



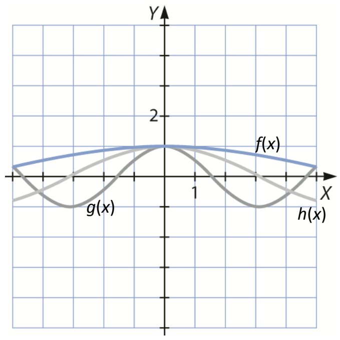
94. **A partir de las gráficas de las funciones $g(x) = \cos x$, $h(x) = \cos \frac{x}{2}$ representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$

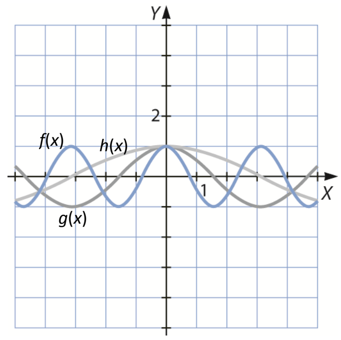
b) $f(x) = \cos 2x$



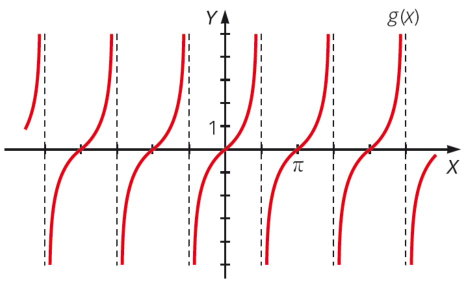
a)



b)

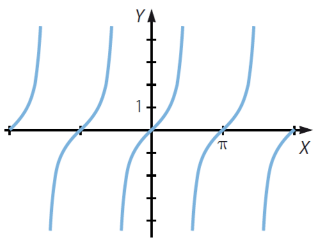


95. **A partir de la gráfica de la función trigonométrica $g(x) = tg\, x$ representa las siguientes funciones.**

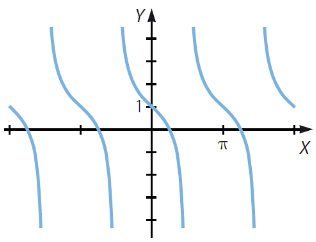


a) $f(x) = tg\,(x + \pi)$ b) $f(x) = 1 - tg\, x$

a)



b)



96. **A partir de la gráfica de la función $g(x) = \textit{arc sen } x$ realiza las gráficas de las funciones.**

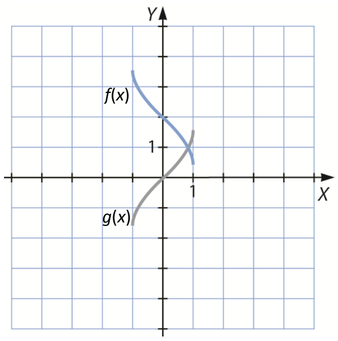
a) $f(x) = 2 - \text{arc sen } x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \text{arc sen } x$

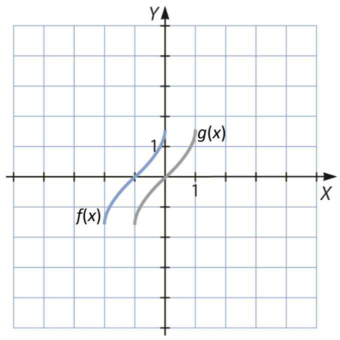
c) $f(x) = \text{arc sen }(x + 1)$

d) $f(x) = \text{arc sen}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

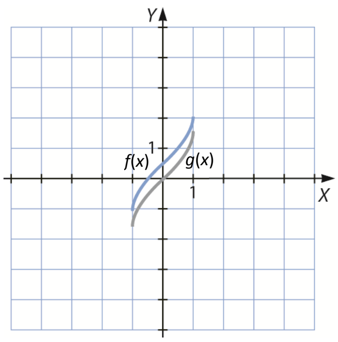
a)



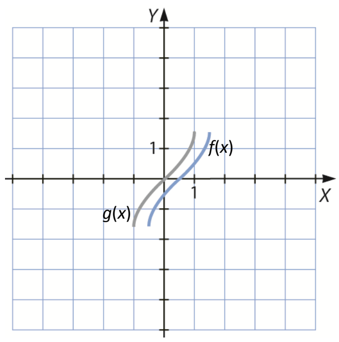
c)



b)



d)



97. **A partir de la gráfica de la función $g(x) = \textit{arc cos } x$ realiza las gráficas de las funciones.**

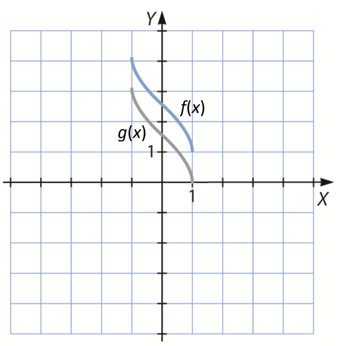
a) $f(x) = 1 + \text{arc cos } x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \text{arc cos } x$

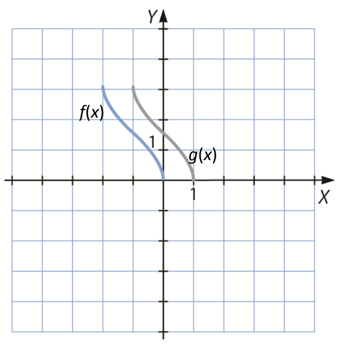
c) $f(x) = \text{arc cos }(x + 1)$

d) $f(x) = \text{arc cos}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

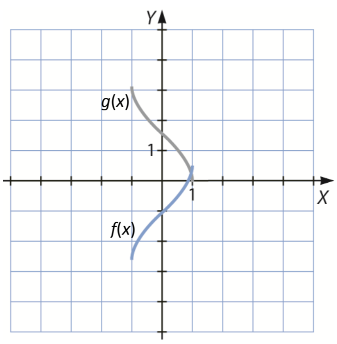
a)



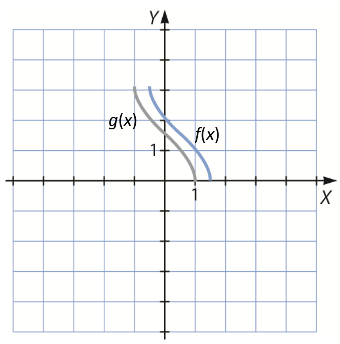
c)



b)



d)



98. **Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en esta función.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- $x = -1$:

  $x < 0 \rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 \rightarrow f(-1) = 2$

- $x = 0$:

  $f(0) = 0^2 \rightarrow f(0) = 0$

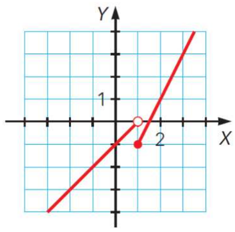
- $x = \frac{1}{2}$:

  $x > 0 \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

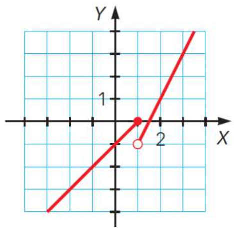
99. **Indica cuál de las siguientes gráficas le corresponde a esta función.**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a)



b)



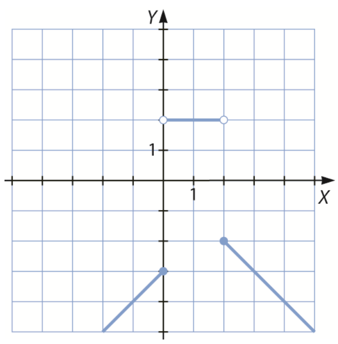
A $f(x)$ le corresponde la gráfica a), ya que el punto $x = 1$ pertenece al segundo trozo.

100. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

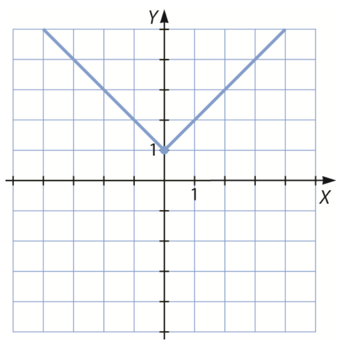
a) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a)



b)



101. **Representa esta función.**

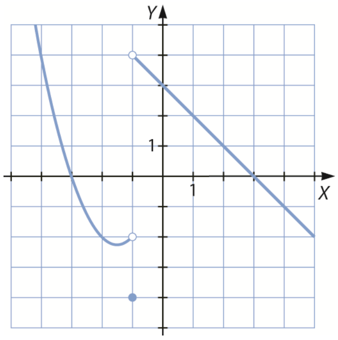
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos próximos a -1, completando las tablas.

Izquierda de -1	-2	$-1,5$	$-1,1$	$-1,05$
$f(x)$				

Derecha de -1	0	$-0,5$	$-0,9$	$-0,95$
$f(x)$				

Describe lo que le sucede a la función en las proximidades de -1.

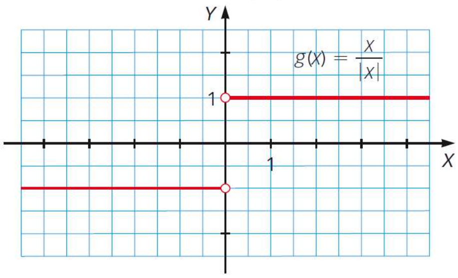


Izquierda de –1	–2	–1,5	–1,17	–1,05
***f*(*x*)**	**–2**	**–2, 25**	**–2, 09**	**–2, 0457**

Derecha de –1	0	–0,5	–0,9	–0,95
***f*(*x*)**	**3**	**3, 5**	**3, 9**	**3, 95**

A la derecha de $x = -1$, las imágenes tienden a 4, es decir, $-(-1) + 3$.

102. **La función cuya expresión algebraica es $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se llama *función signo de x*.**



Encuentra su expresión algebraica como una función definida a trozos y responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto vale si $x = 3$?

b) ¿Cuánto vale si $x = -5$?

c) ¿Cuánto vale si $x = -3,4$?

d) ¿Cuánto vale si $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) $f(3) = 1$ b) $f(-5) = -1$ c) $f(-3, 4) = -1$ d) No existe imagen de $x = 0$.

103. **Representa y describe las características de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{-x + 10}{3} & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x^2 + 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ▪ Primer intervalo $(-\infty, 0)$:

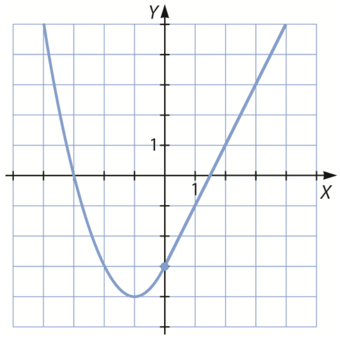
Parábola, decreciente hasta $x = -1$ punto en el que se sitúa el vértice $(-1, -4)$, y creciente en el resto, terminando en el punto $(0, -3)$.

▪ Segundo intervalo $[0, +\infty)$:

Recta creciente empezando en el punto $(-3, 0)$ incluido.

Es continua en todo el dominio.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = [-4, +\infty)$



b) ▪ Primer intervalo $(-\infty, -2]$:

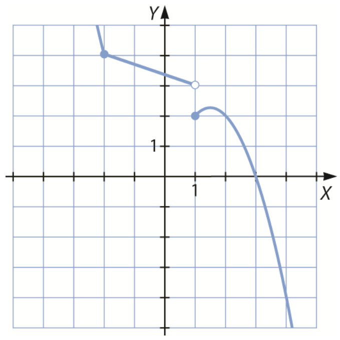
Parábola, decreciente en ese intervalo acabando en $(-2, 4)$ incluido.

▪ Segundo intervalo $(-2, 1)$:

Recta decreciente con extremos en $(-2, 4)$ y $(1, 3)$, este último punto no incluido.

▪ Tercer intervalo $[3, +\infty)$:

Parábola decreciente en ese intervalo empezando en $(3, 0)$ con vértice en $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.



Tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right] \cup (3, +\infty)$

c) ▪ Primer intervalo $(-\infty, -2)$:

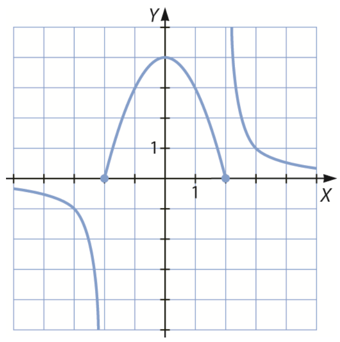
Función racional, decreciente en ese intervalo.

▪ Segundo intervalo $[-2, 2]$:

Parábola con máximo en $(0, 4)$ y extremos en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

▪ Tercer intervalo $(2, +\infty)$:

Función racional, decreciente en ese intervalo.



Tiene discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$.

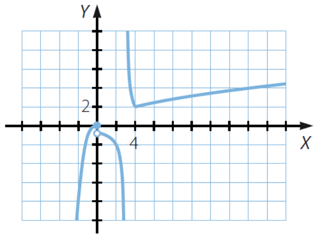
Dom $f = \mathbb{R}$ Im $f = (-\infty, +\infty]$

104. **Representa y describe las características de estas funciones definidas a trozos.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \log x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$ Im $f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$



La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 3) \cup (3, 4)$.

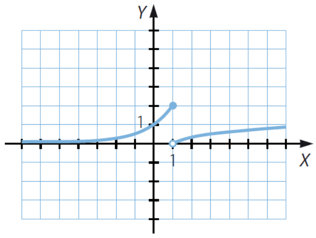
Tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

No es continua en $x = 0$, ni en $x = 3$, y el punto $x = 0$ es de discontinuidad inevitable de salto finito, y el punto $x = 3$ es de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

No es simétrica ni periódica.

b) Dom $g = \mathbb{R}$ Im $g = (0, 2]$



La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

No es continua en $x = 1$, y este punto es de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.

105. **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

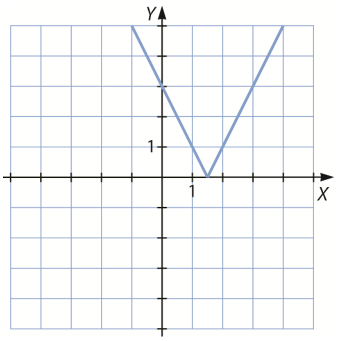
a) $f(x) = |2x - 3|$

b) $f(x) = |-3x + 1|$

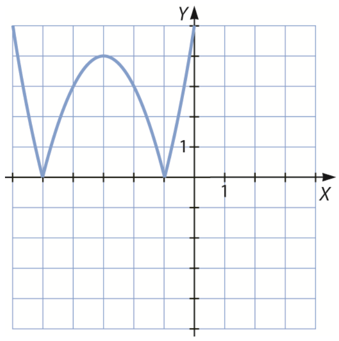
c) $f(x) = |x^2 + 6x + 5|$

d) $f(x) = |-x^2 + x - 2|$

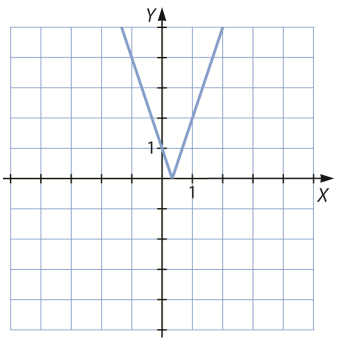
a)



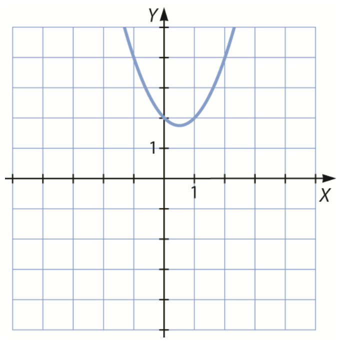
c)



b)



d)



106. **Expresa como una función definida a trozos.**

a) $f(x) = |x| + |x + 2|$
b) $f(x) = |x + 1| - |1 - x|$
c) $f(x) = |x - 1| - |1 - x|$
d) $f(x) = |2x + 1| - |2 - x|$

a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 2 & \text{si} \quad -2 < x \le 0 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2x & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si} \quad x \le -\dfrac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si} \quad -\dfrac{1}{2} < x \le 2 \\ x + 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

107. **Expresa como función definida a trozos.**

a) $|x^2 - 4|$
b) $\left|\dfrac{1}{x + 2}\right| - sen\, x$
c) $\left|\sqrt[3]{x - 3}\right|$

a) $|x^2 - 4| = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4 & \text{si } x^2 - 4 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

b) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x + 2 < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x + 2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

$\left|\dfrac{1}{x+2}\right| - sen\, x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} - sen\, x & \text{si } x + 2 < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} - sen\, x & \text{si } x + 2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2} - sen\, x & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{1}{x+2} - sen\, x & \text{si } x > -2 \end{cases}$

c) $\left|\sqrt[3]{x-3}\right| = \begin{cases} -\sqrt[3]{x-3} & \text{si } x - 3 < 0 \\ \sqrt[3]{x-3} & \text{si } x - 3 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt[3]{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt[3]{x-3} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

108. **Dadas $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x + 3}$ y $g(x) = 4$, calcula.**

a) $(f + g)(2)$
b) $(f \cdot g)(1)$
c) $(f - g)(3)$
d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0)$

a) $(f + g)(2) = \dfrac{5 \cdot 2 - 1}{2 + 3} + 4 \rightarrow (f + g)(2) = \dfrac{29}{5}$

b) $(f \cdot g)(1) = \dfrac{5 \cdot 1 - 1}{1 + 3} \cdot 4 \rightarrow (f \cdot g)(1) = 4$

c) $(f - g)(3) = \dfrac{5 \cdot 3 - 1}{3 + 3} - 4 \rightarrow (f - g)(3) = -\dfrac{5}{3}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0) = \dfrac{5 \cdot 0 - 1}{0 + 3} : 4 \rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)(0) = -\dfrac{1}{12}$

109. **Calcula el dominio de estas funciones.**

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad g(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Utiliza el resultado obtenido para calcular el dominio de las siguientes funciones.

a) $(f + g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Dom $g = [-5, 5]$

a) Dom $(f + g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$

b) Dom $(f \cdot g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$

c) Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = (-5, -2] \cup [2, 5)$

d) Dom $\left(\frac{g}{f}\right) = [-5, -2) \cup (2, 5]$

110. **Dadas las funciones:**

$$f(x) = 3x - 1 \qquad g(x) = \frac{1}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x+1}$$

define las siguientes funciones.

a) $(f + g)(x)$

b) $(f - (g + h))(x)$

c) $(f \cdot g)(x)$

d) $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

e) $f^2(x)$

f) $(h^2 + f)(x)$

g) $(g \cdot f + h^2)(x)$

h) $\left(\frac{f+g}{h}\right)(x)$

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 1 + \dfrac{1}{x-2} \rightarrow (f+g)(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 3}{x-2}$

b) $(f-(g+h))(x) = f(x) - (g+h)(x) = f(x) - g(x) - h(x) = 3x - 1 - \dfrac{1}{x-2} - \sqrt{x+1} = \dfrac{3x^2 - 7x + 1 - (x-2)\sqrt{x+1}}{x-2}$

c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x-1) \cdot \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{3x-1}{x-2}$

d) $\left(\dfrac{g}{h}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{1}{x-2} : \sqrt{x+1} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 2}$

e) $f^2(x) = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

f) $(h^2 + f)(x) = h^2(x) + f(x) = x + 1 + 3x - 1 = 4x$

g) $(g \cdot f + h^2)(x) = (f \cdot g)(x) + h^2(x) = \dfrac{3x-1}{x-2} + x + 1 = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x-2}$

h) $\left(\dfrac{f+g}{h}\right)(x) = \dfrac{(f+g)(x)}{h(x)} = \dfrac{3x^2 - 7x + 3}{x-2} : \sqrt{x+1} = \dfrac{3x^2 - 7x + 3}{(x-2)\sqrt{x+1}} = \dfrac{(3x^2 - 7x + 3)\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 2}$

111. **Dadas las funciones $f(x) = 4x^2 + 11$ y $g(x) = \frac{5}{2}x$, calcula.**

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(2)$ c) $(f \circ f)(2)$ d) $(g \circ g)(2)$

a) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 4\left(\frac{5 \cdot 2}{2}\right)^2 + 11 = 111$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = \frac{5}{2} \cdot (4 \cdot 2^2 + 11) = \frac{135}{2}$

c) $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = 4(4 \cdot 2^2 + 11) + 11 = 119$

d) $(g \circ g)(2) = g(g(2)) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{25}{2}$

112. **Calcula $(f \circ g)(2)$ si f y g son funciones que cumplen que $f(10) + 5 = 0$, $g(2) - 10 = 0$.**

$f(10) = -5$, $g(2) = 10 \rightarrow (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(10) = -5$

113. **Dadas las funciones $f(x) = 4$ y $g(x) = -2x^2 + 6x$, calcula $f \circ g$ y $g \circ f$.**

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4) = -2 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 = -8$

114. **Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 5$, calcula $f^{-1} \circ g$ y $g \circ f^{-1}$.**

$f^{-1}(x) = x^2$

$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = (x^2 - 5)^2 = x^4 - 10x^2 + 25$

$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = (x^2)^2 - 5 = x^4 - 5$

115. **Comprueba con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3x - 2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$.**

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = \sqrt{3x - 1}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+1}\right) = 3\sqrt{x+1} - 2$

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

$\text{Dom}\,(f \circ g) = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$\text{Dom}\,(g \circ f) = [-1, +\infty)$

116. **Para la función $h(x)$ encuentra dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$.**

a) $h(x) = \sqrt{x - 3}$

b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

c) $h(x) = (3x - 1)^4$

d) $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2} + 1}$

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x - 3$

b) $f(x) = x - 3$ $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^4$ $g(x) = 3x - 1$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $g(x) = \frac{1}{x-2}$

117. **Explica de qué manera hay que componer**

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \qquad g(x) = 5x + 1 \qquad h(x) = \frac{2}{x + 1}$$

para obtener las siguientes funciones.

a) $i(x) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1$

b) $i(x) = 25x + 6$

c) $i(x) = \dfrac{x + 11}{x + 1}$

d) $i(x) = \sqrt{x^2 + 8}$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^2 + 4}\right) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1$

b) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1 = 25x + 6$

c) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\dfrac{2}{x + 1}\right) = \dfrac{10}{x + 1} + 1 = \dfrac{x + 11}{x + 1}$

d) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x^2 + 4}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 8}$

118. **Un objeto que se lanza hacia arriba puede llegar a una altura máxima determinada por la función, $h(t) = v_0 t - 4{,}9t^2 + h_0$ donde v_0 es la velocidad inicial del objeto, h_0 es la altura inicial (desde donde se inicia el movimiento) y t el tiempo.**

Se lanza un cohete pirotécnico desde una plataforma situada a 2 m del suelo, con una velocidad inicial de 40 m/s.

a) ¿A qué altura máxima llegará el cohete?

b) Si se programa para que explote a los 5 s del lanzamiento, ¿a qué altura se producirá la explosión?

a) $h_0 = 2$ m $\qquad v_0 = 40$ m/s $\rightarrow h(t) = 40t - 4{,}9t^2 + 2$

La altura máxima se dará en el vértice de la parábola: (4,9; 80,35) $\rightarrow$ 80,35 m será la altura máxima que alcanzará el cohete.

b) $t = 5$ s $\rightarrow h(t) = 40 \cdot 5 - 4{,}9 \cdot 5^2 + 2 = 79{,}5$ m

119. **El precio en euros de un artículo perecedero que empieza a venderse el primer día de un determinado mes, varía con el tiempo, en días, según la función:**

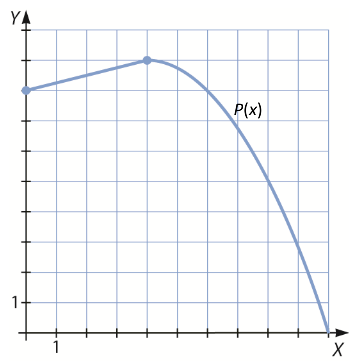
$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{4} + 8 & \text{si } 0 \le t \le 4 \\[2mm] \dfrac{-t^2}{4} + 2t + 5 & \text{si } 4 < t \le 10 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el precio inicial del artículo?

b) Dibuja la gráfica de la función $P(t)$.

a) $t = 0 \rightarrow P(0) = 8 \rightarrow$ El precio es de 8 €.

b)



120. **Un estudio sobre el medio ambiente ha estimado que el nivel medio de monóxido de carbono en el aire es $M(x) = 1 + 0{,}5x$ partes por millón cuando el número de personas es x miles. Si la población en miles en el momento t es:**

$$P(t) = 200 + 257 + 0{,}3t^2$$

a) Escribe la función que expresa el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

b) Calcula para $t = 10$ el nivel de monóxido de carbono.

a) Para calcular en este caso cuál es el nivel de monóxido de carbono en función del tiempo hay que componer ambas funciones, por lo que

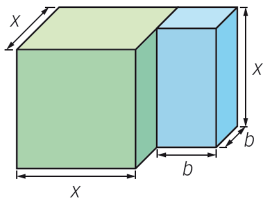
$$(M \circ P)(t) = M(P(t)) = 1 + 0{,}5(457 + 0{,}3t^2)$$

b) Para $t = 10$, el nivel de monóxido de carbono será

$$M(10) = 1 + 0{,}5(457 + 0{,}3 \cdot 10^2) = 1 + 243{,}5 = 244{,}5$$

121. **El dibujo representa un sistema de tanques de agua. Uno de ellos es un tanque cúbico de lado x y el otro un tanque de altura x y base cuadrada de lado b.**

Encuentra una función que exprese el volumen total del sistema de tanques en función de la longitud de las aristas de los mismos.



El volumen total viene dado por la fórmula $V(x, b) = x^3 + xb^2$.

122. **Para repoblar un lago se introducen inicialmente 50 peces de una especie que triplica el número de miembros cada dos meses.**

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de peces en función de los meses?

b) ¿Cuántos peces hay después de 4 años?

c) ¿Después de cuánto tiempo la población de peces será de 1 000 individuos?

a) Teniendo en cuenta los datos iniciales, como la población inicial son 50 peces, en dos meses habrá 150 peces, en 4 habrá 450, y en seis 1 350, y así sucesivamente:

$f(m) = 50 \cdot 3^{\frac{m}{2}}$

b) Para calcular cuántos peces hay en cuatro años, se puede usar la misma fórmula del apartado anterior, previa conversión de años a meses: 4 años = 48 meses.

Por tanto, después de 4 años habrá $50 \cdot 3^{24} = 14\,121\,476\,824\,050$ peces.

c) Para estimar cuánto tiempo se necesita, se calcula:

$$50 \cdot 3^{\frac{m}{2}} = 1000 \rightarrow 3^{\frac{m}{2}} = 20 \rightarrow m = 2\log_3 20 = 5{,}45$$

Y se aproxima al siguiente mes, es decir 6 meses.

123. En un lago existe una especie de pez grande que se alimenta de una raza de peces más pequeña, y esta, a su vez, se alimenta de plancton. El número de peces grandes es una función $f(x)$ de la cantidad x de peces pequeños, y el número de peces pequeños es una función $g(y)$ de la cantidad y de plancton del lago. Expresa la población de peces grandes en función del plancton del lago si:

$$f(x) = 30 + \sqrt{\frac{x}{120}} \qquad g(y) = 4y - 1$$

En este caso, lo único que habrá que hacer es componer una función con otra, o lo que es lo mismo:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = 30 + \sqrt{\frac{4y-1}{120}}$$

124. Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura de un objeto sigue la función:

$$f(t) = T + (C - t) \cdot e^{-kt}$$

donde T es la temperatura ambiente, C la temperatura inicial, t el tiempo transcurrido y k la tasa de enfriamiento del objeto por unidad de tiempo.

Un objeto con una temperatura de 40 °C se deja al aire libre donde la temperatura es de 25 °C y después de 10 minutos la temperatura del objeto es de 34 °C. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el objeto se enfríe hasta tener una temperatura de 30 °C?

$f(10) = 34 = 25 + (40 - 10) \cdot e^{-10k} \rightarrow k = 0{,}12$ $\qquad$ $30 = 25 + (40 - t) \cdot e^{-0{,}12t} \rightarrow t \approx 13{,}802$ min

125. Una ONG ha estimado que el número de personas ingresadas en los hospitales tras un tsunami sigue aproximadamente la fórmula:

$$P(t) = 1 + \frac{110}{t^2 + 10} \qquad t \in (0, 30)$$

donde P es el número de personas hospitalizadas, en miles, y t es el número de días transcurridos desde el tsunami.

a) ¿Cuántas personas habrá hospitalizadas el primer día?

b) ¿Y cuántas habrá al cabo de tres semanas?

c) Si la capacidad hospitalaria de una isla del área afectada es de 2000 camas, ¿hasta qué día estuvo desbordada la capacidad?

a) 11 000 personas

b) 1 243 personas

c) $1 + \dfrac{110}{t^2 + 10} = 2 \rightarrow t^2 + 120 = 2t^2 + 20 \rightarrow t^2 - 100 = 0 \rightarrow t = \pm 10$

Como el número de personas hospitalizadas decrece según el número de días la capacidad de hospitalización estuvo desbordada hasta el décimo día.

PARA PROFUNDIZAR

126. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

La parábola de eje vertical y vértice $V(2, 1)$ que pasa por $(4, 9)$, ¿por cuál de estos puntos pasa?	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
La función f verifica que $f(3x-1) = x^3 + x + 1$ para cualquier número real x. ¿Cuál es el valor de $f(5)$?	7	13	31	11	131
Sea $f(x)$ una función tal que $f(x) + 2f(-x) = sen\, x$ para todo número real. ¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$?	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Si $f(x) = 3^x + 5$, el dominio de f^{-1} es:	$(0, +\infty)$	$(5, +\infty)$	$(8, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(3, +\infty)$
Averigua el número de valores de x pertenecientes al intervalo $(0{,}01; 1)$ en el que la gráfica de la función $f(x) = sen\,\frac{1}{x}$ corta al eje de abscisas.	31	28	56	14	112

- De los datos del enunciado se puede obtener que, si se formula la parábola como $ax^2 + bx + c$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 2^2a + 2b + c = 1 \\ 16a - 16a + c = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -b = 4a \\ 4a + 2b + c = 1 \\ c = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 9 \end{array}\right\}$$

La parábola pasa por el punto (1, 3), fruto de sustituir $x = 1$ en $2x^2 - 8x + 9$.

- Como $3x - 1 = 5 \rightarrow x = 2$, sustituyendo en la fórmula, con lo que se obtiene el valor:

$$f(5) = f(3\cdot 2 - 1) = 2^3 + 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$$

- Lo más fácil para resolver este ejercicio es proponer un sistema de ecuaciones con $x = \frac{\pi}{2}$ y con $x = -\frac{\pi}{2}$. Esto conduce a:

$$\left.\begin{array}{r} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{1^a - 2\cdot 2^a} -3f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

- Si lo primero que se hace es calcular la inversa de $f(x)$, de esta manera se verá qué dominio tiene

$$f(x) = 3^x + 5 \rightarrow x = 3^{f^{-1}(x)} + 5 \rightarrow x - 5 = 3^{f^{-1}(x)} \rightarrow f^{-1}(x) = \log_3(x-5) \rightarrow \text{Dom}\, f^{-1} = (5, +\infty)$$

- Para obtener el número de veces que f corta con el eje X, basta con calcular las raíces de $f(x)$.

$$f(x) = sen\frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{\pi n},\ n \neq 0,\ n \in \mathbb{Z}$$

¿Para qué valores se obtendrá $1 > x = \frac{1}{n\pi} > 0{,}01$?

Bastará resolver la inecuación y comprobar a partir de qué n no se aplica:

$x = \frac{1}{\pi n} > 0{,}01 \rightarrow \frac{100}{\pi} > n \rightarrow n < 31{,}8$ → Corta 31 veces.

127. **Considera las funciones f y g que se definen a continuación:**

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

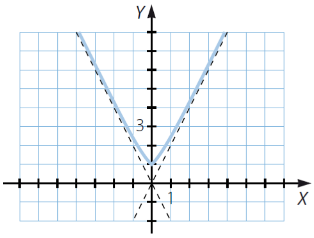
Comprueba que se cumple lo siguiente:

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$$

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

128. **Razona para qué valores de x se hace mayor la diferencia $\sqrt{x^2 + 1} - |x|$.**

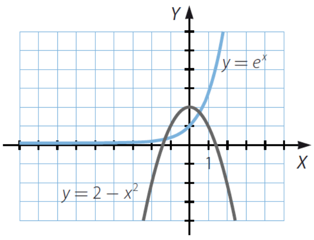


La diferencia alcanza el mayor valor para $x = 0$.

129. **¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$?**

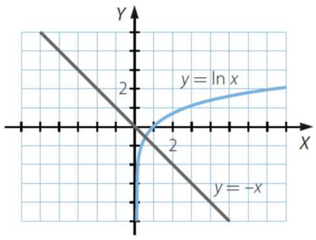
a) $e^x = 2 - x^2$ b) $\ln x = -x$ c) $\text{sen}\, x = \frac{x}{2}$

a)



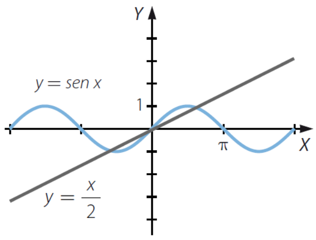
Tiene dos soluciones.

b)



Tiene una solución.

c)



Tiene tres soluciones.

130. **Las manecillas de un reloj miden 20 y 30 centímetros, respectivamente. Si en este momento las manecillas están entre las 12:00 h y las 12:30 h, responde a las siguientes preguntas.**

a) Expresa el ángulo que forman en función del tiempo, t, medido en minutos.

b) Halla el área del triángulo creado al unir sus extremos en función de t. ¿Puede tomar el valor 0? ¿A qué hora alcanza su mayor valor?

c) Expresa la distancia entre los extremos de las agujas en función de t.

a) Como la manecilla que marca las horas tarda 12 horas en completar una vuelta (2π radianes), su velocidad es: $v_h = \frac{2\pi}{720} = \frac{\pi}{360}$ rad/min

Análogamente, la velocidad de la otra manecilla es: $v_m = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ rad/min

El ángulo que forman ambas manecillas es la diferencia entre los ángulos recorridos por cada una, en función del tiempo t transcurrido:

$$\alpha = \frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{360}t = \frac{11\pi}{360}t \text{ rad}$$

b) $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot sen\left(\frac{11\pi}{360}t\right) = 300\ sen\left(\frac{11\pi}{360}t\right)$

Esta función se anula si el ángulo mide $k\pi$ radianes, con $k \in \mathbb{Z}$. En el intervalo de tiempo dado esta condición solo se cumple a las 12 horas ($\alpha = 0$).

Como el mayor valor de la función seno se alcanza cuando el ángulo mide $\frac{\pi}{2}$ radianes, hay que calcular a qué hora el ángulo formado tiene esta amplitud:

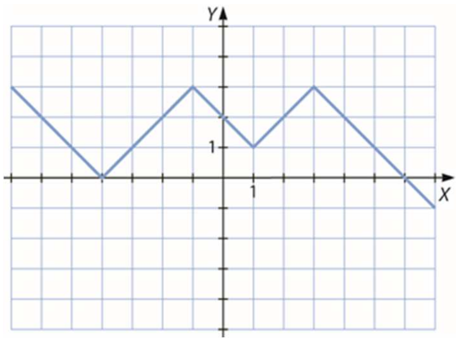
$\frac{11\pi}{360}t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 16{,}36$ El área es máxima a las 12 horas y 16,36 minutos.

c) Por el teorema del coseno, la distancia entre las agujas es:

$$d = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)} = \sqrt{1\,300 - 1\,200\ cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)} =$$
$$= 10\sqrt{13 - 12\ cos\left(\frac{11\pi}{360}t\right)}$$

131. Representa gráficamente la siguiente función en el intervalo $-8 \leq x \leq 8$.

$$f(x) = |||x - 1| - 2| - 3|$$



132. Sea f una función para la que $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ si x es distinto de 0 y de 1. ¿Cuál es el valor de $f(2)$?

(Olimpiadas matemáticas)

Al saber que la fórmula es válida siempre que x es distinto de 0 y de 1, la mejor idea es probar a resolver:

$f(2) + f(-1) = 2 \rightarrow f(2) = 2 - f(-1)$

Y falta aún por saber el valor de $f(-1)$. Como $x = -1$ es distinto de 0 y de 1, se puede volver a usar la ecuación para ver el valor de $f(-1)$, porque quizá eso ayude:

$$f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \rightarrow f(-1) = -1 - f\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow f(2) = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ahora el valor desconocido es $f\left(\frac{1}{2}\right)$, pero como $x = \frac{1}{2}$ es distinto de 0 y de 1, se puede volver a utilizar la ecuación, con lo que se obtiene:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - f(2) \rightarrow f(2) = 3 + \frac{1}{2} - f(2) \rightarrow 2f(2) = \frac{7}{2} \rightarrow f(2) = \frac{7}{4}$$

133. Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas *n* esferas.

Calcula en función de *n* el número total de puntos de tangencia (contactos) que hay entre las esferas del montón.

(Olimpiadas matemáticas)

Podemos sumar los contactos de cada bola y luego dividir por 2. Tenemos entonces:

1. 1 bola en cada uno de los 4 vértices, con tres contactos cada una: $4 \cdot 3 = 12$
2. $n - 2$ bolas internas en cada una de las seis aristas, con 6 contactos cada una: $6 \cdot 6 \cdot (n-2) = 36n - 72$
3. $T(n - 3)$ bolas internas de cada cara, por 4 caras y 9 contactos cada una:

$$36 \cdot T(n-3) = \frac{36(n-3)(n-2)}{2} = 18n^2 - 90n + 108$$

Donde $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + n$ es el enésimo número triangular.

4. $P(n - 4)$ bolas internas, con 12 contactos cada una, siendo $P(n) = T(1) + T(2) + \ldots + T(n)$ el enésimo número piramidal:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} T(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

5. Entonces, $12P(n-4) = 2(n-4)(n-3)(n-2) = 2n^3 - 18n^2 + 52n - 48$ y al sumar los distintos tipos de bolas según sus contactos, y dividiendo entre dos para evitar repetición, obtenemos:

$$\frac{\left(12 + 36n - 72 + 18n^2 - 90n + 108 + 2n^3 - 18n^2 + 52n - 48\right)}{2} = n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right)$$

Por tanto, en función del número n de bolas por lado, habrá $n(n^2 - 1)$ contactos, para tetraedros con lados formados por un número de esferas $n = 1, 2, \ldots$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Cuál es el espesor de la estratosfera en el ecuador?

La estratosfera tiene en el ecuador un espesor de 35 km.

2. ¿Qué relación hay entre la temperatura y las capas de la atmósfera?

Proporcionalidad directa, donde la temperatura baja a medida que la altura sube, a razón de 6 ºC.

3. ¿En qué capa se registra la menor temperatura?

En la estratosfera, con temperaturas de hasta –53ºC.

4. De acuerdo con el gráfico, ¿qué temperatura tiene la atmósfera a 110 km de altura?

A 110 km de altura se habla de estar dentro de la termosfera, donde puede haber hasta 1 500 ºC, cuando el Sol está activo.

5. **¿Dónde se encuentra la capa de ozono? Investiga cuál es la actual situación de la capa de ozono y por qué es tan importante su recuperación y conservación.**

La capa de ozono se encuentra situada en la estratosfera.

Actualmente la capa de ozono se encuentra en una situación de desgaste grave debido a los conocidos gases de *efecto invernadero*, lo que provoca una menor filtración a los rayos ultravioleta, y que conlleva un crecimiento de problemas varios como derretimiento de los polos, problemas para que las plantas hagan la fotosíntesis, melanomas, cataratas oculares...

Sin esta capa todos estos problemas se incrementarían de forma exponencial, lo que implica un daño enorme en el ecosistema y unas consecuencias horribles para la humanidad. De ahí que se tenga que concienciar a todas las personas para que se fomente su recuperación y posterior conservación, para tener un mundo mejor donde vivir mañana.

6. **Si se asume que la temperatura a nivel del mar es de 20 °C, ¿qué temperatura deberá tener aproximadamente la cima del Everest a 8 848 m de altura?**

Sabiendo que en la troposfera por cada kilómetro que se sube se pierden 6 º C, y con la condición de que a nivel del mar hacen 20 ºC, si aproximamos la altura del Everest a 9 000 m, que son 9 km, implica que habrá perdido 54 ºC en esta subida, así que la temperatura que deberá tener la cima será de $20 - 54 = -34$ ºC.