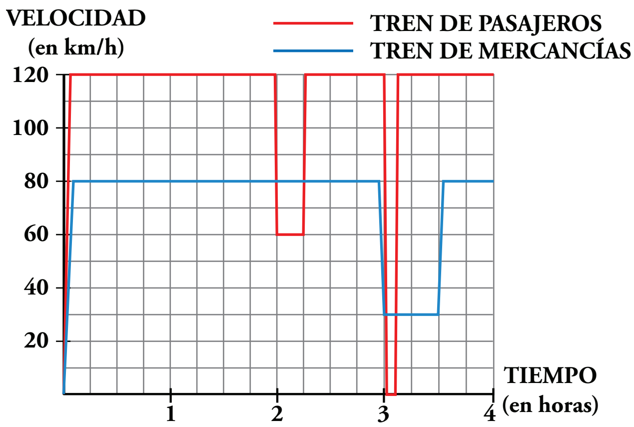
Resuelve

Página 219

Dos trenes

Un tren de pasajeros y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Estas son las gráficas TIEMPO-VELOCIDAD que describen ambos movimientos:



Como podemos ver en la gráfica, el tren de pasajeros, a las dos horas reduce su velocidad:

— ¿A qué puede deberse?

— ¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren en ese instante?

A las tres horas, ambos trenes modifican su marcha: el tren de pasajeros se detiene durante breves minutos, mientras que el tren de mercancías va muy despacio durante media hora.

- **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

  a) El tren de pasajeros, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el tren de pasajeros disminuye su velocidad.

  ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

  d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?

  Haciendo los cálculos anteriores, podrás comprobar que:

  Ambos trenes recorren 240 km a velocidad normal. Reducen la velocidad en el mismo lugar y recorren, así, otros 15 km (puede ser debido a obras en la vía) y, a continuación, recupera cada cual su velocidad normal. (es decir, el tren de mercancías no frena *cuando* el de pasajeros, pero sí *donde* el tren de pasajeros). Más adelante, el tren de pasajeros para en una estación.

  e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el tren de pasajeros?

  f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o azul. Señala en tu cuaderno los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

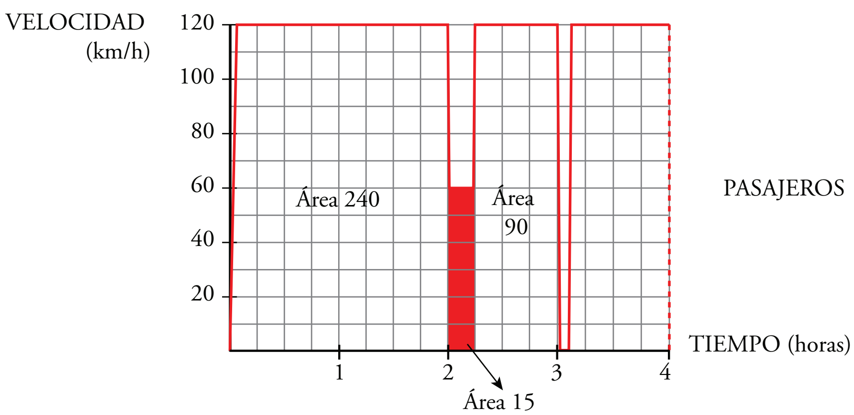
e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

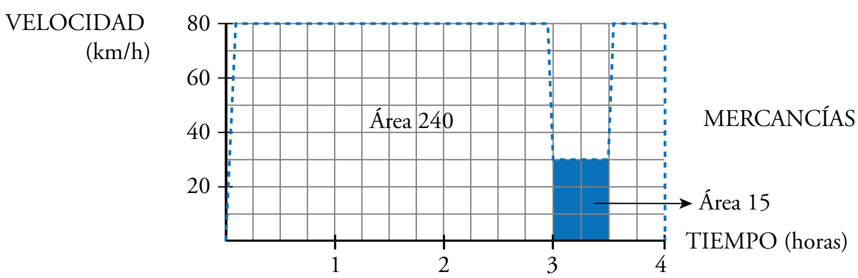
$120 \cdot 2 = 240$ km en las dos primeras horas

$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ km los siguientes tres cuartos de hora

Total: $240 + 15 + 90 = 345$ km hasta llegar a la parada.

f) 



1 Primitivas. Reglas básicas para su cálculo

Página 221

1 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\int 7x^4\, dx$

b) $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2}\, dx$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{5x^3}}{3x}\, dx$

f) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\, dx$

a) $\int 7x^4\, dx = 7\frac{x^5}{5} + k = \frac{7x^5}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{x} + k$

c) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{1/3}\, dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2}\, dx = \int \sqrt[3]{5}\, x^{2/3}\, dx = \sqrt[3]{5}\,\frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{5x^3}}{3x}\, dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\, dx + \int \frac{\sqrt{5}\, x^{3/2}}{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\, dx + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2}\, dx =$

$= \frac{1}{3}\,\frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$

f) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{5}\cdot x^{3/2}}{\sqrt[3]{3}\cdot x^{1/3}}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\int x^{7/6}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\,\frac{x^{13/6}}{13/6} + k = \frac{6\sqrt{5}\,\sqrt[6]{x^{13}}}{13\sqrt[3]{3}} + k$

2 **Calcula:**

a) $\int \frac{x^4-5x^2+3x-4}{x}\, dx$

b) $\int (5\cos x + 3^x)\, dx$

c) $\int \frac{7x^4-5x^2+3x-4}{x^2}\, dx$

d) $\int (10^x - 5^x)\, dx$

a) $\int \frac{x^4-5x^2+3x-4}{x}\, dx = \int\left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x}\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4\ln|x| + k$

b) $\int (5\cos x + 3^x)\, dx = \int 5\cos x\, dx + \int 3^x\, dx = 5\,\text{sen}\, x + \frac{3^x}{\ln 3} + k$

c) $\int \frac{7x^4-5x^2+3x-4}{x^2}\, dx = \int\left(\frac{7x^4}{x^2}\right) dx - \int\left(\frac{5x^2}{x^2}\right) dx + \int\left(\frac{3x}{x^2}\right) dx - \int\left(\frac{4}{x^2}\right) dx =$

$= \int 7x^2\, dx - \int 5\, dx + \int \frac{3}{x}\, dx - \int \frac{4}{x^2}\, dx = \frac{7x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| + \frac{4}{x} + k$

d) $\int (10^x - 5^x)\, dx = \int 10^x\, dx - \int 5^x\, dx = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{5^x}{\ln 5} + k$

Página 223

3 Halla las primitivas de estas funciones:

a) $f(x) = (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5)$

b) $f(x) = (5x + 1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}$

e) $f(x) = cos\ x\ sen^3\ x$

a) $\int (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5)\, dx = \dfrac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + k$

b) $\int (5x + 1)^3\, dx = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{(5x + 1)^4}{4} + k = \dfrac{(5x + 1)^4}{20} + k$

c) $\int \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}\, dx = ln\, |x - 3x| + k$

d) $\int \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}\, dx = \dfrac{1}{3}\, ln\, |x^3 - 3x| + k$

e) $\int cos\ x\ sen^3\ x\, dx = \dfrac{sen^4\ x}{4} + k$

4 Busca las primitivas de:

a) $f(x) = x\, 2^{x^2}\, ln\ 2$

b) $f(x) = x\, 2^{x^2}$

c) $f(x) = 2^{3x - 5}$

d) $f(x) = sen\ 3x$

e) $f(x) = sen\ (x^3 - 4x^2)\ (3x^2 - 8x)$

f) $f(x) = \dfrac{cos\ x}{sen\ x}$

a) $\int x\, 2^{x^2}\, ln\ 2\, dx = \dfrac{1}{2} \cdot 2^{x^2} + k = \dfrac{2^{x^2}}{2} + k$

b) $\int x\, 2^{x^2}\, dx = \dfrac{1}{2 ln\ 2} \cdot 2^{x^2} + k = \dfrac{2^{x^2}}{2 ln\ 2} + k$

c) $\int 2^{3x - 5}\, dx = \dfrac{1}{3 ln\ 2} \cdot 2^{3x - 5} + k = \dfrac{2^{3x - 5}}{3 ln\ 2} + k$

d) $\int sen\ 3x\, dx = -\dfrac{1}{3}\, cos\ 3x + k$

e) $\int sen\ (x^3 - 4x^2)\ (3x^2 - 8x)\, dx = -cos\ (x^3 - 4x^2) + k$

f) $\int \dfrac{cos\ x}{sen\ x}\, dx = ln\, |sen\ x| + k$

2 Área bajo una curva. Integral definida de una función

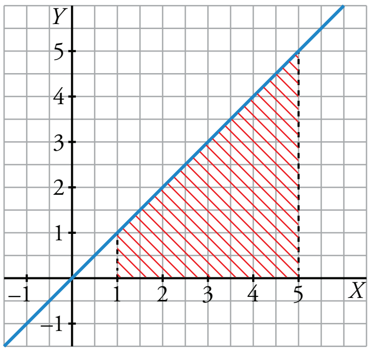
Página 225

1 Halla:

a) $\int_1^5 x\,dx$

b) $\int_0^4 \left[-\sqrt{16-(x-4)^2}\right] dx$

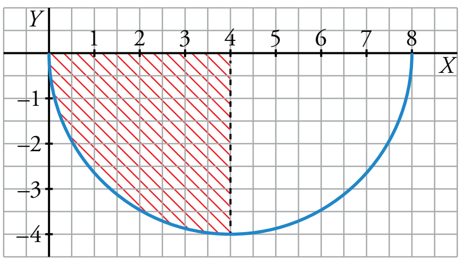
c) $\int_0^6 \left(\frac{1}{2}x-2\right) dx$

a) 

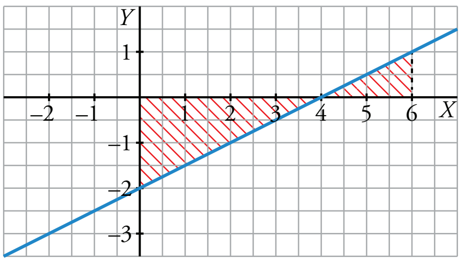
La integral pedida coincide con el área del trapecio coloreado. Por tanto:

$$\int_1^5 x\,dx = \frac{5+1}{2}\cdot 4 = 12$$

b) La función que se integra se corresponde con la semicircunferencia centrada en el punto (4, 0) de radio 4 que se encuentra debajo del eje X.



Por tanto: $\int_0^4 \left[-\sqrt{16-(x-4)^2}\right] dx = -\frac{\pi\cdot 4^2}{4} = -4\pi = -12{,}57$

c) 

La integral buscada es la suma algebraica de los dos recintos teniendo en cuenta que uno es negativo por estar situado debajo del eje X. Por tanto:

$$\int_0^6 \left(\frac{1}{2}x-2\right) dx = -\frac{4\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 1}{2} = -3$$

3 Función "área bajo una curva"

Página 228

1 **Halla e interpreta estas integrales:**

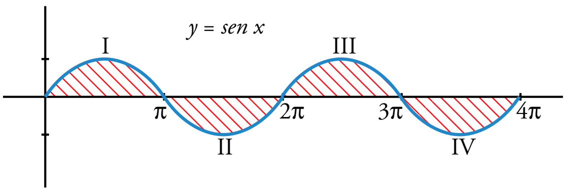
a) $\int_0^{4\pi} sen\ x\ dx$ b) $\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\ dx$

a) $G(x) = \int sen\ x\ dx = -cos\ x$

$G(4\pi) = -1;\ \ G(0) = -1$

$\int_0^{4\pi} sen\ x\ dx = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$

Interpretación geométrica:



La parte positiva y la parte negativa son iguales; por eso da como resultado 0:

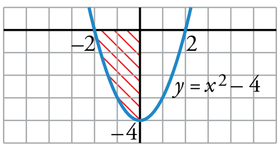
Área de I – Área de II + Área de III – Área de IV = 0

b) $G(x) = \int (x^2 - 4)\ dx = \frac{x^3}{3} - 4x$

$G(2) = -\frac{16}{3};\ \ G(-2) = \frac{16}{3}$

$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\ dx = -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{32}{3}$

Interpretación geométrica:



Como queda por debajo del eje X, la integral es el área del recinto señalado con signo negativo, es decir:

$$-\text{Área del recinto} = -\frac{32}{3}$$

2 **Halla la siguiente integral e interprétala geométricamente:** $\int_0^2 e^x\ dx$

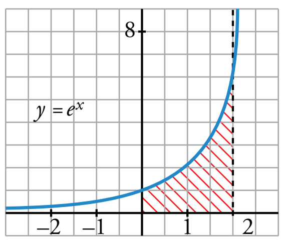
$G(x) = \int_0^2 e^x\ dx = e^x$

$G(2) = e^2;\ \ G(0) = 1$

$\int_0^2 e^x\ dx = e^2 - 1 \approx 6,39$

La interpretación geométrica puede verse a la derecha:

Área del recinto $= e^2 - 1 \approx 6,39$



4 Cálculo del área entre una curva y el eje X

Página 230

1 Halla el área de la región comprendida entre la función $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 5$.

- Puntos de corte con el eje X:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$$

Solo nos sirven $x = 1$, $x = 2$ (están entre 0 y 5).

- Hay tres recintos: I [0, 1]; II [1, 2]; III [2, 5]
- $G(x) = \int (x^2 - 1)(x^2 - 4)\, dx = \int (x^4 - 5x^2 + 4)\, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x$
- $G(0) = 0$; $G(1) = \frac{38}{15}$; $G(2) = \frac{16}{15}$; $G(5) = \frac{1310}{3}$
- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \frac{38}{15}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \left|-\frac{22}{15}\right| = \frac{22}{15}$

Área del recinto III $= |G(5) - G(2)| = \frac{2178}{5}$

Área total $= \frac{38}{15} + \frac{22}{15} + \frac{2178}{5} = \frac{2198}{5} = 439{,}6$ u^2

2 Halla el área comprendida entre $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje X.

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$$

- Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 2]
- $G(x) = \int (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$
- $G(-1) = -\frac{5}{12}$; $G(0) = 0$; $G(2) = -\frac{8}{3}$
- Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \frac{5}{12}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(0)| = \frac{8}{3}$

Área total $= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \approx 3{,}08$ u^2

5 Cálculo del área comprendida entre dos curvas

Página 231

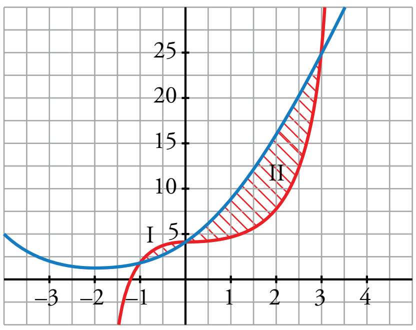
1 Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4$$
$$g(x) = x^2 + 3x + 4$$

- $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 4 - x^2 - 3x - 4 = x^3 - 2x^2 - 3x$
- $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \to x(x^2 - 2x - 3) = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$
- Hay dos recintos: I $[-1, 0]$; II $[0, 3]$
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$
- $G(-1) = -\dfrac{7}{12};\ G(0) = 0;\ G(3) = -\dfrac{45}{4}$
- Recinto I: Área $[-1, 0] = |G(0) - G(-1)| = \dfrac{7}{12}$

  Recinto II: Área $[0, 3] = |G(3) - G(0)| = \dfrac{45}{4}$

  Área total: $\dfrac{7}{12} + \dfrac{45}{4} = \dfrac{71}{6} \approx 11{,}83\ \text{u}^2$



Ejercicios y problemas resueltos

Página 232

1. Cálculo de primitivas

Hazlo tú. **Calcula las primitivas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 7$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x}}$ **c)** $f(x) = (2x^2 + 3)^2$

d) $f(x) = 3e^{2x-1}$ **e)** $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

a) $\displaystyle\int (3x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 7)\, dx = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - 7x + k$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}\, dx + \int \frac{x}{x^{1/2}}\, dx = \int x^{-1/6}\, dx + \int x^{1/2}\, dx =$

$\displaystyle= \frac{x^{5/6}}{5/6} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$

c) $\displaystyle\int (2x^2 + 3)^2\, dx = \int (4x^4 + 12x^2 + 9)\, dx = \frac{4x^5}{5} + 4x^3 + 9x + k$

d) $\displaystyle\int 3e^{2x-1}\, dx = \frac{3}{2}\int 2e^{2x-1}\, dx = \frac{3}{2}e^{2x-1} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int 2x(x^2+1)^{-1/2}\, dx = \frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2} + k = 2\sqrt{x^2+1} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-3}\, dx = \int \left(1 + \frac{4}{x-3}\right) dx = x + 4\ln|x-3| + k$

Página 233

2. Cálculo de primitivas

Hazlo tú. **Calcula las siguientes primitivas:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+7}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 2x}\,(x-1)\, dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{3x^2+3x-5}\, dx$

d) $\displaystyle\int 5xe^{x^2}\, dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-3}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+7}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+7}\, dx = \frac{1}{2}\ln|2x+7| + k$

b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x}\,(2x-2)\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2-2x)^{1/2}(2x-2)\, dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-2x)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{1}{3}(x^2-2x)^{3/2} + k = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2x)^3} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{3x^2+3x-5}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+3}{3x^2+3x-5}\, dx = \frac{1}{3}\ln|3x^2+3x-5| + k$

d) $\displaystyle\int 5xe^{x^2}\, dx = \frac{5}{2}\int 2xe^{x^2}\, dx = \frac{5}{2}e^{x^2} + k$

e) Dividimos para expresar la fracción así: $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}} = \mathrm{c} + \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{d}}$

$\displaystyle\int \frac{x^2}{x-3}\, dx = \int \left(x + 3 + \frac{9}{x-3}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln|x-3| + k$

Página 234

3. Cálculo de áreas

Hazlo tú. **Calcula el área limitada por la curva $f(x) = x^3 - 12x$ y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.**

- Puntos de corte de la función con el eje X:

$$x^3 - 12x = 0 \;\to\; x = -2\sqrt{3},\; x = 0,\; x = 2\sqrt{3}$$

El único punto de corte situado entre –2 y 2 es $x = 0$; habrá dos recintos: [–2, 0] y [0, 2].

- Primitiva: $G(x) = \int (x^3 - 12x)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - 6x^2$

$$G(-2) = \frac{(-2)^4}{4} - 6(-2)^2 = -20;\;\; G(0) = 0;\;\; G(2) = -20$$

- Áreas:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 12x)\, dx = G(0) - G(-2) = 20 \;\to\; \text{Área } [-2, 0] = 20 \text{ u}^2$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 12x)\, dx = G(2) - G(0) = -20 \;\to\; \text{Área } [0, 2] = 20 \text{ u}^2$$

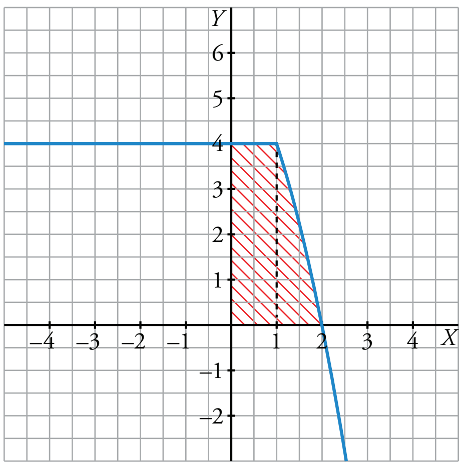
Área total = 20 + 20 = 40 u^2

4. Área limitada por $y = f(x)$ y los ejes de coordenadas

Hazlo tú. **Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 - x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

y las rectas $x = 0$ e $y = 0$.



El área pedida es la suma de las áreas del rectángulo de base 1 y altura 4 y de la región limitada por la parábola, el eje X y la recta $x = 1$.

Área del rectángulo = $1 \cdot 4 = 4$ u^2

Área de la región = $\displaystyle\int_1^2 (-x^2 - x + 6)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_1^2 = \frac{13}{6}$ u^2

Área total = $4 + \dfrac{13}{6} = \dfrac{37}{6}$ u^2

5. Área entre curvas

Hazlo tú. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

- Cortes de $f(x)$ y $g(x)$:

$$-x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x - 4 \to x = -2,\ x = 2$$

- Entre $x = -2$ y $x = 2$, la parábola $f(x)$ está por encima de $g(x)$ porque $f(x)$ está abierta hacia abajo y $g(x)$ lo está hacia arriba.

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} [-x^2 + 2x + 4 - (x^2 + 2x - 4)]\, dx = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}\ \text{u}^2$$

Página 235

6. Cálculo de áreas

Hazlo tú. Halla el área del recinto limitado por las funciones $y = x^2 - 4x$ e $y = 5$.

Calculamos los puntos de corte:

$$x^2 - 4x = 5 \to x = -1,\ x = 5$$

Primitiva de la función diferencia:

$$G(x) = \int (5 - x^2 + 4x)\, dx = 5x - \frac{x^3}{3} + 2x^2$$

$$G(5) = 5 \cdot 5 - \frac{5^3}{3} + 2 \cdot 5^2 = \frac{100}{3};\quad G(-1) = 5 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)^2 = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{5} (5 - x^2 + 4x)\, dx = G(5) - G(-1) = \frac{100}{3} + \frac{8}{3} = 36$$

Área = $36\ \text{u}^2$

7. Cálculo de áreas

Hazlo tú. Calcula el área del recinto limitado por las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x+1}$ $\quad y = \dfrac{x+1}{2}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ $\quad g(x) = |x|$

a) • Calculamos los puntos de corte:

$$\sqrt{x+1} = \frac{x+1}{2} \to x + 1 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \to x = -1,\ x = 3$$

• Primitiva de la función diferencia:

$$G(x) = \int \left(\sqrt{x+1} - \frac{x+1}{2}\right) dx = \int (x+1)^{1/2}\, dx - \frac{1}{2}\int (x+1)\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$$

$$G(-1) = \frac{2}{3}\sqrt{(-1+1)^3} - \frac{(-1)^2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4};\quad G(3) = \frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3} - \frac{3^2}{4} - \frac{3}{2} = \frac{19}{12}$$

• Calculamos el área:

$$\int_{-1}^{3} \left(\sqrt{x+1} - \frac{x+1}{2}\right) dx = G(3) - G(-1) = \frac{19}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

Área pedida = $\dfrac{4}{3}\ \text{u}^2$

b) • Definimos $g(x)$ en intervalos:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Puntos de corte de f y g:

$$\frac{x^2}{2} = -x \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 0 \;\text{(no vale)}$$

$$\frac{x^2}{2} = x \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$$

- Primitiva de la función diferencia $f(x) - g(x)$:

Si $x < 0 \;\rightarrow\; \int \left[\frac{x^2}{2} - (-x)\right] dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$

Si $x \geq 0 \;\rightarrow\; \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$

- Calculamos el área:

$$\int_{-2}^{0} \left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = -\frac{2}{3} \qquad \int_{0}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\frac{2}{3}$$

Área pedida $= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ u^2

Página 236

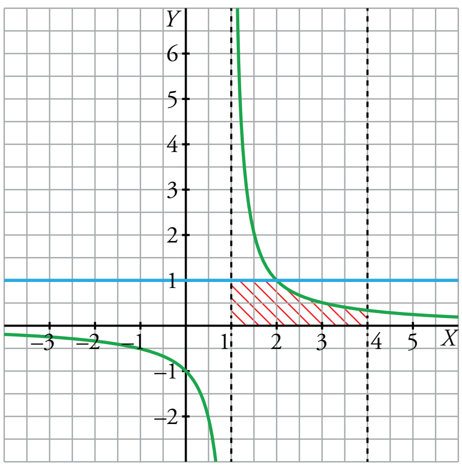
8. Cálculo de áreas

Hazlo tú. **Calcula el área del recinto limitado por las funciones $y = \frac{1}{x-1}$, $x > 1$; $y = 1$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.**

La función $y = \frac{1}{x-1}$ es una hipérbola desplazada horizontalmente de manera que la asíntota vertical se encuentra en $x = 1$.

Puntos de corte entre las dos funciones: $\frac{1}{x-1} = 1 \;\rightarrow\; x = 2$

El área pedida podemos verla en la siguiente gráfica:



El área es la suma del área del cuadrado de lado 1 más el área de la región comprendida entre la función $y = \frac{1}{x-1}$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Área del cuadrado $= 1^2 = 1$

Área de la región descrita $= \int_2^4 \frac{1}{x-1}\, dx = \left[ln\,|x-1|\right]_2^4 = ln\,3$

Área total $= (1 + ln\,3)$ u^2

Ejercicios y problemas guiados

Página 237

1. Primitiva que cumple ciertas condiciones

Hallar una función $f(x)$ de la que conocemos $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

$$f'(x) = \int f''(x)\, dx = \int 3x\, dx = \frac{3x^2}{2} + k$$

$$f'(0) = 2 \rightarrow k = 2 \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2$$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \left(\frac{3x^2}{2} + 2\right) dx = \frac{x^3}{2} + 2x + k'$$

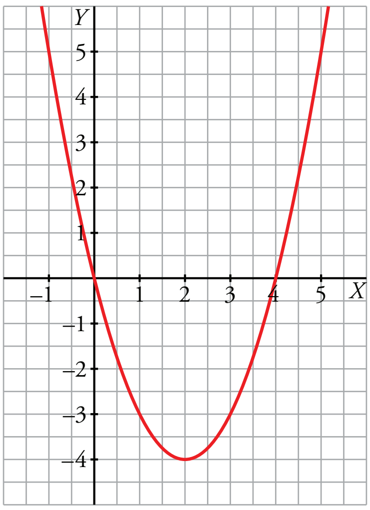
$$f(0) = 1 \rightarrow k' = 1 \rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$$

2. Gráficas de primitivas

Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x - 4$ tal que su gráfica corte al eje X en un único punto.

$F(x) = \int (2x - 4)\, dx = x^2 - 4x + k$

Cuando $k = 0$ obtenemos una parábola que corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$ y cuyo vértice es el punto $(2, -4)$. Su gráfica es:



Las parábolas de la familia de primitivas de $f(x)$ se obtienen desplazando verticalmente la gráfica anterior. Para que corte al eje X en un único punto debemos subirla cuatro unidades. Por tanto, la función buscada es $F(x) = x^2 - 4x + 4$.

3. Cálculo de una constante para un área dada

Determinar el valor de la constante $a \neq 0$ para que el área encerrada entre el eje de abscisas y la función $f(x) = ax(x-1)$ sea igual a $1\ u^2$.

Como $a \neq 0$, los puntos de corte de la función con el eje X son:

$$x(x-1) = 0 \to x = 0,\ x = 1$$

Primitiva de $f(x) \to G(x) = \int ax(x-1)\,dx = a\int (x^2 - x)\,dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{2}$

$$G(0) = 0;\ G(1) = \frac{a}{3} - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6}a$$

Por tanto, $\int_0^1 ax(x-1)\,dx = G(1) - G(0) = -\frac{1}{6}a \to$ Área $= \left|-\frac{1}{6}a\right|$

Como $\left|-\frac{1}{6}a\right| = 1 \to \left\{\begin{matrix} -\frac{1}{6}a = 1 \\ \frac{1}{6}a = 1 \end{matrix}\right\} \to a = \pm 6$

4. Función derivable

Hallar una función $f(x)$, derivable en $\mathbb{R}$, que pase por el punto $P(0, 2)$ y cuya derivada sea:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas en cada intervalo de definición:

$$\int (3x-1)\,dx = \frac{3x^2}{2} - x + k$$

$$\int 2x\,dx = x^2 + k'$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} - x + k & \text{si } x < 1 \\ x^2 + k' & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Pasa por $P(0, 2) \to f(0) = 2 \to k = 2$ y la función es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} - x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + k' & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como es derivable en $\mathbb{R}$, debe ser continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en $x = 1$. Así: $f(1) = 1 + k'$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{3x^2}{2} - x + 2\right) = \frac{5}{2} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k') = 1 + k' \end{matrix}\right\} \to \frac{5}{2} = 1 + k' \to k' = \frac{3}{2}$$

La función es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} - x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 238

Para practicar

Cálculo de primitivas

1 Halla una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$

d) $f(x) = -8x^3 + 3x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x$

b) $\int (2x - \sqrt{3})\,dx = x^2 - \sqrt{3}x$

c) $\int \left(\frac{x}{2} + x^2\right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}$

d) $\int (-8x^3 + 3x^2)\,dx = -2x^4 + x^3$

e) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int (x^{-2} + x^{-3})\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$

f) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}\right) dx = \int \left(x^{1/2} + \frac{3}{5}x^{-4}\right) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{1}{5x^3}$

g) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}\right) dx = \int \left(x^{-1/2} + \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{6}$

h) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^2 \cdot x^{-1/3}\,dx = \int x^{5/3}\,dx = \frac{x^{8/3}}{8/3} = \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$

2 Integra la función de cada apartado:

a) $\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[4]{8x^3}$

c) $\frac{x + x^2}{\sqrt{x}}$

d) $\frac{x^3 - 2}{x^2}$

e) $\frac{3}{x}$

f) $\frac{2}{x+1}$

g) $\frac{x - 2}{x^2}$

h) $\frac{3 - 2x}{x}$

a) $\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\,x^{1/2}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3}\,\sqrt{x^3}}{3} + k = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$

b) $\int \sqrt[4]{8x^3}\,dx = \sqrt[4]{8} \int x^{3/4}\,dx = \frac{4\sqrt[4]{8}}{7}\,\sqrt[4]{x^7} + k$

c) $\int \frac{x + x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{1/2} + x^{3/2})\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$

d) $\int \frac{x^3 - 2}{x^2}\,dx = \int (x - 2x^{-2})\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + k = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + k$

e) $\int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln|x| + k$

f) $\int \frac{2}{x+1}\,dx = 2ln\,|x+1| + k$

g) $\int \frac{x-2}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = ln\,|x| + \frac{2}{x} + k$

h) $\int \frac{3-2x}{x}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - 2\right) dx = 3ln\,|x| - 2x + k$

3 **Resuelve:**

a) $\int sen\,\frac{x}{5}\,dx$ **b)** $\int cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$ **c)** $\int \frac{sen\,3x}{cos\,3x}\,dx$

d) $\int \left(1 - sen\,\frac{x}{2}\right) dx$ **e)** $\int sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ **f)** $\int cos\,\frac{\pi}{2}x\,dx$

a) $\int sen\,\frac{x}{5}\,dx = 5\int \frac{1}{5}\,sen\,\frac{x}{5}\,dx = -5cos\,\frac{x}{5} + k$

b) $\int cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k$

c) $\int \frac{sen\,3x}{cos\,3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{3\cdot(-sen\,3x)}{cos\,3x}\,dx = -\frac{1}{3}\,ln\,|cos\,3x| + k$

d) $\int \left(1 - sen\,\frac{x}{2}\right) dx = x + 2cos\,\frac{x}{2} + k$

e) $\int sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k$

f) $\int cos\,\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int \frac{\pi}{2}\,cos\,\frac{\pi}{2}\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\,sen\,\frac{\pi}{2}\,x + k$

4 **Calcula:**

a) $\int e^{x+3}\,dx$ **b)** $\int 3x\,e^{1-x^2}\,dx$ **c)** $\int 2^{x-7}\,dx$ **d)** $\int 3^{x/2}\,dx$

a) $\int e^{x+3}\,dx = e^{x+3} + k$

b) $\int 3x\,e^{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int (-2x)e^{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\,e^{1-x^2} + k$

c) $\int 2^{x-7}\,dx = \frac{1}{ln\,2}\int ln\,2\cdot 2^{x-7}\,dx = \frac{1}{ln\,2}\cdot 2^{x-7} + k = \frac{2^{x-7}}{ln\,2} + k$

d) $\int 3^{x/2}\,dx = 2\int \frac{1}{2}\,3^{x/2}\,dx = \frac{2\cdot 3^{x/2}}{ln\,3} + k$

5 **Calcula:**

a) $\int (x-3)^3\,dx$ **b)** $\int (2x+1)^5\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ **d)** $\int \sqrt{3x-5}\,dx$

e) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\,dx$ **f)** $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$ **g)** $\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$ **h)** $\int \frac{x}{3x^2-4}\,dx$

a) $\int (x-3)^3\,dx = \frac{(x-3)^4}{4} + k$

b) $\int (2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^6}{6} + k = \frac{(2x+1)^6}{12} + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx = 2\sqrt{x+2} + k$

d) $\int \sqrt{3x-5}\, dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-5)^{1/2}\, dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{(3x-5)^3}}{9} + k$

e) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\, dx = 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{2}\right)^{1/3} dx = 2\cdot\frac{[(x+3)/2]^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{2}\left(\frac{x+3}{2}\right)^4 + k$

f) $\int \frac{3}{2x-1}\, dx = \frac{1}{2}\cdot 3\int \frac{2}{2x-1}\, dx = \frac{3}{2}\, ln\,|2x-1| + k$

g) $\int \frac{2x}{x^2+2}\, dx = ln\,|x^2+2| + k$

h) $\int \frac{x}{3x^2-4}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2-4}\, dx = \frac{1}{6}\, ln\,|3x^2-4| + k$

6 **Calcula:**

a) $\int x\sqrt{5x^2+1}\, dx$ **b)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}\, dx$ **c)** $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\, dx$ **d)** $\int x\, e^{x^2}\, dx$

e) $\int \frac{5x}{3x^2+2}\, dx$ **f)** $\int sen^2\, x\, cos\, x\, dx$ **g)** $\int \frac{x^3}{x^4-4}\, dx$ **h)** $\int x\, sen\, x^2\, dx$

a) $\int x\sqrt{5x^2+1}\, dx = \frac{1}{10}\int 10x(5x^2+1)^{1/2}\, dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{(5x^2+1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(5x^2+1)^3}}{15} + k$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}\, dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-3} + k$

c) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\, dx = ln\,|x^2+x-3| + k$

d) $\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + k$

e) $\int \frac{5x}{3x^2+2}\, dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2}\, dx = \frac{5}{6}\, ln\,|3x^2+2| + k$

f) $\int sen^2\, x\, cos\, x\, dx = \frac{sen^3\, x}{3} + k$

g) $\int \frac{x^3}{x^4-4}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-4}\, dx = \frac{1}{4}\, ln\,|x^4-4| + k$

h) $\int x\, sen\, x^2\, dx = -\frac{1}{2}\int -2x\, sen\, x^2\, dx = -\frac{1}{2}\, cos\, x^2 + k$

7 **Calcula:**

a) $\int 3e^{5x}\, dx$ **b)** $\int x^2\cdot 2^{-x^3+5}\, dx$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

d) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}\, dx$ **e)** $\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}\, dx$ **f)** $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}\, dx$

a) $\int 3e^{5x}\, dx = \frac{3}{5}\, e^{5x} + k$

b) $\int x^2\cdot 2^{-x^3+5}\, dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2\cdot 2^{-x^3+5}\, dx = \frac{-2^{-x^3+5}}{3ln\, 2} + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 2e^{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx = \sqrt{x^2-6x+2}+k$

e) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+5}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+5}}\,dx = 2\sqrt{x+5}+k$

f) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}\,dx = \int \sqrt{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2}+k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9}+k$

8 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^2+5x-7}{x+3}\,dx$

c) $\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\,dx$ **d)** $\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\,dx$

*** *Divide y transforma la fracción así:*** $\frac{\textit{Dividendo}}{\textit{divisor}} = \textit{cociente} + \frac{\textit{resto}}{\textit{divisor}}$

a) $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}\,dx = \int\left(x-2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}-2x+2ln|x-1|+k$

b) $\int \frac{x^2+5x-7}{x+3}\,dx = \int\left(x+2-\frac{13}{x+3}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x-13ln|x+3|+k$

c) $\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2}-x+k$

d) $\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\,dx = \int\left(1+\frac{3x}{x^2-1}\right)dx = x+\frac{3}{2}ln|x^2-1|+k$

9 **Calcula:**

a) $\int \frac{1}{x^2}\,sen\,\frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\int 5sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$

e) $\int (2x^2+1)^2\,dx$ **f)** $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx$

g) $\int \frac{3x^2+2x-1}{x-2}\,dx$ **h)** $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

i) $\int \frac{-7\,ln\,x}{3x}\,dx$ **j)** $\int \frac{1}{e^x}\,cos\,e^{-x}\,dx$

a) $\int \frac{1}{x^2}\,sen\,\frac{1}{x}\,dx = cos\,\frac{1}{x}+k$

b) $\int 5sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 5\int 2\cdot\frac{1}{2}\,sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 5sen^2\left(\frac{x}{2}\right)+k$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^{3/4}\,dx = \frac{x^{7/4}}{7/4}+k = \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7}+k$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-1}{x+1}+k$

e) $\int (2x^2+1)^2\,dx = \int (4x^4+4x^2+1)\,dx = \frac{4x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+x+k$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{\sqrt{3x^2-2}}{3}+k$

g) $\int \frac{3x^2+2x-1}{x-2}\,dx = \int\left(3x+8+\frac{15}{x-2}\right)dx = \frac{3x^2}{2}+8x+15ln|x-2|+k$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = ln|1+e^x| + k$

i) $\displaystyle\int \frac{-7\,ln\,x}{3x}\,dx = -\frac{7}{3}\int \frac{1}{x}\,ln\,x\,dx = -\frac{7}{3}\,\frac{ln^2 x}{2} + k = -\frac{7}{6}\,ln^2 x + k$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x}\,cos\,e^{-x}\,dx = -sen\,e^{-x} + k$

Integral definida

10 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x+1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right)dx$

a) Calculamos una primitiva:

$$G(x) = \int \frac{2}{x+1}\,dx = 2ln\,(x+1)$$

$$\int_0^1 \frac{2}{x+1}\,dx = \Big[2ln\,(x+1)\Big]_0^1 = 2ln\,2$$

b) Calculamos una primitiva:

$$G(x) = \int\left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{x}$$

$$\int_1^2\left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{14}{3}$$

11 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_2^5 (-3x^2)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_4^6 (2x-1)\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3+x)\,dx$ **d)** $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{3x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int_{-1}^3 e^{x-2}\,dx$ **g)** $\displaystyle\int_0^{\pi} (sen\,x - cos\,x)\,dx$ **h)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sen\,2x\,dx$

a) $G(x) = \displaystyle\int (-3x^2)\,dx = -x^3$

$G(5) = -125;\;\; G(2) = -8$

$\displaystyle\int_2^5 (-3x^2)\,dx = G(5) - G(2) = -125 - (-8) = -117$

b) $G(x) = \displaystyle\int (2x-1)\,dx = x^2 - x$

$G(6) = 30;\;\; G(4) = 12$

$\displaystyle\int_4^6 (2x-1)\,dx = G(6) - G(4) = 30 - 12 = 18$

c) $G(x) = \displaystyle\int (x^3+x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

$G(2) = G(-2) = 6$

$\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3+x)\,dx = G(2) - G(-2) = 0$

d) $G(x) = \displaystyle\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\,x^{1/2}\,dx = \frac{\sqrt{3}\,x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

$G(4) = \dfrac{16\sqrt{3}}{3};\;\; G(1) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\displaystyle\int_1^4 \sqrt{3x}\,dx = G(4) - G(1) = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$

e) $G(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x|$

$G(e) = 1;\ \ G(1) = 0$

$\int_1^e \frac{1}{x}\, dx = G(e) - G(1) = 1$

f) $G(x) = \int e^{x-2}\, dx = e^{x-2}$

$G(3) = e;\ \ G(-1) = e^{-3}$

$\int_{-1}^{3} e^{x-2}\, dx = G(3) - G(-1) = e - e^{-3} = e - \frac{1}{e^3} = \frac{e^4 - 1}{e^3}$

g) $G(x) = \int (sen\ x - cos\ x)\, dx = -cos\ x - sen\ x$

$G(\pi) = 1;\ \ G(0) = -1$

$\int_0^{\pi} (sen\ x\ cos\ x)\, dx = G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$

h) $G(x) = \int sen\ 2x\, dx = -\frac{1}{2}\, cos\ 2x$

$G(\pi) = -\frac{1}{2};\ \ G(-\pi) = -\frac{1}{2}$

$\int_{-\pi}^{\pi} sen\ 2x\, dx = G(\pi) - G(-\pi) = 0$

12 **Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:**

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ **en** $[0, 2]$

b) $f(x) = 2\ cos\ x$ **en** $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = (x + 1)\,(x^2 - 2)$ **en** $[-1, 2]$

d) $f(x) = sen\ \frac{x}{4}$ **en** $[0, \pi]$

a) $G(x) = \int (3x^2 - 6x)\, dx = x^3 - 3x^2$

$G(0) = 0;\ \ G(2) = -4$

$\int_0^2 (3x^2 - 6x)\, dx = G(2) - G(0) = -4$

b) $G(x) = \int 2cos\ x\, dx = 2sen\ x$

$G(0) = 0;\ \ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

$\int_0^{\pi/2} 2cos\ x\, dx = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = 2$

c) $G(x) = \int (x+1)\,(x^2 - 2)\, dx = \int (x^3 + x^2 - 2x - 2)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

$G(-1) = \frac{11}{12};\ \ G(2) = -\frac{4}{3}$

$\int_{-1}^{2} (x+1)\,(x^2 - 2) = G(2) - G(-1) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{12} = -\frac{9}{4}$

d) $G(x) = \int sen\ \frac{x}{4} = -4cos\ \frac{x}{4}$

$G(0) = -4;\ \ G(\pi) = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

$\int_0^{\pi} sen\ \frac{x}{4} = G(\pi) - G(0) = -2\sqrt{2} + 4$

Página 239

Cálculo de áreas

13 **Calcula el área encerrada por la función $f(x) = -x(x-4)$ y el eje X. Representa el recinto cuya área has calculado.**

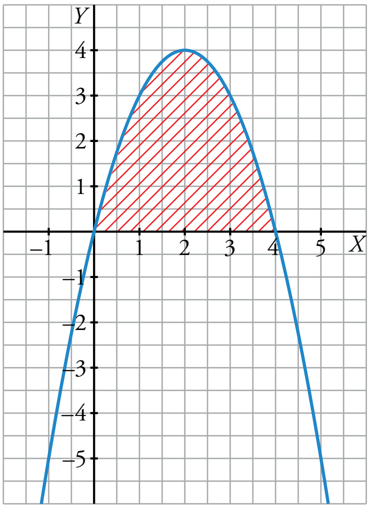
Cortes con el eje X:

$$-x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 4$$

La función dada es una parábola abierta hacia abajo cuyo vértice es el punto (2, 4). Por tanto:

$$\text{Área} = \int_0^4 -x(x-4)\,dx = \int_0^4 (-x^2+4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$

El recinto es:



14 **Halla, en cada caso, el área limitada por:**

a) $f(x) = x^2 - 4$, **el eje** X **y las rectas** $x = 0$ **y** $x = 2$.

b) $f(x) = 2x - x^2$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 1$.

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **y el eje** X.

d) $f(x) = 1 - x^2$, **el eje** X **y las rectas** $x = -2$ **y** $x = 2$.

e) $f(x) = e^x$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 3$.

f) $f(x) = x^2 + 1$, **el eje** X **y las rectas** $x = -1$ **y** $x = 3$.

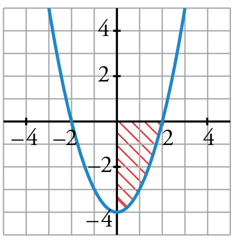
a) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$. Solo nos sirve $x_2 = 2$.

• Hay un recinto: [0, 2]

• $G(x) = \int (x^2 - 4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x$

• $G(2) = -\frac{16}{3};\ G(0) = 0$

• Área $= |G(2) - G(0)| = \frac{16}{3}\ \text{u}^2$

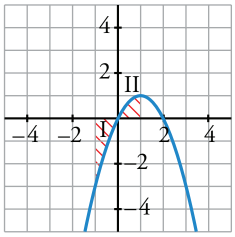


b) • Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

• Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 1]

• $G(x) = \int (2x - x^2)\, dx = x^2 - \dfrac{x^3}{3}$

• $G(-1) = \dfrac{4}{3};\ G(0) = 0;\ G(1) = \dfrac{2}{3}$



• Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \dfrac{4}{3}$

Área del recinto II $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{2}{3}$

Área total $= \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2\ \text{u}^2$

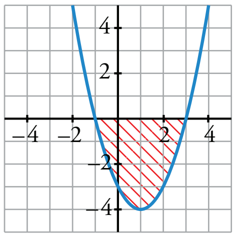
c) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

• Hay un recinto: [–1, 3]

• $G(x) = \int (x^2 - 2x - 3)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

• $G(-1) = \dfrac{5}{3};\ G(3) = -9$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = \left|-9 - \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{32}{3}\ \text{u}^2$



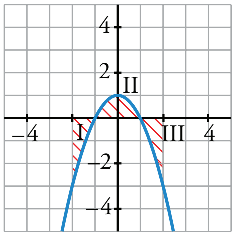
d) • Puntos de corte con el eje X: $1 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

• Hay tres recintos: I [–2, –1]; II [–1, 1]; III [1, 2]

• $G(x) = \int (1 - x^2)\, dx = x - \dfrac{x^3}{3}$

• $G(-2) = \dfrac{2}{3};\ G(-1) = -\dfrac{2}{3}$

$G(1) = \dfrac{2}{3};\ G(2) = -\dfrac{2}{3}$



• Área del recinto I $= |G(-1) - G(-2)| = \left|-\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$

Área del recinto II $= |G(1) - G(-1)| = \left|\dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\right| = \dfrac{4}{3}$

Área del recinto III $= |G(2) - G(1)| = \dfrac{4}{3}$

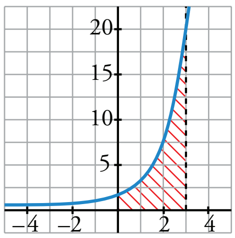
Área total $= 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 4\ \text{u}^2$

e) • No corta al eje X.

• $G(x) = \int e^x\, dx = e^x$

• $G(-1) = e^{-1};\ G(3) = e^3$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = e^3 - e^{-1} = e^3 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e^4 - 1}{e} \approx 19{,}7\ \text{u}^2$

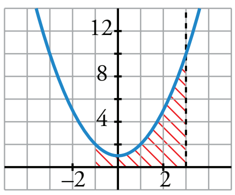


f) • No corta al eje X.

• $G(x) = \int (x^2 + 1)\, dx = \dfrac{x^3}{3} + x$

• $G(-1) = -\dfrac{4}{3};\ G(3) = 12$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = \dfrac{40}{3}\ \text{u}^2$



15 **Halla el área delimitada por la parábola $y = 2x^2 - 2x - 4$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Representa el área obtenida.**

Cortes con el eje $X \to 2x^2 - 2x - 4 = 0 \to x = -1,\ x = 2$. De los dos valores obtenidos, $x = -1$ se encuentra entre los límites $x = -2$ y $x = 2$.

Primitiva de la función:

$$G(x) = \int (2x^2 - 2x - 4)\, dx = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x$$

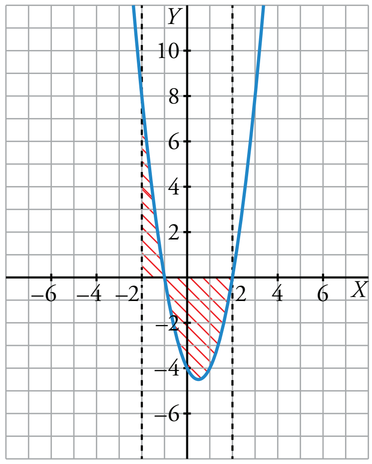
$$G(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^3}{3} - (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = -\frac{4}{3};\ G(-1) = \frac{7}{3};\ G(2) = -\frac{20}{3}$$

$$\int_{-2}^{-1} (2x^2 - 2x - 4)\, dx = G(-1) - G(-2) = \frac{7}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\, dx = G(2) - G(-1) = -\frac{20}{3} - \frac{7}{3} = -9$$

Área total $= \frac{11}{3} + 9 = \frac{38}{3}$ u^2

Para representar la función debemos tener en cuenta que la parábola está abierta hacia arriba y que el vértice es el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.



16 **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

a) $y = x^2;\ y = x$

b) $y = x^2;\ y = 1$

c) $y = x^2;\ y = x^3$

d) $y = x^2;\ y = -x^2 + 2x$

e) $y = 2x^2 + 5x - 3;\ y = 3x + 1$

f) $y = 4 - x^2;\ y = 8 - 2x^2$

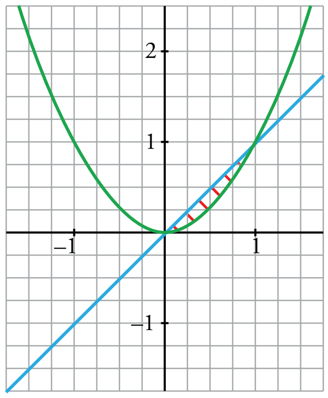
a) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - x)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

• $G(0) = 0;\ G(1) = -\frac{1}{6}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{6}$ u^2



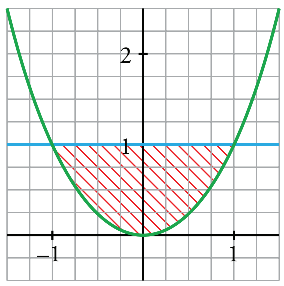
b) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - 1 = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x$

• $G(-1) = \frac{2}{3};\ G(1) = -\frac{2}{3}$

• Área $= |G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3}$ u^2



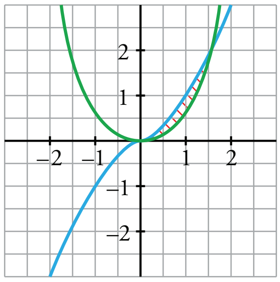
c) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - x^3 = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - x^3)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0;\ \ G(1) = \dfrac{1}{12}$

• $\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{12}\ \text{u}^2$



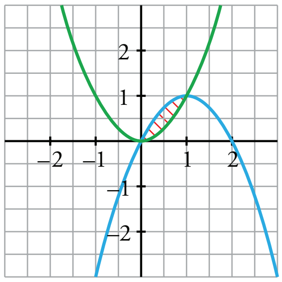
d) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - (-x^2 + 2x) = 2x^2 - 2x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (2x^2 - 2x)\, dx = \dfrac{2x^3}{3} - x^2$

• $G(0) = 0;\ \ G(1) = -\dfrac{1}{3}$

• $\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{3}\ \text{u}^2$



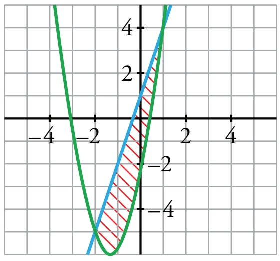
e) • Puntos de corte entre las curvas:

$2x^2 + 5x - 3 - (3x + 1) = 2x^2 + 2x - 4 = 0 \ \rightarrow\ x_1 = -2,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (2x^2 + 2x - 4)\, dx = \dfrac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$

• $G(-2) = \dfrac{20}{3};\ \ G(1) = -\dfrac{7}{3}$

• $\text{Área} = |G(1) - G(2)| = \left| -\dfrac{7}{3} - \dfrac{20}{3} \right| = \dfrac{27}{3} = 9\ \text{u}^2$



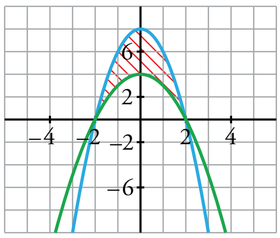
f) • Puntos de corte entre las curvas:

$4 - x^2 - (8 - 2x^2) = x^2 - 4 = 0 \ \rightarrow\ x_1 = -2,\ x_2 = 2$

• $G(x) = \int (x^2 - 4)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

• $G(-2) = \dfrac{16}{3};\ \ G(2) = -\dfrac{16}{3}$

• $\text{Área} = |G(2) - G(-2)| = \dfrac{32}{3}\ \text{u}^2$



Para resolver

17 Calcula el área de los recintos limitados por:

a) La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y los ejes de coordenadas.

b) La curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje X.

c) La función $y = sen\ x$, el eje de abscisas y las rectas $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

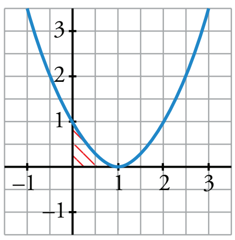
d) La función $y = cos\ x$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = \pi$.

a) • $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \ \rightarrow\ x = 1$

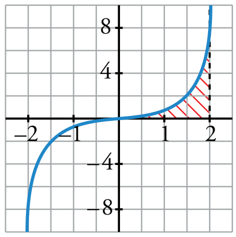
• $G(x) = \int (x - 1)^2\, dx = \dfrac{(x - 1)^3}{3}$

• $G(0) = -\dfrac{1}{3};\ \ G(1) = 0$

• $\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{3}\ \text{u}^2$



b) • $x^3 = 0 \;\rightarrow\; x = 0$



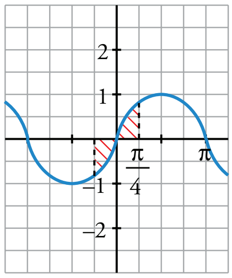
• $G(x) = \int x^3\,dx = \dfrac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0;\;\; G(2) = 4$

• Área $= |\,G(2) - G(0)\,| = 4$ u^2

c) • $sen\ x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\left(\text{entre } -\dfrac{\pi}{4} \text{ y } \dfrac{\pi}{4}\right)$

• Hay dos recintos: $\mathrm{I}\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right];\;\; \mathrm{II}\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$



• $G(x) = \int sen\ x\,dx = -cos\ x$

• $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = G\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2};\;\; G(0) = -1$

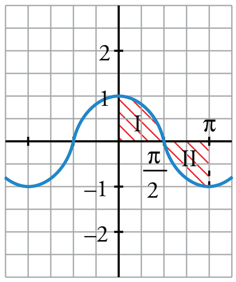
• Área del recinto I $= \left|G(0) - G\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \left|-1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = 0{,}29$

Área del recinto II $= \left|G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - G(0)\right| = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}29$

Área total $= 2 \cdot 0{,}29 \approx 0{,}58$ u^2

d) • $cos\ x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4}$ (entre 0 y π)

• Hay dos recintos: $\mathrm{I}\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right];\;\; \mathrm{II}\left[\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$



• $G(x) = \int cos\ x\,dx = sen\ x$

• $G(0) = 0;\;\; G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1;\;\; G(\pi) = 0$

• Área del recinto I $= \left|G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - G(0)\right| = 1$

Área del recinto II $= |G(\pi) - G(0)| = 1$

Área total $= 1 + 1 = 2$ u^2

18 **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

a) $y = x^2$ **e** $y = 3 - 2x$

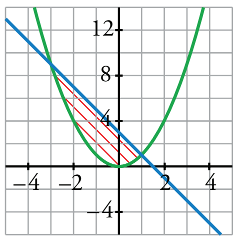
b) $y = 4 - x^2$ **e** $y = 3x^2$

c) $y = x$ **e** $y = x^2 - 2$

d) $y = 4 - x^2$ **e** $y = x^2 - 4$

e) $y = (x + 2)^2\,(x - 3)$ **y el eje de abscisas.**

a) $x^2 - (3 - 2x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = 1$

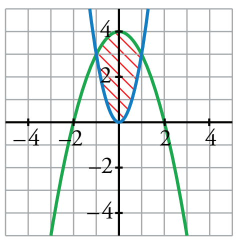


• $G(x) = \int (x^2 + 2x - 3)\,dx = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x$

• $G(-3) = 0;\;\; G(1) = -\dfrac{5}{3}$

• Área $= |\,G(1) - G(-3)\,| = \dfrac{32}{3}$ u^2

b) $4 - x^2 - 3x^2 = 4 - 4x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 1$

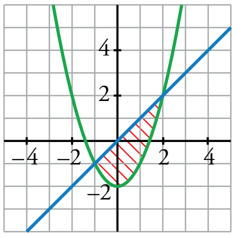


• $G(x) = \int (4 - 4x^2)\,dx = 4x - \dfrac{4x^3}{3}$

• $G(-1) = -\dfrac{8}{3};\;\; G(1) = \dfrac{8}{3}$

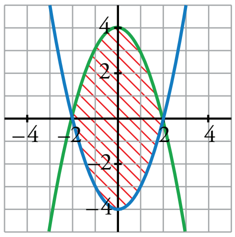
• Área $= |\,G(1) - G(-1)\,| = \dfrac{16}{3}$ u^2

c) $x - (x^2 - 2) = x - x^2 + 2 = -x^2 + x + 2 = 0 \;\to\; x_1 = -1,\; x_2 = 2$



- $G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\, dx = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x$
- $G(-1) = -\dfrac{7}{6};\; G(2) = \dfrac{7}{6}$
- Área $= |G(2) - G(-1)| = \dfrac{9}{2}$ u^2

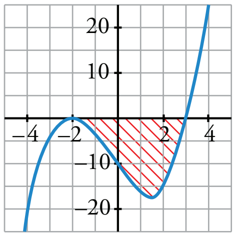
d) $4 - x^2 - (x^2 - 4) = -2x^2 + 8 = 0 \;\to\; x_1 = -2,\; x_2 = 2$



- $G(x) = \int (-2x^2 + 8)\, dx = -\dfrac{2x^3}{3} + 8x$
- $G(-2) = -\dfrac{32}{3};\; G(2) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(2) - G(-2)| = \dfrac{64}{3}$ u^2

e) $(x + 2)^2 (x - 3) = 0 \;\to\; x_1 = -2,\; x_2 = 3$

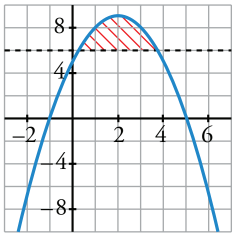
- $G(x) = \int (x + 2)^2 (x - 3)\, dx = \int (x^3 + x^2 - 8x - 12)\, dx =$
  $= \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 - 12x$



- $G(-2) = \dfrac{28}{3};\; G(3) = -\dfrac{171}{4}$
- Área $= |G(3) - G(-2)| = \dfrac{625}{12} \approx 52,1$ u^2

19 **Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.**

$-x^2 + 4x + 5 - 5 = -x^2 + 4x = 0 \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = 4$



- $G(x) = \int (-x^2 + 4x)\, dx = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2$
- $G(0) = 0;\; G(4) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(4) - G(0)| = \dfrac{32}{3}$ u^2

20 **Calcula el área limitada por las siguientes curvas:**

a) $y = x^3 + x^2;\; y = x^3 + 1;\; x = -1;\; x = 1$

b) $y = x^2;\; y = 1 - x^2;\; y = 2$

c) $y = x(x - 1)(x - 2);\; y = 0$

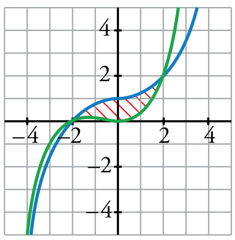
d) $y = x^2 - 2x;\; y = x$

e) $y = x^3 - 2x;\; y = -x^2$

f) $y = 2x - x^3;\; y = x^2$

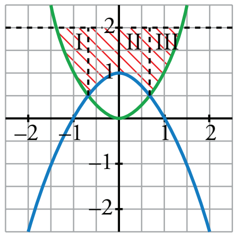
a) $x^3 + x^2 - (x^3 + 1) = x^2 - 1 = 0 \;\to\; x_1 = -1,\; x_2 = 1$

- $G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - x$
- $G(-1) = \dfrac{2}{3};\; G(1) = -\dfrac{2}{3}$
- Área $= |G(1) - G(-1)| = \dfrac{4}{3}$ u^2



b) $x^2 = 1 - x^2 \;\to\; 2x^2 - 1 = 0 \;\to\; x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\; x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 = 2 \;\to\; x_3 = -\sqrt{2},\; x_4 = \sqrt{2}$



- Tenemos tres recintos:

$\text{I}\left[-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right];\; \text{II}\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right];\; \text{III}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$

- Para el I y el III hay que considerar:

$G_1(x) = \displaystyle\int (2 - x^2)\, dx = x - \dfrac{x^3}{3}$

$G_1(-\sqrt{2}) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\; G_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{11\sqrt{2}}{12};\; G_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{11\sqrt{2}}{12};\; G_1(\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Área del recinto I $= \left| G_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1(-\sqrt{2}) \right| = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

Área del recinto III $= \left| G_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1(\sqrt{2}) \right| = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

- Para el II hay que considerar:

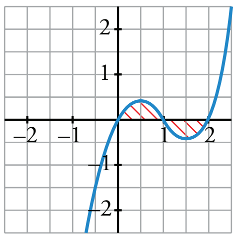
$G_2(x) = \displaystyle\int (2 - 1 + x^2)\, dx = \int (1 + x^2)\, dx = x + \dfrac{x^3}{3}$

$G_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{7\sqrt{2}}{12};\; G_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{12}$

Área del recinto II $= \left| G_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = \dfrac{7\sqrt{2}}{6}$

- Área total $= \dfrac{5\sqrt{2}}{12} + \dfrac{7\sqrt{2}}{6} + \dfrac{5\sqrt{2}}{12} = \dfrac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}\ \text{u}^2$

c) $x(x-1)(x-2) = 0 \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = 1,\; x_3 = 2$



- Hay dos recintos: I [0, 1]; II [1, 2]

- $G(x) = \displaystyle\int x(x-1)(x-2)\, dx = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2$

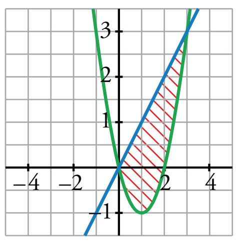
- $G(0) = 0;\; G(1) = \dfrac{1}{4};\; G(2) = 0$

- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{4}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \dfrac{1}{4}$

Área total $= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\ \text{u}^2$

d) $x^2 - 2x - x = x^2 - 3x = 0 \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = 3$



- $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - 3x)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$

- $G(0) = 0;\; G(3) = -\dfrac{9}{2}$

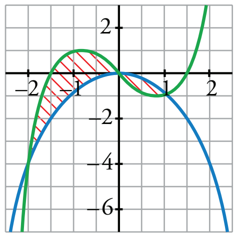
- Área $= |G(3) - G(0)| = \dfrac{9}{2}\ \text{u}^2$

e) $x^3 - 2x - (-x^2) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = 0,\; x_3 = 1$

- Hay dos recintos: I $[-2, 0]$; II $[0, 1]$
- $G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - x^2$
- $G(-2) = -\dfrac{8}{3}$; $G(0) = 0$; $G(1) = -\dfrac{5}{12}$
- Área del recinto I $= |G(0) - G(-2)| = \dfrac{8}{3}$

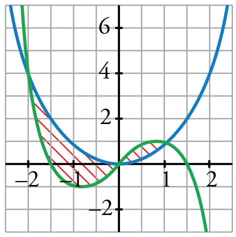
  Área del recinto II $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{5}{12}$

  Área total $= \dfrac{8}{3} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{37}{12}$ u^2



f) Por simetría respecto al anterior, el área es la misma:

Área total $= \dfrac{37}{12}$ u^2



21 **Un depósito se vacía de forma variable según la función $v(t) = 5 - 0{,}1t$ (t en min, v en l/min). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.**

$G(t) = \int (5 - 0{,}1t)\, dt = 5t - \dfrac{0{,}1t^2}{2} = 5t - 0{,}05t^2$

$G(200) = -1\,000$; $G(100) = 0$

Área $= |G(200) - G(100)| = 1\,000$

Se han vaciado 1 000 litros entre los minutos 100 y 200.

22 **Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$ siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?**

Consideramos t entre 0 y 24 horas:

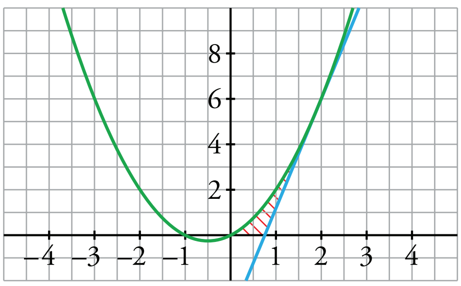
$$\int_0^{24} (0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1)\, dt = \left[\frac{0{,}01t^4}{4} - \frac{0{,}2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^{24} = 219{,}84 - 0 = 219{,}84 \text{ kg}$$

23 **Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abscisas.**

- Recta tagente en $x = 2$:

  $y' = 1 + 2x \;\rightarrow\; m = y'(2) = 5$; $y(2) = 6$

  Recta $\rightarrow\; y = 6 + 5(x - 2) = 5x - 4$
- Hacemos las gráficas para entender mejor la situación:



- Puntos de corte de $y = x + x^2$ con el eje X:

  $x + x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 0$

- Punto de corte de $y = 5x - 4$ con el eje X:

  $5x - 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4}{5}$

- Área bajo $y = x + x^2$ entre 0 y 2:

  $G_1(x) = \displaystyle\int (x + x^2)\, dx = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

  $G_1(2) = \dfrac{14}{3}; \; G_1(0) = 0$

  Área $= |G_1(2) - G_1(0)| = \dfrac{14}{3}$ u^2

- Área bajo $y = 5x - 4$ entre $\dfrac{4}{5}$ y 2:

  $G_2(x) = \displaystyle\int (5x - 4)\, dx = \dfrac{5x^2}{2} - 4x$

  $G_2\left(\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{8}{5}; \; G_2(2) = 2$

  Área $= \left| G_2(2) - G_2\left(\dfrac{4}{5}\right) \right| = 2 + \dfrac{8}{5} = \dfrac{18}{5}$ u^2

- El área buscada es: $\dfrac{14}{3} - \dfrac{18}{5} = \dfrac{16}{15}$ u^2

24 **Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$:**

a) Encuentra una primitiva F de f que verifique la igualdad $F(2) = 1$.

b) Representa gráficamente la función f y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 3$.

a) $F(x) = \displaystyle\int \left(\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2\right) dx = \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^3}{2} + k$

$F(2) = 1 \rightarrow \dfrac{2^4}{8} - \dfrac{2^3}{2} + k = 1 \rightarrow k = 3$

Por tanto, $F(x) = \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^3}{2} + 3$.

b) • $f(x)$ es una función polinómica. Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

- Cortes con los ejes:

  $x = 0, \; f(0) = 0$

  $y = 0, \; \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow$

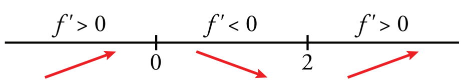
  $\rightarrow x^2(x - 3) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = 3$

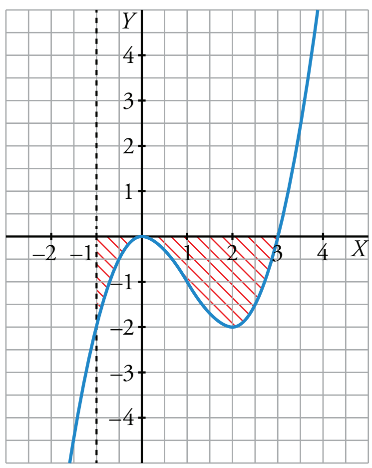
- Puntos singulares:

  $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 3x \rightarrow \dfrac{3}{2}x^2 - 3x = 0 \rightarrow$

  $\rightarrow 3x\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = 2$

  Signo de la derivada:





Como las dos regiones se encuentran al mismo lado del eje X, podemos hallar el área mediante una única integral definida:

$$\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}\right]_{-1}^{3} = -4$$

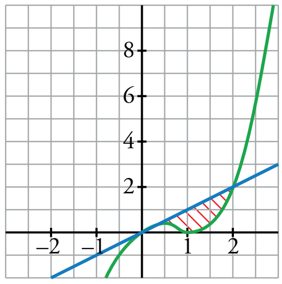
Área = 4 u^2

25 **Dada $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región encerrada entre la curva y la tangente.**

- Tangente en el origen:

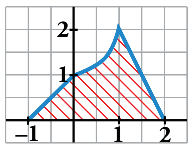
$$y' = 3x^2 - 4x + 1; \; m = y'(0) = 1; \; y(0) = 0$$

Recta $\rightarrow$ $y = x$



- $x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0, \; x_2 = 2$
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$
- $G(0) = 0; \; G(2) = -\frac{4}{3}$
- Área = $|G(2) - G(0)| = \frac{4}{3}$ u^2

26 **Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde a la función $y = x^2 + 1$.**



- Entre –1 y 0 tenemos un triángulo de base 1 y altura 1:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \; u^2$$

- Entre 1 y 2 tenemos un triángulo de base 1 y altura 2:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \; u^2$$

- Entre 0 y 1:

$$G(x) = \int (x^2 + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x$$

$$G(0) = 0; \; G(1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \frac{4}{3} \; u^2$$

- El área total será:

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{17}{6} \; u^2$$

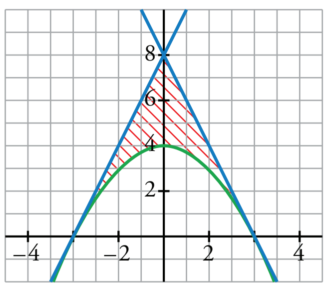
27 **Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, escribe las ecuaciones de las tangentes a f en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.**

- Puntos de corte con el eje X:

$$4 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2, \; x_2 = 2 \;\rightarrow\; \text{Puntos } (-2, 0) \text{ y } (2, 0)$$

- $f'(x) = -2x; \; f'(-2) = 4; \; f'(2) = -4$
- Recta tangente en $x = -2 \;\rightarrow\; y = 4(x + 2) = 4x + 8$

  Recta tangente en $x = 2 \;\rightarrow\; y = -4(x - 2) = -4x + 8$
- Se muestra la gráfica a la derecha para entenderlo mejor:



- Área del triángulo de vértices (–2, 0), (0, 8) y (2, 0):

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 \text{ u}^2$$

- Área entre $y = 4 - x^2$ y el eje X:

$$G(x) = \int (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$G(-2) = -\frac{16}{3};\ G(2) = \frac{16}{3}$$

$$\text{Área} = |G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

- El área total será la diferencia:

$$16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3} \text{ u}^2$$

28 Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

b) Representa gráficamente la función f.

c) Calcula el área del recinto plano limitado por la gráfica de f, los ejes de coordenadas y la recta $x = 2$.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas, que son continuas y derivables. Estudiamos la continuidad en el punto de ruptura:

$f(1) = 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + 4x - 3) = 0 \end{cases} \to \text{Es continua en } x = 0 \text{ ya que } f(1) = \lim_{x \to 1} f(x).$$

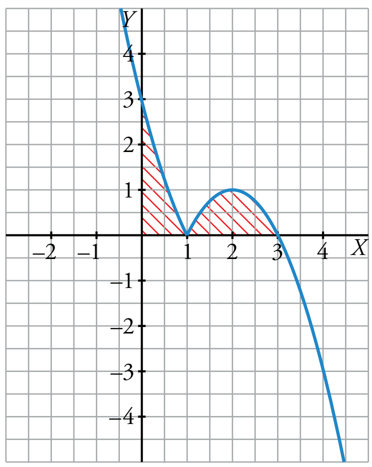
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ no es derivable ya que $f'(1^-) \ne f'(1^+)$.

En conclusión, es continua en $\mathbb{R}$ y derivable cuando $x \ne 1$.

b) La función está definida por intervalos mediante dos parábolas.

Hallando los puntos notables se obtiene la gráfica que aparece a la derecha.



c) El área pedida es la suma de las dos áreas coloreadas:

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Área total} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \text{ u}^2$$

Página 240

29 **Dada $f(x) = x + 1$, halla:**

a) $\int_0^x f$ **b)** $\int_1^x f$ **c)** $\int_{-1}^x f$ **d)** $\int_1^3 f$

$G(x) = \int (x+1)\, dx = \dfrac{x^2}{2} + x$

$G(0) = 0;\; G(1) = \dfrac{3}{2};\; G(-1) = -\dfrac{1}{2};\; G(3) = \dfrac{15}{2}$

a) $\int_0^x f = G(x) - G(0) = \dfrac{x^2}{2} + x$

b) $\int_1^x f = G(x) - G(1) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{3}{2}$

c) $\int_{-1}^x f = G(x) - G(-1) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}$

d) $\int_1^3 f = G(3) - G(1) = \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

30 **a) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

b) Calcula $\int_{-2}^3 |2x - 4|\, dx$.

a) Definimos la función por intervalos para hacernos una idea de su forma:

$$y = |2x-4| = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x \le 2 \\ 2x-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

El área buscada será:

$$\int_0^5 y\, dx = \int_0^2 (-2x+4)\, dx + \int_2^5 (2x-4)\, dx = \left[-x^2+4x\right]_0^2 + \left[x^2-4x\right]_2^5 =$$

$$= (4-0) + (5+4) = 4 + 9 = 13 \text{ u}^2$$

b) $\int_{-2}^3 |2x-4|\, dx = \int_{-2}^2 (-2x+4)\, dx + \int_2^3 (2x-4)\, dx = \left[-x^2+4x\right]_{-2}^2 + \left[x^2-4x\right]_2^3 =$

$$= (4+12) + (-3+4) = 16 + 1 = 17 \text{ u}^2$$

31 **Calcula:**

a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ **b)** $\int_{-1}^3 g(x)\, dx$

siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2+1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

a) $\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 (2-x)\, dx$

$G_1(x) = \int x^2\, dx = \dfrac{x^3}{3} \;\to\; G_1(1) - G_1(0) = \dfrac{1}{3} - 0 = \dfrac{1}{3}$

$G_2(x) = \int (2-x)\, dx = 2x - \dfrac{x^2}{2} \;\to\; G_2(2) - G_2(1) = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

Así: $\int_0^2 f(x)\, dx = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$

b) $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx + \int_{1}^{3} (x^2+1)\,dx$

$G_1(x) = \int 2x\,dx = x^2 \rightarrow G_1(1) - G_1(-1) = 1 - 1 = 0$

$G_2(x) = \int (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x \rightarrow G_2(3) - G_2(1) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

Así: $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = \frac{32}{3}$

32 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$:**

a) Estudia sus asíntotas y representa la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Calcula el área delimitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

a) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

- Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x+1}{x^2+2x} = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x+1}{x^2+2x} = +\infty$

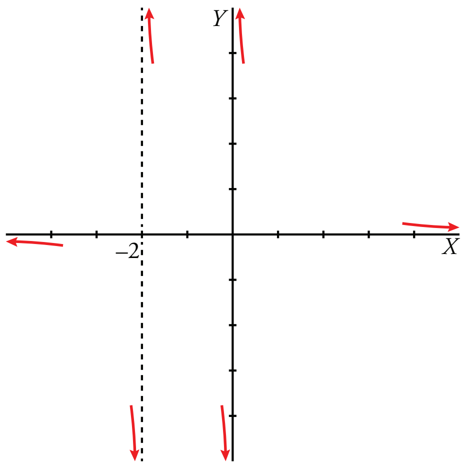
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x+1}{x^2+2x} = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x^2+2x} = +\infty$

Las rectas $x = -2$ y $x = 0$ son asíntotas verticales.

- Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+2x} = 0$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.



Posición:

Cuando $x \to +\infty$, $\frac{x+1}{x^2+2x} > 0 \rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

Cuando $x \to -\infty$, $\frac{x+1}{x^2+2x} < 0 \rightarrow$ La función queda por debajo de la asíntota.

b) Entre $x = 1$ y $x = 3$ la función toma solo valores positivos.

Por tanto, el área es:

$\int_{1}^{3} \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

Calculamos una primitiva:

$G(x) = \int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,|x^2+2x|$

$G(3) = \frac{1}{2}\,ln\,15; \quad G(1) = \frac{1}{2}\,ln\,3$

Por tanto:

$\int_{1}^{3} \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx = G(3) - G(1) = \frac{1}{2}\,ln\,15 - \frac{1}{2}\,ln\,3 = \frac{1}{2}\,ln\,\frac{15}{3} = \frac{1}{2}\,ln\,5 \text{ u}^2$

33 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } 0 \le x \le 3 \end{cases}, \text{ calcula } \int_{-2}^{3} f(x)\,dx.$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0} = 2$$

$$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} (x^2 - 2x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_{0}^{3} = 6$$

Por tanto, $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 2 + 6 = 8$.

34 **Dada la función $f(x)$, halla el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < \dfrac{-1}{2} \\ -x^2 + 3x & \text{si } \dfrac{-1}{2} \le x \le 3 \\ |x+3| & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Para x comprendida entre 0 y 3, tenemos que: $f(x) = -x^2 + 3x$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX:

$$-x^2 + 3x = 0 \;\rightarrow\; x(-x+3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_{0}^{3} (-x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3} = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ u}^2$$

35 **Halla una función f de la cual sabemos que $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$ y que $f(1) = 0$.**

$G(x) = \int (3x^2 - 2x + 5)\,dx = x^3 - x^2 + 5x + k$ son las primitivas de la función dada.

Entre todas ellas, nos interesa la que cumple que $G(1) = 0$, es decir:

$$G(1) = 5 + k = 0 \;\rightarrow\; k = -5$$

Así: $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

36 **Halla la función primitiva de la función $y = 3x^2 - x^3$ que pasa por el punto $(2, 4)$.**

$G(x) = \int (3x^2 - x^3)\,dx = x^3 - \frac{x^4}{4} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que pase por $(2, 4)$:

$$G(2) = 4 + k = 4 \;\rightarrow\; k = 0$$

La función que buscamos es: $f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4}$

37 **Halla la función que toma el valor 2 en $x = 1$ y cuya derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6$.**

$G(x) = \int (3x^2 + 6)\,dx = x^3 + 6x + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(1) = 2$:

$$G(1) = 7 + k = 2 \;\rightarrow\; k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + 6x - 5$

38 **Halla la primitiva de $f(x) = 1 - x - x^2$ que corte al eje de abscisas en $x = 3$.**

$G(x) = \int (1 - x - x^2)\,dx = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(3) = 0$:

$$G(3) = -\frac{21}{2} + k \to k = \frac{21}{2}$$

La función que buscamos es:

$$y = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{21}{2}$$

39 **Calcula el valor de los parámetros p y q para que la función $f(x) = x^3 + px + q$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$ y pase por el punto $(-2, 0)$. Esboza la gráfica de la función anterior y halla el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje OX.**

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 1 \to f'(1) = 0$

$f(x)$ pasa por $(-2, 0) \to f(-2) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + p$

$f'(1) = 0 \to 3 + p = 0 \to p = -3$

$f(-2) = 0 \to -8 + 6 + q = 0 \to q = 2$

La función es $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Para representar la función, teniendo en cuenta que es polinómica, hallamos los cortes con los ejes y los puntos singulares, y estudiamos el crecimiento.

- Cortes con los ejes:

  Eje Y: $f(0) = 2 \to (0, 2)$

  Eje X: $x^3 - 3x + 2 = 0 \to x = -2,\ x = 1 \to (-2, 0)$ y $(1, 0)$

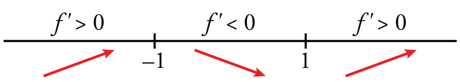
- Puntos singulares:

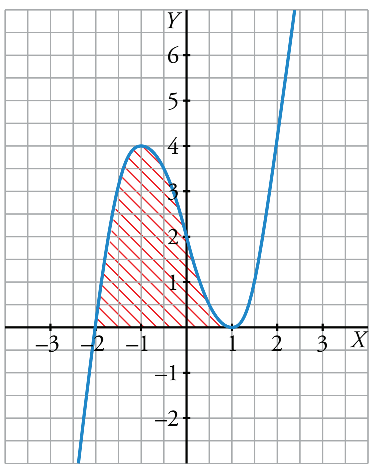
  $f'(x) = 3x^2 - 3$

  $f'(x) = 0 \to 3x^2 - 3 = 0 \to x = -1,\ x = 1$

  $x = -1,\ f(-1) = 4$

- Crecimiento y decrecimiento:





$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{27}{4}\ \text{u}^2$$

40 **Calcula el área del recinto plano limitado por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, las rectas verticales $x = 2$ y $x = 3$ y la recta de ecuación $y = x + 1$.**

Cortes entre la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ y la recta $y = x + 1$:

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 \;\rightarrow\; x^2 = x^2 - 1 \;\rightarrow\; \text{No se cortan.}$$

Primitiva de la función diferencia:

$$\int \left[\frac{x^2}{x-1} - (x+1)\right] dx = \int \frac{1}{x-1}\, dx = \ln|x-1|$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1}\, dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_2^3 = \ln 2$$

Área = $\ln 2$ u^2

41 **Calcula el área correspondiente al recinto limitado por las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = -x^2 - 2x$ y las rectas $x = -2$ y $x = 0$.**

Haz una representación gráfica de dicha área.

Cortes entre las funciones:

$$x^2 + 2x + 2 = -x^2 - 2x \;\rightarrow\; x = -1$$

Primitiva de la función diferencia:

$$G(x) = \int [x^2 + 2x + 2 - (-x^2 - 2x)]\, dx = \int (2x^2 + 4x + 2)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 2x$$

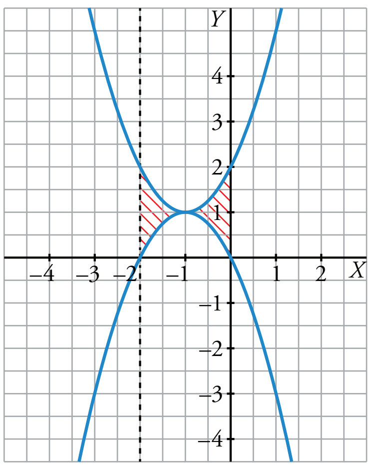
$$G(-2) = \frac{2\cdot(-2)^3}{3} + 2\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) = -\frac{4}{3};\; G(-1) = -\frac{2}{3};\; G(0) = 0$$

Por tanto:

$$\int_{-2}^{-1} (2x^2 + 4x + 2)\, dx = G(-1) - G(-2) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{0} (2x^2 + 4x + 2)\, dx = G(0) - G(-1) = \frac{2}{3}$$

Área total = $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$ u^2



Cuestiones teóricas

42 **Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de f, ¿se verifica necesariamente que $F(x) = k + G(x)$? Justifica la respuesta.**

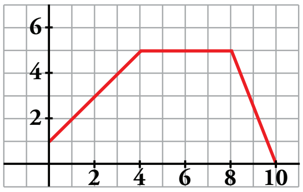
Sí. Justificación:

$$\int f\,dx = F(x) + c_1 \qquad \int f\,dx = G(x) + c_2$$

Restando:

$$0 = F(x) - G(x) + (c_1 - c_2) \;\rightarrow\; F(x) = k + G(x)$$

43 **a) Calcula el área bajo la gráfica de la derecha en los intervalos [0, 2] y [2, 6].**



b) Si esta gráfica representa la velocidad (m/s) de un móvil en función del tiempo, ¿qué representa cada una de las áreas anteriores?

a) El área en el intervalo [0, 2] es la de un trapecio rectángulo de bases 1 y 3 y altura 2.

$$A_{[0,\,2]} = \frac{1+3}{2} \cdot 2 = 4 \;\rightarrow\; \int_0^2 f\,dx = 4$$

En el intervalo [2, 6], el área es la suma de las áreas de un trapecio y de un rectángulo.

$$A_{[2,\,6]} = \frac{3+5}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 18 \;\rightarrow\; \int_2^6 f\,dx = 18$$

b) En una gráfica *velocidad-tiempo*, estas áreas representan el espacio recorrido por un móvil en los intervalos de tiempo [0, 2] y [2, 6].

44 **a) Representa la función $f(x) = 2x$ y halla el área limitada por f en los intervalos [0, 1], [0, 2], [0; 2,5] y [0, 3].**

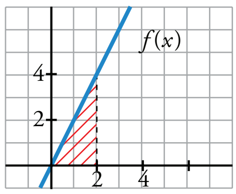
b) Haz una tabla de valores de la función $F(x) = \int_0^x f$ y represéntala.

c) ¿Cuál de estas ecuaciones corresponde a la expresión analítica de $F(x)$?:

I) $y = \frac{x^2}{2}$ II) $y = 2x^2$ III) $y = x^2$ IV) $y = x^2 + 1$

d) Comprueba que la derivada de la función área coincide con la función que limita esa área.

a) Tenemos que hallar en cada caso el área de un triángulo cuya base es la amplitud del intervalo correspondiente y cuya altura es $2x$:

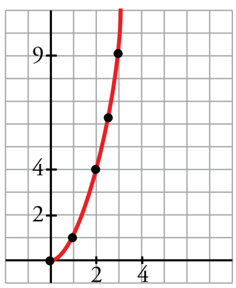


$$A_{[0,\,1]} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \qquad A_{[0,\,2]} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

$$A_{[0;\,2,5]} = \frac{2,5 \cdot 5}{2} = 6,25 \qquad A_{[0,\,3]} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

b)

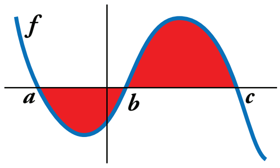
x	0	1	2	2,5	3	4	5
F(x)	0	1	4	6,25	9	16	25



c) Observamos que solo la III pasa por todos los puntos de la tabla de valores del apartado b).

d) Como $F(x) = x^2 \;\rightarrow\; F'(x) = 2x = f(x)$

45 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**



a) $\int_a^c f$ **b)** $\left|\int_a^c f\right|$ **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$ **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$

d)

46 **Siendo** $F(x) = \int_1^x f = 3x^2 - 5x$, **halla la función** f. **Calcula** $F(0)$ **y** $F(2)$.

$f(x) = F'(x) = 6x - 5$

$F(0) = 0;\ F(2) = 2$

Página 241

47 **Calcula el área bajo la curva** $f(x) = x^2 - 1$ **en el intervalo variable** $[1, x]$. **Halla el área para** $x = 4$.

$x^2 - 1 = 0 \ \rightarrow\ x_1 = -1,\ x_2 = 1$

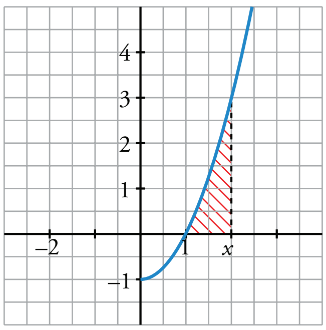
$\text{Área} = \int_1^x (t^2 - 1)\, dt$

$G(t) \int (t^2 - 1)\, dt = \frac{t^3}{3} - t$

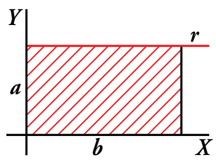
$G(1) = -\frac{2}{3}$

$\text{Área } [1, x] = |G(x) - G(1)| = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$

Cuando $x = 4$, queda: Área $[1, 4] = 18 \text{ u}^2$



48 **Demuestra, utilizando integrales, que el área del rectángulo es** $A = b \cdot a$.



* ***Halla la ecuación de la recta*** r ***y calcula el área limitada por*** r ***y el eje*** OX ***entre*** $x = 0$ ***y*** $x = b$.

La ecuación de r es $y = a$. El área es:

$$\text{Área} = \int_0^b a\, dx$$

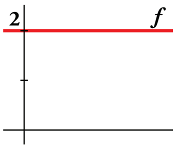
$G(x) = \int a\, dx = ax$

$G(b) = ab;\ G(0) = 0$

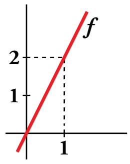
$\text{Área} = G(b) - G(0) = ab$

49 Representa tres primitivas de las siguientes funciones f:

a)



b)



a) $f(x) = 2 \rightarrow F(x) = 2x + k$

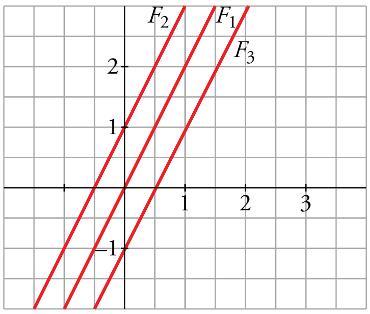
Por ejemplo:

$F_1(x) = 2x$

$F_2(x) = 2x + 1$

$F_3(x) = 2x - 1$

cuyas gráficas son:



b) $f(x) = 2x \rightarrow F(x) = x^2 + k$

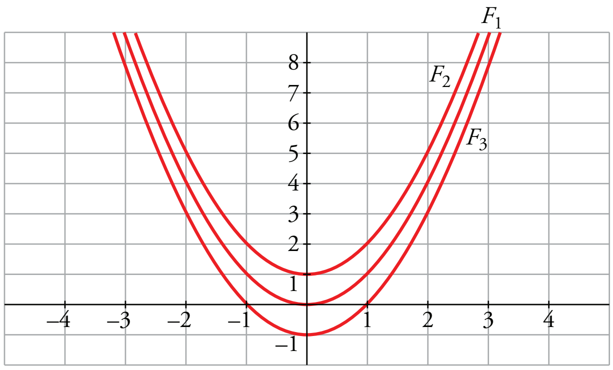
Por ejemplo:

$F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

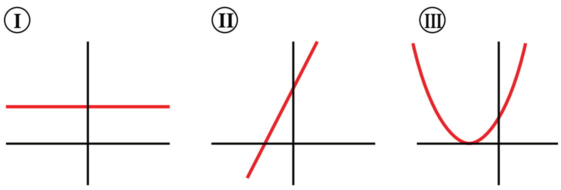
$F_3(x) = x^2 - 1$

cuyas gráficas son:



50 Las gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f.

Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.



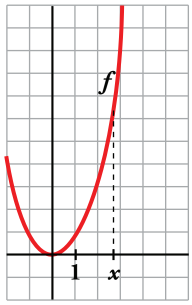
La gráfica II es la de la función; la gráfica I, la de su derivada y la gráfica III, la de su primitiva.

La razón es: partiendo de la gráfica II, observamos que se trata de una función lineal (afín) con pendiente positiva, por lo que la función derivada tiene que ser una función constante (la pendiente de la función afín).

Por otro lado, la primitiva de la función afín tiene que ser una función cuadrática, cuya gráfica corresponde a la parábola.

Para profundizar

51 **Sabiendo que esta gráfica corresponde a $f(x) = x^2$, justifica cuál de las siguientes funciones es $F(x) = \int_1^x f$:**



a) $F(x) = x^3 - 1$

b) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

c) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}$

Como debe cumplirse que $F'(x) = f(x)$, no puede ser $F(x) = x^3 - 1$, ya que $F'(x) = 3x^2$.

Cualquiera de las otras dos cumple que:

$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$$

Tiene que verificarse, además, que $F(1) = 0$.

Por ello, descartamos el caso b), en el que $F(1) = \dfrac{1}{3}$.

La solución es la c): $\displaystyle\int_1^x f = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$

52 **La curva $y = a[1 - (x-2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.**

- Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$a[1-(x-2)^2] = 0 \to (x-2)^2 = 1 \begin{cases} x = 2 = 1 \to x = 3 \\ x - 2 = -1 \to x = 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área e igualamos a 12:

$$\text{Área} = \int_1^3 a[1-(x-2)^2]\,dx = a\left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = a\left[3 - \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= a\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{3} = 12 \to a = 9$$

53 **Dada la función $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$:**

a) Calcula $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ en función de a.

b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = 1/2$.

a) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(ae^{x/3} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[3ae^{x/3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(3ae^{2/3} - \frac{1}{2}\right) - (3ae^{1/3} - 1) = 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2}$

b) Si F es una primitiva de f, tenemos que: $F(x) = 3ae^{x/3} - \dfrac{1}{x} + k$

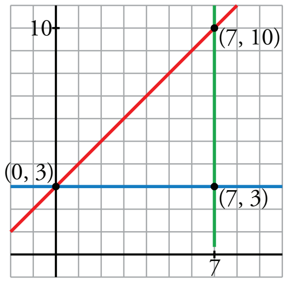
Tenemos que hallar k y a para que:

$$\left.\begin{array}{l} F(1) = 0 \to 3ae^{1/3} - 1 + k = 0 \\ F(2) = \dfrac{1}{2} \to 3ae^{2/3} - \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3ae^{1/3} + k = 1 \\ 3ae^{2/3} + k = 1 \end{array}\right\}$$

Restando la 2.ª ecuación menos la 1.ª: $3a(e^{2/3} - e^{1/3}) = 0 \to a = 0 \to k = 1$

Por tanto: $F(x) = -\dfrac{1}{x} + 1$

54 **Expresa por una integral el área del triángulo de vértices (0, 3), (7, 3) y (7, 10). Explica el significado de la integral escrita.**



- La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 10) es:

  $$\text{Pendiente} = \frac{10-3}{7-0} = \frac{7}{7} = 1$$

  Ecuación: $y = x + 3$

- La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 3) es $y = 3$.

  El área del triángulo es el área comprendida entre las dos rectas anteriores y $x = 7$. Así, tenemos que:

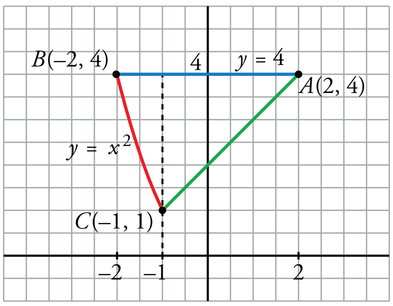
  $$\text{Área} = \int_0^7 [(x+3)-3]\, dx = \int_0^7 x\, dx$$

  El área del triángulo es equivalente al área limitada por $y = x$, $x = 0$ y $x = 7$.

- Calculamos su valor:

  $$\int_0^7 x\, dx = \frac{49}{2}\ \text{u}^2$$

55 **Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.**



- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y C:

  $$\text{Pendiente} = \frac{4-1}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

  Ecuación: $y = 4 + (x-2) = x + 2$

- Calculamos el área pedida:

  $$\text{Área} = \int_{-2}^{-1} (4-x^2)\, dx + \int_{-1}^{2} [4-(x+2)]\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{2} (2-x)\, dx =$$

  $$= \left(-4+\frac{1}{3}\right) - \left(-8+\frac{8}{3}\right) + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{37}{6}\ \text{u}^2$$

Autoevaluación

Página 241

1 Resuelve las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int \left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1 - x^3}{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx$

a) $\displaystyle\int \left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{3}\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{2}x + k = \frac{7}{9}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1 - x^3}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^2\, dx = ln|x| - \frac{x^3}{3} + k$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\int -\frac{5}{2}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{3}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^3 + k = \frac{-2}{15}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^3 + k$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx = \int 2x^{-2}\, dx + \int \sqrt{2}\, x^{1/2} = 2\frac{x^{-1}}{-1} + \sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = -\frac{2}{x} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + k$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2 + 1)^{1/2}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2 + 1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{1}{6}\sqrt{(2x^2 + 1)^3} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 + 3x - 2 & & x - 1 \\ \cline{3-3} -x^2 + x & & x + 4 \\ \cline{1-1} 4x - 2 & & \\ -4x + 4 & & \\ \cline{1-1} 2 & & \end{array}$$

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1} = x + 4 + \frac{2}{x - 1}$$

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx = \int \left(x + 4 + \frac{2}{x - 1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln|x - 1| + k$$

2 Calcula:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{2}{x + 2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{1/3}^{2} e^{3x - 1}\, dx$

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{2}{x + 2}\, dx = \left[2ln|x + 2|\right]_{-1}^{3} = 2\,[ln\,5 - ln\,1] = 2ln\,5$

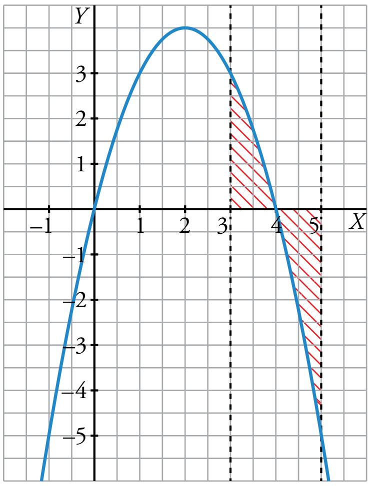
b) $\displaystyle\int_{1/3}^{2} e^{3x - 1}\, dx = \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2} 3e^{3x - 1} = \frac{1}{3}\left[e^{3x - 1}\right]_{1/3}^{2} = \frac{1}{3}(e^5 - e^0) = \frac{e^5 - 1}{3}$

3 **Representa el recinto limitado por $f(x) = 4x - x^2$, el eje X y las rectas $x = 3$ y $x = 5$. Después, calcula su área.**

Representamos la parábola teniendo en cuenta sus puntos notables.

Cortes con los ejes: (0, 0) y (4, 0)

Vértice: (2, 4)



Primitiva de la función:

$$G(x) = \int (4x - x^2)\, dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$G(3) = 9;\ \ G(4) = \frac{32}{3};\ \ G(5) = \frac{25}{3}$$

Por tanto:

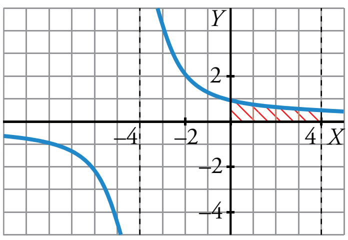
$$\int_3^4 (4x - x^2)\, dx = G(4) - G(3) = \frac{32}{3} - 9 = \frac{5}{3}$$

$$\int_4^5 (4x - x^2)\, dx = G(5) - G(4) = \frac{25}{3} - \frac{32}{3} = -\frac{7}{3}$$

Área total $= \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{3} = 4\ \text{u}^2$

4 **La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, el eje X, el eje Y y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Represéntala y calcula su área.**

Representamos $y = \dfrac{4}{x+4}$. Sus asíntotas son $x = -4$ e $y = 0$.



$$\text{Área} = \int_0^4 \frac{4}{x+4}\, dx = 4\Big[ln\,|x+4|\Big]_0^4 = 4\,(ln\,8 - ln\,4) = 4ln\,\frac{8}{4} = 4ln\,2 \approx 2{,}77\ \text{u}^2$$

5 **El consumo de un motor, en un trabajo de 6 horas, viene dado por la expresión $c(t) = -t^2 + 8t + 20$, siendo t el tiempo en horas, $0 \le t \le 6$.**

¿Cuánto consume el motor durante las 6 horas que dura dicho trabajo?

El consumo equivale al área encerrada por la función $c(t)$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 6$.

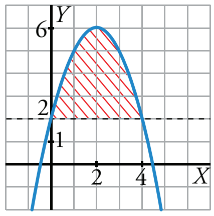
$$c = \int_0^6 (-t^2 + 8t + 20)\, dx = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{8t^2}{2} + 20t\right]_0^6 = -\frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 + 20 \cdot 6 = 192$$

6 **Para cerrar una vidriera, se ha de colocar un cristal cuya superficie está limitada por las funciones $y = 2$ e $y = -(x-2)^2 + 6$.**

Dibuja el cristal y calcula su área (x e y en dm).

$y = -(x-2)^2 + 6$ es una parábola de vértice (2, 6).

Puntos de corte con los ejes:



$x = 0 \rightarrow y = 2$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 4x + 2 = 0 \begin{cases} x = -0,45 \\ x = 4,45 \end{cases}$

Puntos de corte de la curva con $y = 2$:

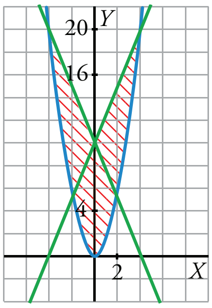
$2 = -(x-2)^2 + 6 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x = 0, \ y = 2 \\ x = 4, \ y = 2 \end{cases}$

Área del cristal $= \displaystyle\int_0^4 [-(x-2)^2 + 6 - 2]\, dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$ dm^2

7 **Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones siguientes y calcula su área:**

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20) \qquad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

Representamos la parábola $f(x)$, y las rectas $g(x)$ y $h(x)$.



- Cortes de $f(x)$ y $g(x)$:

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(5x + 20) \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2, \ y = 5 \\ x = 4, \ y = 20 \end{cases}$

- Cortes de $f(x)$ y $h(x)$:

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(-5x + 20) \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -4, \ y = 20 \\ x = 2, \ y = 5 \end{cases}$

Área $= 2\left[\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2}(5x + 20) - \frac{5}{4}x^2\right] dx = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x^2}{2} + 20x\right) - \frac{5}{4}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\left(60 - \frac{80}{3}\right) = \frac{200}{3}$ u^2