1 Campos de fuerzas

Página 33

1 **Describe los efectos de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza.**

Las interacciones fundamentales son cuatro: gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil. En la página 32 del libro del alumnado se describen sus efectos.

2 **¿Influye en la ley de la gravitación de Newton la velocidad de los cuerpos o estos se atraen igual en movimiento que en reposo?**

La velocidad de los cuerpos no influye en la ley de la gravitación universal de Newton. Estos se atraen igual en movimiento que en reposo.

3 **Explica por qué decimos que el campo de fuerzas es vectorial.**

Es un campo vectorial porque a cada punto del espacio le asigna una magnitud vectorial, la fuerza.

4 **¿Te parece aceptable que la gravedad se propague de forma instantánea o es más razonable que tenga una velocidad finita de propagación?**

La propagación instantánea de la gravedad va contra las previsiones de la teoría de la relatividad (que estudiaremos en la unidad 11), según la cual ninguna energía, fuerza, señal, etc., puede propagarse más velozmente que la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}.

Por otra parte, no parece razonable que el cambio de una masa en un punto dado se detecte instantánea y simultáneamente en todo el universo.

2 Campo gravitatorio

Página 37

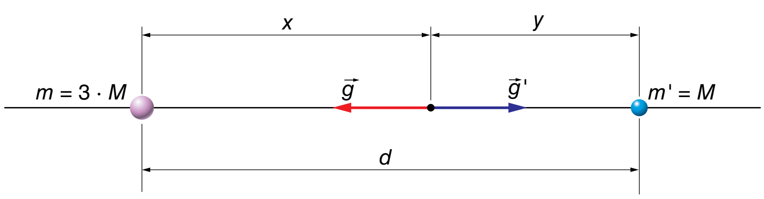
5 **Dos masas diferentes están separadas 1 m. ¿Es igual el valor de la fuerza que cada una realiza sobre la otra? ¿Y el del campo?**

El valor de la fuerza que cada una realiza sobre la otra es idéntico, porque ambas fuerzas son manifestaciones de una misma y única interacción (ley de acción-reacción).

El valor del campo, por el contrario, no coincidirá, en general, porque solo depende de la masa que lo crea, no de la masa que «lo siente» o percibe.

6 **¿En qué punto de la línea que une dos masas, una triple que la otra, se anula $\vec{g}_{total}$?**

Como hemos visto en el ejercicio resuelto 2 (pág. 35 del libro del alumnado), el punto donde se anula el campo tiene que estar entre las masas; en este caso, a una distancia x de la mayor, tal como se ve en la figura:



Por tanto, si llamamos d a la separación entre las masas:

$$G \cdot \frac{3 \cdot M}{x^2} = G \cdot \frac{M}{(d-x)^2} \rightarrow 3 = \left(\frac{x}{d-x}\right)^2 \rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{d-x} \rightarrow x = 0{,}634 \cdot d \;\; ; \;\; y = 0{,}366 \cdot d$$

La solución alternativa:

$$-\sqrt{3} = \frac{x}{d-x}$$

carece de sentido físico, pues proporciona un valor de x superior a d.

7 Obtén la fuerza que actúa sobre a una masa de 25 kg situada en un punto donde $\vec{g} = 5{,}4 \cdot \vec{j}$ m · s^{-2}.

Como $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$, al sustituir datos, nos queda:

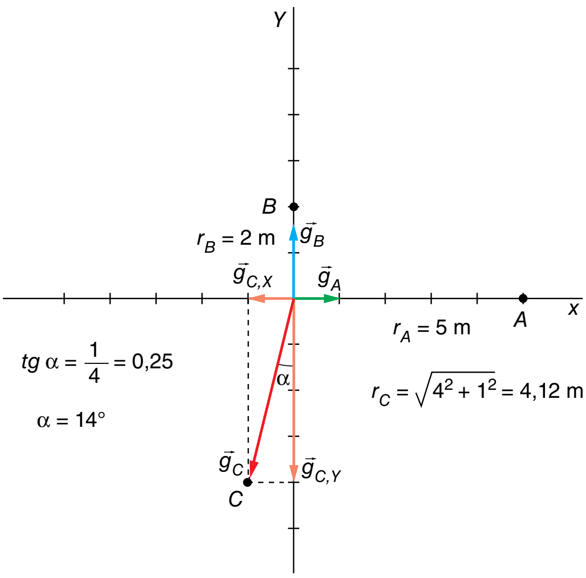
$$\vec{F} = 25 \text{ kg} \cdot 5{,}4 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 135 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

8 Determina el campo total que crean en el origen tres masas de 100 kg situadas en las posiciones *A* (5, 0) m, *B* (0, 2) m y *C* (–1, –4) m.

El campo total, $\vec{g}$, será:

$$\vec{g} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C$$

Y sus direcciones y sentidos, los que se observan en la figura:



Primero, vamos a calcular los módulos de los tres vectores:

$$g_A = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100}{5^2} = 2{,}67 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$$

$$g_B = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100}{2^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-9} \text{ N/kg}$$

$$g_C = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100}{4{,}12^2} = 3{,}93 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$$

Ahora, hallamos las componentes del vector $\vec{g}_C$ sobre los ejes X e Y. Tenemos:

$$g_{C,X} = g_C \cdot sen\ \alpha \rightarrow g_{C,X} = 3{,}93 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg} \cdot sen\ 14° = 9{,}51 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg}$$

$$g_{C,Y} = g_C \cdot cos\ \alpha \rightarrow g_{C,Y} = 3{,}93 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg} \cdot cos\ 14° = 3{,}81 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$$

El campo gravitatorio en el origen debido a la masa colocada en el punto C es, entonces:

$$\vec{g}_C = -(9{,}51 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 3{,}81 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j}) \text{ N/C}$$

La suma vectorial será:

$$\vec{g} = 2,67 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}\ \frac{N}{kg} + 1,67 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{j}\ \frac{N}{kg} + (-9,51 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} - 3,81 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j})\ \frac{N}{kg}$$

de donde obtenemos:

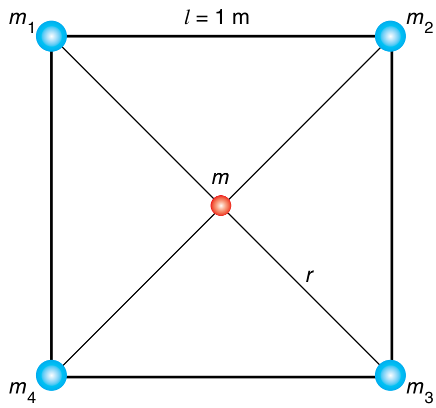
$$\vec{g} = (1,72 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i} + 1,29 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{j})\ N \cdot kg^{-1}$$

3 Energía en el campo gravitatorio

Página 39

9 Calcula la E_p de una masa de 8 kg colocada en el centro de un cuadrado de 1 m de lado en cuyos vértices hay masas puntuales de 200 kg cada una.

La figura que representa la situación física descrita por el enunciado es la que se muestra a la derecha.



Observa que, en ella:

$$(2 \cdot r)^2 = l^2 + l^2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ m$$

Además:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = M = 200\ kg$$

La energía potencial que crea cada masa será:

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Al sustituir datos, resulta:

$$E_p = -6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot \frac{200\ kg \cdot 8\ kg}{(\sqrt{2}/2)\ m} = -1,51 \cdot 10^{-7}\ J$$

Por tanto, la energía potencial que adquiere la masa colocada en el centro del cuadrado es:

$$E_{p.\ total} = 4 \cdot E_p = 4 \cdot (-1,51 \cdot 10^{-7})\ J = -6,04 \cdot 10^{-7}\ J$$

10 Explica por qué decimos que la fuerza y la energía potencial no son magnitudes características exclusivas del campo gravitatorio.

La fuerza y la energía potencial no son magnitudes características exclusivas del campo gravitatorio, porque también dependen de la masa testigo que se coloca en su interior.

Página 41

11 ¿Qué potencial existe a 10 m del centro de una masa de 8000 kg?

El potencial gravitatorio que crea la masa será:

$$V_g(r) = -G \cdot \frac{M}{r}$$

Sustituyendo datos numéricos:

$$V_g(r) = -6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot \frac{8\,000\ kg}{10\ m} = -5,34 \cdot 10^{-8}\ J \cdot kg^{-1}$$

12 **¿La velocidad de un cuerpo de 40 kg es de 60 m/s en un punto con V_{g_1} = –30 J/kg. ¿Cuál será su velocidad si, moviéndose libremente a través del campo, llega a un punto con potencial V_{g_2} = –50 J/kg?**

Como el campo gravitatorio es conservativo, la energía mecánica del cuerpo se conserva. Por tanto:

$$E_{c_1} + E_{p_1} = E_{c_2} + E_{p_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + m \cdot V_{g_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + m \cdot v_{g_2}$$

Simplificando las masas y sustituyendo datos se obtiene:

$$\frac{1}{2} \cdot (60 \text{ m/s})^2 + (-30 \text{ J/kg}) = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 + (-50 \text{ J/kg}) \quad \rightarrow \quad v_2 = 60{,}33 \text{ m/s}$$

Observa que el resultado es independiente de la masa del cuerpo.

4 Campo gravitatorio de la Tierra

Página 43

13 **¿Por qué es algo menor la intensidad del campo gravitatorio en el ecuador que en los polos?**

La gravedad en el ecuador es algo menor que en los polos porque la Tierra no es esférica y el radio ecuatorial es mayor que el radio polar. Además, en el ecuador existe otro efecto adicional no gravitatorio debido a la rotación terrestre.

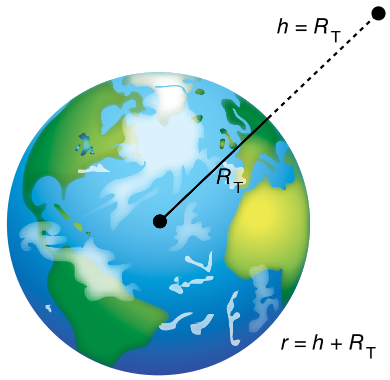
14 **Determina la gravedad para una altura igual al radio terrestre.**

La expresión de la fuerza de atracción gravitatoria es:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r = m \cdot \vec{g}$$

y en un punto de la superficie terrestre:

$$\vec{F}_c = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} \cdot \vec{u}_r = m \cdot \vec{g}_0$$



Trabajando con módulos y despejando $G \cdot M_T$ de las dos expresiones, nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} G \cdot M_T = g \cdot r^2 \\ G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow \; g \cdot r^2 = g_0 \cdot R_T^2 \; \rightarrow \; g = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(h + R_T)^2}$$

Como $h = R_T$, tendremos:

$$g = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + R_T)^2} = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{4 \cdot R_T^2} \quad \rightarrow \quad g = \frac{g_0}{4}$$

Luego:

$$g = \frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{4} = 2{,}45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

15 **Calcula la gravedad en la superficie de un planeta *P* si $R_P = R_T$ y $2 \cdot d_P = d_T$.**

Si la densidad del otro planeta es la mitad y el radio es igual, tenemos:

- Para la Tierra:

$$d = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} \quad \rightarrow \quad d = \frac{3 \cdot M_T}{4 \cdot \pi \cdot R^3}$$

- Para el otro planeta:

$$\frac{d}{2} = \frac{M_P}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} \quad \rightarrow \quad d = \frac{3 \cdot M_P}{4 \cdot \pi \cdot R^3}$$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene:

$$1 = \frac{3 \cdot M_T}{6 \cdot M_P} \quad \rightarrow \quad M_P = \frac{M_T}{2}$$

La expresión de la gravedad en la superficie de un planeta es:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Para el planeta, al ser el radio igual al de la Tierra, y su masa, la mitad, el valor de g también lo será. Es decir:

$$g_P = G \cdot \frac{M_P}{R^2} = G \cdot \frac{M_T}{2 \cdot R^2} \quad \rightarrow \quad g_P = \frac{g_T}{2}$$

16 **¿Con qué aceleración cae un cuerpo de 100 kg? ¿Y si es de 1 kg? Explica los resultados.**

El valor de la aceleración es independiente de la masa del cuerpo, ya que solo depende de la gravedad en el punto de caída.

5 Energía potencial y velocidad de escape

Página 45

17 **Determina la velocidad de escape de la superficie solar si $M_{Sol} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg y $R_{Sol} = 695\,000$ km.**

La velocidad de escape la calculamos haciendo un balance de energía mecánica entre un punto situado en la superficie del Sol y otro punto donde su atracción gravitatoria sea 0, lo que ocurre para $r = \infty$. Así, nos queda:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-G \cdot \frac{M \cdot m}{R_{Sol}}\right) = 0 + 0$$

Luego:

$$v^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R_{Sol}} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R_{Sol}}}$$

Sustituyendo datos numéricos, se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{695\,000 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 619\,584\ \text{m/s}$$

Es decir, 619,6 km · s^{-1}. En la Tierra, dicha velocidad vale 11,2 km · s^{-1}.

18 **Halla la diferencia de energía potencial que se produce cuando una masa de 5 kg se levanta 10 m. Efectúa el cálculo con la fórmula exacta y con la aproximada, $E_p = m \cdot g_0 \cdot h$.**

La diferencia de energía potencial gravitatoria entre dos puntos, A y B, separados una distancia h vale:

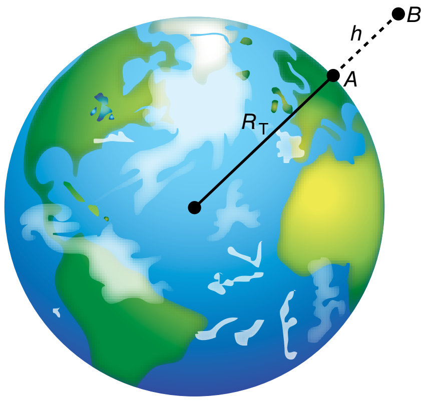
$$\Delta E_p = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Utilizando las siguientes relaciones y de acuerdo con la figura:

$$G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

$$r_A = R_T$$

$$r_B = R_T + h$$



Tenemos:

$$\Delta E_p = g_0 \cdot R_T^2 \cdot m \cdot \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right] = m \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot \left[\frac{h}{R_T \cdot (R_T + h)}\right]$$

que podemos poner de la siguiente forma:

$$\Delta E_p = m \cdot g_0 \cdot h \cdot \frac{R_T}{R_T + h}$$

El valor del factor $R_T/(R_T + h)$ resulta:

$$\frac{R_T}{R_T + h} = \frac{6\,370 \cdot 10^3 \text{ m}}{6\,370 \cdot 10^3 \text{ m} + 10 \text{ m}} = 0,99999843$$

que podemos considerar igual a 1, cometiendo un error relativo del orden del 0,0002 %. Por tanto, podemos utilizar la expresión aproximada habitual, $\Delta E_p = m \cdot g_0 \cdot h$, ya que la diferencia es despreciable.

En este caso, la fórmula exacta nos proporciona el valor:

$$\Delta E_p = 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 10 \text{ m} \cdot 0,99999843 = 489,9992307 \text{ J}$$

y la aproximada:

$$\Delta E_p = m \cdot g_0 \cdot h = 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 10 \text{ m} = 490 \text{ J}$$

La diferencia entre ambos valores resulta:

$$\textit{Diferencia} = 490 - 489,9992307 = 0,0007693 \text{ J}$$

19 Razona si es correcta esta proposición: «Para dos planetas de igual masa, la velocidad de escape es mayor en el que tiene la densidad más baja».

Las expresiones que corresponden a la velocidad de escape desde la superficie de un planeta y a su densidad son:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \quad ; \quad d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

donde M es la masa del planeta, y R, su radio. De acuerdo con ellas, observa que el planeta que tenga una densidad más baja, a igualdad de masa, tendrá un radio mayor y, por tanto, una velocidad de escape menor. Por tanto, la proposición es falsa.

20 **Obtén la energía mecánica de un cuerpo de 800 kg de masa que se mueve a 4,5 km/s en un punto donde el potencial gravitatorio vale –5 · 10⁶ J/kg.**

La energía mecánica es la suma de la energía potencial gravitatoria, E_p, y la energía cinética, E_c. Es decir:

$$E_m = E_c + E_p$$

Como nos dan datos del potencial gravitatorio, el valor de E_p será:

$$E_p(r) = V_g(r) \cdot m$$

Sustituyendo datos numéricos:

$$E_p = -5 \cdot 10^6 \ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 800 \text{ kg} = -4 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía cinética vale:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 800 \text{ kg} \cdot (4\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 8{,}1 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica resulta, entonces:

$$E_m = E_p + E_c = -4 \cdot 10^9 + 8{,}1 \cdot 10^9 = 4{,}1 \cdot 10^9 \text{ J}$$

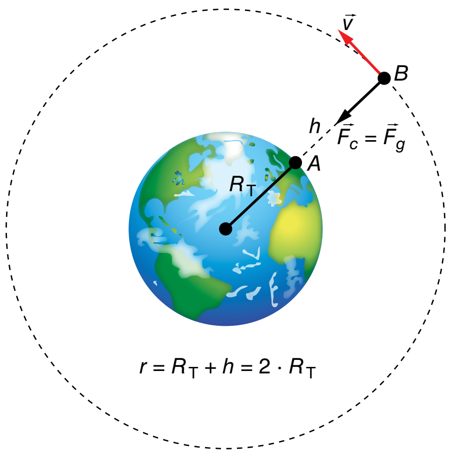
6 Movimiento de los satélites artificiales

Página 49

21 **Determina el trabajo de escape de un satélite de 1500 kg de masa que sigue una órbita circular en torno a la Tierra a una altura $h = R_T$.**

El trabajo de escape desde una órbita circular estable es el aumento de energía necesaria para llegar a $E_m = 0$:

$$W_{escape} = 0 - E_m \text{ (órbita)}$$



La energía mecánica del satélite en la órbita es:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot G}{r}$$

La velocidad orbital la obtenemos igualando la fuerza centrípeta y la fuerza de atracción gravitatoria:

$$F_c = F_g \quad \rightarrow \quad m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

Por tanto:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}$$

La expresión de la energía mecánica es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2 \cdot r} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot (R_T + R_T)} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{4 \cdot R_T}$$

Y el trabajo de escape resulta, finalmente:

$$W_{escape} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{4 \cdot R_T} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1500 \text{ kg}}{4 \cdot 6\,370 \cdot 10^3 \text{ m}} = 7{,}04 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

22 **La energía cinética de un satélite en órbita circular en torno a Marte es de 8,2 · 10¹⁰ J. Obtén sus energías potencial gravitatoria y mecánica total.**

Como para la energía de un satélite en órbita se cumple que:

$$E_m = -E_c \ ; \ E_p = -2 \cdot E_c$$

quedará:

$$E_m = -8{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{J} \ ; \ E_p = -1{,}64 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

23 **¿Es posible que un satélite de 1000 kg gire en órbita circular terrestre a una altura de 500 km con *v* = 8 km/s? ¿Y si cambiamos la masa del satélite?**

La velocidad orbital depende exclusivamente de la altura de la órbita circular, según la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T \cdot h}}$$

donde R es el radio de la órbita, y h, la altura sobre la superficie terrestre.

Sustituyendo, queda:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7\,616\ \text{m/s}$$

Como vemos, la velocidad orbital a 500 km de altura es inferior a 8 km/s; por tanto, los datos de altura y velocidad orbitales no son compatibles.

La masa del satélite no tiene influencia en la velocidad orbital.

24 **Calcula el momento angular de un satélite de 2200 kg de masa que gira en órbita circular en torno a Venus con una frecuencia de 4 vueltas por día, si la masa de Venus es M_V = 4,87 · 10²⁴ kg.**

El momento angular será un vector perpendicular al plano de la órbita de Venus, cuyo valor se obtiene aplicando la expresión:

$$L = m \cdot r \cdot v$$

Para calcular el radio, r, de la órbita circular, aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_V}$$

Como el período es:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4\ \text{día}^{-1}} = 0{,}25\ \text{días}$$

El radio de la órbita resulta:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_V}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(0{,}25 \cdot 24 \cdot 3\,600\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4 \cdot \pi^2}}$$

$$r = 1{,}566 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Su velocidad orbital se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_V}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 4{,}87 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{1{,}566 \cdot 10^7\ \text{m}}} = 4\,554\ \text{m/s}$$

De modo que el valor del momento angular queda:

$$L = m \cdot r \cdot v = 2\,200\ \text{kg} \cdot 1{,}566 \cdot 10^7\ \text{m} \cdot 4\,554\ \text{m/s}$$

$$L = 1{,}57 \cdot 10^{14}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

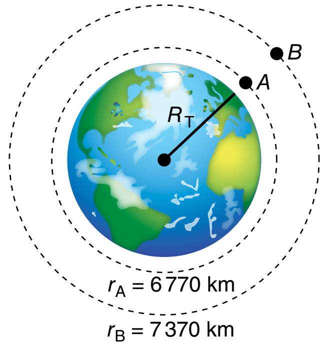
7 Puesta en órbita de un satélite artificial

Página 51

25 ¿Qué energía extra debemos aportar a un satélite de 2 400 kg para que pase de una órbita circular terrestre (h_1 = 400 km) a otra (h_2 = 1 000 km)?

La energía adicional es el trabajo exterior necesario para llevar el satélite de la órbita *A* a la órbita *B*; es decir, la diferencia de energía mecánica entre esos dos puntos:

$$W(A \to B) = E_m(B) - E_m(A)$$



La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r}\right)$$

La velocidad orbital viene dada por la siguiente expresión:

$$v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Luego:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Por tanto, la expresión del trabajo necesario queda como:

$$W(A \to B) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_B} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_A}\right) = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$W(A \to B) = \frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 2\,400\ \text{kg} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{6\,770 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{7\,370 \cdot 10^3\ \text{m}}\right)$$

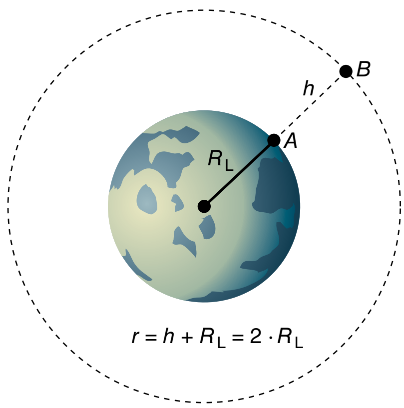
$$W(A \to B) = 5{,}76 \cdot 10^9\ \text{J}$$

26 Determina el trabajo necesario para poner un satélite de 850 kg en órbita circular lunar de radio $r = 2 \cdot R_L$.

Datos: $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; R_L = 1 738 km.

El trabajo necesario para poner el satélite en la órbita *B* será la diferencia de energía entre los puntos *A* y *B*. Es decir:

$$W(A \to B) = E_m(B) - E_m(A)$$



Siendo:

$$E_m(B) = E_p(A) + E_c(B)$$

$$E_m(A) = E_p(A)$$

Por tanto:

$$W(A \to B) = \Delta E_p(A \to B) + E_c(B)$$

donde:

$$\Delta E_p\,(A \rightarrow B) = -\frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_B} - \left(-\frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_A}\right) = G \cdot M_L \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

y como $r_A = R_L$ y $r_B = 2 \cdot R_L$, resulta:

$$\Delta E_p\,(A \rightarrow B) = \frac{G \cdot M_L \cdot m}{2 \cdot R_L}$$

La energía cinética vale:

$$E_c(B) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$$

siendo:

$$v_B^2 = \frac{G \cdot M_L}{r_B} = \frac{G \cdot M_L}{2 \cdot R_L}$$

Luego:

$$E_c(B) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M_L}{2 \cdot R_L} = \frac{G \cdot M_L \cdot m}{4 \cdot R_L}$$

Por tanto:

$$W(A \rightarrow B) = \frac{G \cdot M_L \cdot m}{2 \cdot R_L} + \frac{G \cdot M_L \cdot m}{4 \cdot R_L} = \frac{3 \cdot G \cdot M_L \cdot m}{4 \cdot R_L}$$

Sustituyendo datos numéricos, se obtiene, finalmente:

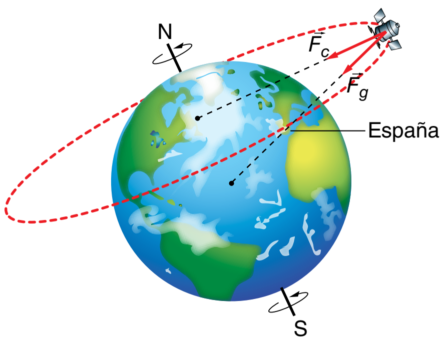
$$W(A \rightarrow B) = \frac{3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 850\ \text{kg}}{4 \cdot 1738 \cdot 10^3\ \text{m}} = 1{,}80 \cdot 10^9\ \text{J}$$

8 Clasificación orbital de los satélites artificiales

Página 53

27 ¿Por qué no puede haber satélites geoestacionarios sobre el cielo de España?

Para que un satélite sea geoestacionario sobre España, su órbita debe ser tal como ves en la figura. Sin embargo, el plano de dicha órbita no contiene al centro de la Tierra, que actúa como centro de atracción de la fuerza gravitatoria. Por tanto, la órbita propuesta no es posible, ya que la fuerza gravitatoria no coincide con la fuerza normal o centrípeta necesaria para mantener al satélite en la órbita con m.c.u. que deseamos.



28 Calcula el radio orbital de un satélite cuyo período sea la mitad del período de rotación de la Tierra.

La tercera ley de Kepler relaciona los radios de giro y los períodos de revolución de dos satélites cualesquiera que orbitan la Tierra:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

Consideramos que el primer satélite es geoestacionario, y que el segundo tiene un período orbital que es la mitad del anterior. Por tanto:

$$\left(\frac{T_2}{T_{GEO}}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_{GEO}}\right)^3 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{T_{GEO}/2}{T_{GEO}}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_{GEO}}\right)^3 \quad \rightarrow \quad r_2 = r_{GEO} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,63 \cdot r_{GEO}$$

Como el radio de giro de todos los satélites geoestacionarios es r_{GEO} = 42 168 km, el radio del satélite pedido resulta:

$$r_2 = 0,63 \cdot 42\,168 \text{ km} = 26\,566 \text{ km}$$

29 Determina los parámetros orbitales de un satélite selenoestacionario con estos datos de la Luna: M_L = 7,35 · 10²² kg; T_L = 27 días, 7 horas y 43,2 minutos.

Un satélite selenoestacionario (SEO), es decir, estacionario respecto a un punto de la superficie lunar, tendría una órbita circular en el plano ecuatorial de la Luna, con un radio de giro que viene dado por la tercera ley de Kepler:

$$R_{SEO} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_L \cdot T_{SEO}^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot (2\,360\,592 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$$R_{SEO} = 8,845 \cdot 10^7 \text{ m}$$

30 ¿Pueden tener órbita polar los satélites GEO y los geosíncronos?

Los satélites geosíncronos pueden tener órbita polar, ya que solo se les exige que su período de rotación coincida con el de la Tierra.

Sin embargo, los satélites geoestacionarios no pueden tener órbita polar, ya que todos ellos están en órbita ecuatorial, que es la única para la cual el eje de giro del satélite coincide con el eje de giro de los puntos de la superficie terrestre.

Página 62

Campo gravitatorio

1 **Una partícula de masa *m*, situada en un punto *A*, se mueve en línea recta hacia otro punto *B*, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa *M*. Si el valor del potencial gravitatorio en el punto *B* es mayor que en el punto *A*, razona si la partícula se acerca o se aleja de *M*.**

La partícula se aleja de *M*, ya que viaja hacia potenciales crecientes. Recuerda que el potencial gravitatorio es negativo y tiende a cero (aumenta) cuando nos alejamos de la masa que crea el campo.

2 **Una partícula puntual de masa m_1 = 100 kg está situada en el origen, *O*, de un cierto sistema de coordenadas. Una segunda partícula puntual de masa m_2 = 30 kg está situada sobre el eje *X* en un punto *A*, cuyas coordenadas son (6, 0) m. Determina:**

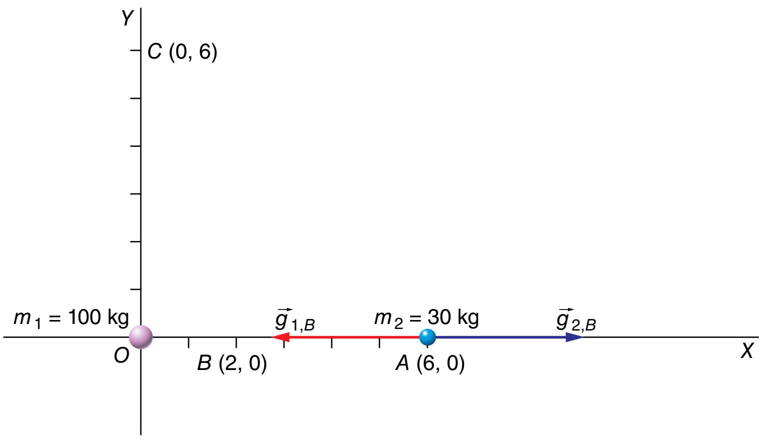
a) El módulo, la dirección y el sentido del campo gravitatorio en el punto *B*, de coordenadas (2, 0) m.

b) El punto sobre el eje *X* para el cual el campo gravitatorio es nulo.

c) El trabajo realizado por el campo gravitatorio cuando la masa m_2 se traslada desde el punto *A* al punto *C*, de coordenadas (0, 6) m.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

La gráfica que representa la situación física descrita por el enunciado del problema es la siguiente:



a) En el punto *B* se superponen los campos procedentes de m_1 y m_2:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \rightarrow \begin{cases} \vec{g}_{1,B} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \dfrac{100\ \text{kg}}{(2\ \text{m})^2} \cdot \vec{i} = -1{,}67 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{i}\ \text{N/kg} \\ \vec{g}_{2,B} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \dfrac{30\ \text{kg}}{(4\ \text{m})^2} \cdot \vec{i} = 1{,}25 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{i}\ \text{N/kg} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\vec{g}_B = \vec{g}_{1,B} + \vec{g}_{2,B} = -1{,}545 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{i}\ \text{N}$$

b) El campo se anula entre las masas a una distancia *x* de m_1; por tanto:

$$G \cdot \frac{100}{x^2} = G \cdot \frac{30}{(6-x)^2} \rightarrow \frac{100}{30} = \left(\frac{x}{6-x}\right)^2$$

De las dos posibles soluciones, solo x = 3,88 m es aceptable, pues la otra, x = 13,27 m, corresponde un punto no comprendido entre m_1 y m_2.

c) Para calcular el trabajo gravitatorio, determinamos la variación de la energía potencial gravitatoria entre ambos puntos:

$$W_{A \to C} = -\Delta E_p = (-E_{p_C} - E_{p_A}) = E_{p_A} - E_{p_C}$$

$$E_{p_A} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_A}$$

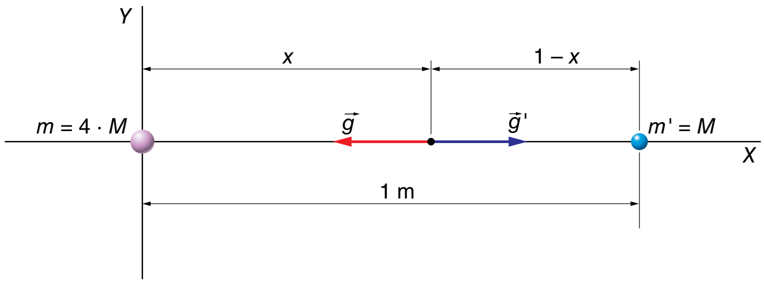
$$E_{p_C} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_C}$$

Como $r_A = r_C = 6 \text{ m} \quad \rightarrow \quad E_{p_A} = E_{p_C} \quad \rightarrow \quad \Delta E_p = 0$.

Por tanto, el trabajo del campo gravitatorio es nulo.

3 **Una partícula puntual de masa 4 · *M* se coloca en el origen de un cierto sistema de coordenadas, mientras que otra, de masa *M*, se coloca sobre el eje *X* a una distancia de 1 m respecto al origen. Calcula las coordenadas del punto donde el campo gravitatorio es nulo.**

El campo gravitatorio solo puede anularse en un punto situado entre las masas. Si llamamos x a la distancia desde el origen hasta dicho punto, quedará:

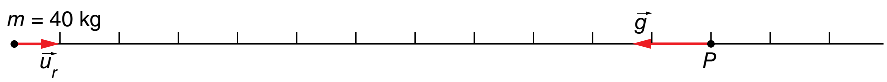


$$\frac{G \cdot m}{r^2} = \frac{G \cdot m'}{r'^2} \quad \rightarrow \quad \frac{G \cdot 4 \cdot M}{x^2} = \frac{G \cdot M}{(1-x)^2} \quad \rightarrow \quad 4 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \pm 2 = \frac{x}{1-x}$$

De las dos soluciones posibles para x, solo tiene sentido físico x = 0,67 m. La otra solución, x = 2 m, no es aceptable.

4 **Calcula el campo gravitatorio y el potencial gravitatorio que una masa puntual de 40 kg produce en un punto situado a 12 m.**

La figura que representa la situación física descrita por el enunciado es:



La expresión del vector intensidad del campo gravitatorio, $\vec{g}$, es:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

donde el signo negativo nos indica que los vectores $\vec{g}$ y $\vec{u}_r$ tienen sentidos opuestos.

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{40 \text{ kg}}{(12 \text{ m})^2} \cdot \vec{u}_r \quad \rightarrow \quad \vec{g} = -0{,}28 \cdot G \cdot \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

El potencial gravitatorio, $V_g(r)$, vale:

$$V_g(r) = -G \cdot \frac{m}{r}$$

por lo que su valor en el punto dado será:

$$V_g(r) = -G \cdot \frac{40 \text{ kg}}{12 \text{ m}} = -3{,}3 \cdot G \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

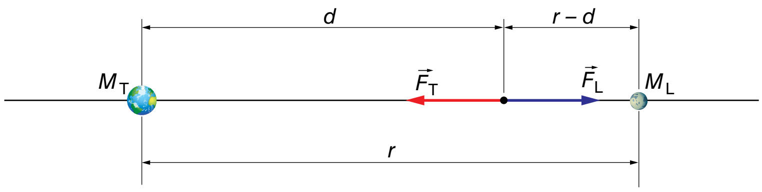
Sustituyendo el valor de la constante de la gravitación universal, G, resulta:

$$\vec{g} = -1{,}87 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} \quad ; \quad V = -2{,}2 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

5 **¿A qué distancia del centro de la Tierra se compensaría el campo gravitatorio terrestre con el lunar?**

Datos: M_{Tierra} = 5,98 · 10^{24} kg; M_{Luna} = 7,35 · 10^{22} kg; $d_{Tierra\text{-}Luna}$ = 3,84 · 10^8 m.

El esquema que muestra la situación física descrita por el enunciado es el siguiente:



En el punto donde se compensen ambos campos gravitatorios, que, según el esquema, se encuentra a una distancia d del centro de la Tierra y a una distancia $r - d$ del centro de la Luna, se cumplirá:

$$g_T = g_L \quad \rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T}{d^2} = G \cdot \frac{M_L}{(r - d^2)} \quad \rightarrow \quad \frac{M_T}{M_L} = \left(\frac{d}{r - d}\right)^2$$

Por tanto:

$$\frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg}} = \left(\frac{d}{r - d}\right)^2 \quad \rightarrow \quad d = 0{,}9 \cdot r$$

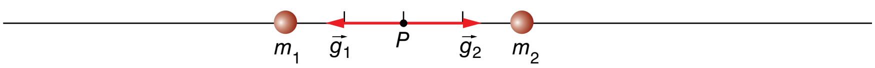
siendo r la distancia que separa la Tierra de la Luna; entonces:

$$d = 0{,}9 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 = 3{,}456 \cdot 10^8 \text{ m}$$

6 **En el punto intermedio entre dos masas idénticas, ¿se anula el campo gravitatorio? ¿Y el potencial?**

Al ser $m_1 = m_2 = m$ y $r_1 = r_2 = r$, el campo gravitatorio sí se anula, ya que la suma de ambos vectores campo gravitatorio es nula.

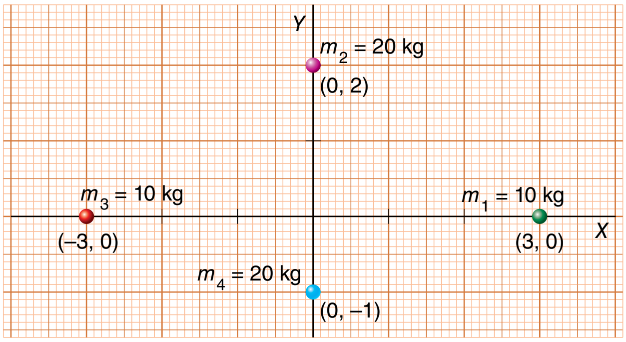
Observa la siguiente figura:



Sin embargo, el potencial gravitatorio no se anula, ya que el valor resultante se obtiene a partir de una suma algebraica:

$$V = V_1 + V_2 \quad \rightarrow \quad V = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_1}{r_2} = -2 \cdot G \cdot \frac{m}{r}$$

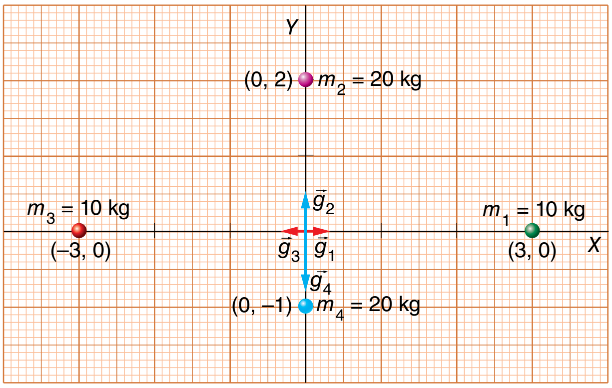
7 **Determina el valor del campo gravitatorio y del potencial gravitatorio en el origen de coordenadas del sistema de masas siguiente:**



Para determinar el valor del campo gravitatorio en el origen de coordenadas, aplicamos el principio de superposición:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i$$

La figura muestra la dirección y el sentido de los respectivos vectores campo gravitatorio. Como vemos, los vectores $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_3$ se anulan al tener igual módulo ($m_3 = m_2$ y $r_3 = r_1$), igual dirección y distinto sentido.



Las masas m_4 y m_2 tienen el mismo valor, pero se encuentran a distinta distancia del origen. Como m_4 está más cerca de este, $|\vec{g}_4| > |\vec{g}_2|$, por lo que el vector resultante, $\vec{g}$, estará dirigido hacia m_4, y tendrá sentido opuesto al del vector unitario $\vec{u}_4 = \vec{j}$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} g_4 = G \cdot \dfrac{m_4}{r_4^2} \quad \rightarrow \quad g_4 = G \cdot \dfrac{20\ \text{kg}}{(1\ \text{m})^2} = 20 \cdot G\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} \\[2ex] g_2 = G \cdot \dfrac{m_2}{r_2^2} \quad \rightarrow \quad g_2 = G \cdot \dfrac{20\ \text{kg}}{(2\ \text{m})^2} = 5 \cdot G\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow g = 15 \cdot G\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Y el vector resultante, $\vec{g}$, será:

$$\vec{g} = -15 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} = 10^{-9} \cdot \vec{j}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Para calcular el potencial gravitatorio, $V_g(r)$, aplicamos de nuevo el principio de superposición:

$$V_g(r) = \sum_{i=1}^{n} V_i(r) \quad \rightarrow \quad V_g(r) = \sum_{i=1}^{n} -G \cdot \frac{m_i}{r_i}$$

Pero ahora tenemos una suma de escalares. En este caso, se obtiene la expresión:

$$V_g(r) = -G \cdot \left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \frac{m_4}{r_4}\right]$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$V_g = -6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \left[\frac{10\ \text{kg}}{3\ \text{m}} + \frac{20\ \text{kg}}{2\ \text{m}} + \frac{10\ \text{kg}}{3\ \text{m}} + \frac{20\ \text{kg}}{1\ \text{m}}\right] = -2,45 \cdot 10^{-9}\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

8 **Si la energía potencial de un cuerpo se mantiene constante en una región del espacio, ¿qué se puede decir de la fuerza que origina el potencial en esta región?**

Si la energía potencial es constante en una determinada región del espacio, su variación de un punto a otro es nula y, por tanto, también lo es el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria:

$$W_{1\to 2}\ (\text{fuerza gravitatoria}) = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = 0$$

Como esto sucede para cualquier desplazamiento, $d\vec{r}$, en esa región, la fuerza tiene que ser nula en ella, $\vec{F}_g = 0$.

9 **Un objeto pesa en la Tierra 600 N. ¿Cuál sería su peso en un planeta de radio $R = R_T/2$ y masa $M = M_T/10$?**

El peso de un cuerpo, *P*, es el resultado de la fuerza de atracción que ejerce sobre él la Tierra (u otro planeta, estrella o cuerpo celeste de masa significativa) y lo expresamos mediante: $P = m \cdot g$. Vamos a ver la relación que existe entre el campo gravitatorio en la superficie de nuestro planeta y en la superficie del otro planeta.

Tenemos:

- Para la Tierra:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

- Para el planeta:

$$g_p = G \cdot \frac{M_T/10}{(R_T/2)^2} = 0,4 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Es decir, $g_p = 0,4 \cdot g_T$ y, por tanto, el cuerpo pesaría 0,4 veces lo que pese en la Tierra:

$$P_p = 0,4 \cdot 600\ \text{N} = 240\ \text{N}$$

10 **Sea *g* la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. Ahora, imagina que la Tierra reduce su radio y su masa a la mitad. Suponiendo que *g'* sea el nuevo valor de la aceleración de la gravedad, ¿cuál será la relación entre ambas aceleraciones (es decir, el valor de *g/g'*)?**

Las dos situaciones las podemos describir de la siguiente forma:

- Tierra actual:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

- Tierra diferente:

$$g_p = G \cdot \frac{M_T/2}{(R_T/2)^2} = 2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Como vemos, en la nueva Tierra el valor de g' sería el doble que el de g:

$$\frac{g}{g'} = \frac{1}{2} = 0,5$$

11 **En la superficie de un planeta de 2000 km de radio, g = 3 m/s². Calcula:**

a) La masa del planeta.

b) La energía potencial gravitatoria de un objeto de 5 g de masa situado en su superficie.

c) La velocidad de escape desde la superficie del planeta.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

FE DE ERRATAS DE LA PRIMERA EDICIÓN DEL LIBRO DEL ALUMNADO: La solución del apartado b) es $E_p = -3{,}0 \cdot 10^4$ J.

a) El módulo del campo gravitatorio en la superficie del planeta, g_0, se expresa mediante:

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Despejando M y sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$M = \frac{g_0 \cdot R^2}{G} \quad \rightarrow \quad M = \frac{3\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot (2\,000 \cdot 10^3\ \text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}} = 1{,}8 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

b) La energía potencial gravitatoria la obtenemos mediante la expresión:

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$E_p = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{1{,}8 \cdot 10^{23}\ \text{kg} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}{2\,000 \cdot 10^3\ \text{m}} = -3{,}0 \cdot 10^4\ \text{J}$$

c) La velocidad de escape la calculamos mediante la expresión:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2\,000 \cdot 10^3\ \text{m}} = 3\,464\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Página 63

12 **Si la Tierra redujese su radio a la mitad, pero conservando su masa:**

a) ¿Cuál sería la intensidad de la gravedad en su superficie?

b) ¿Cuánto valdría la velocidad de escape desde su superficie?

a) Al reducir su radio a la mitad, $R' = R_T/2$, conservando su masa, se tendría:

$$g' = G \cdot \frac{M_T}{R'^2} = G \cdot \frac{M_T}{(R_T/2)^2} \quad \rightarrow \quad g' = 4 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 4 \cdot g_0$$

Es decir, la intensidad de la gravedad en la superficie de la Tierra se multiplicaría por cuatro.

b) La velocidad de escape se puede calcular, para el caso de la superficie de la Tierra, mediante la expresión:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

Ahora, en la nueva situación, $g' = 4 \cdot g_0$ y $R' = R_T/2$.

Por tanto:

$$v'_e = \sqrt{2 \cdot g' \cdot R'} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot g_0 \cdot (R_T/2)} = \sqrt{4 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

O, lo que es la mismo:

$$v'_e = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot g_0 \cdot R_T} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T} = \sqrt{2} \cdot v_e$$

Es decir, la velocidad de escape ahora sería $\sqrt{2}$ veces mayor.

13 **Suponiendo un planeta esférico que tenga un radio igual a la mitad del radio terrestre y la misma densidad que la Tierra, calcula:**

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.

b) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape desde la superficie terrestre es de 11,2 km/s.

Dato: g_0 (en la Tierra) = 9,81 m · s^{-2}.

a) Teniendo en cuenta que $m = V \cdot d$, y que el radio del planeta es $R = R_T/2$, la relación entre la masa del planeta y la de la Tierra será:

$$M_p = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot d = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R_T}{2}\right)^3 \cdot d \quad \rightarrow \quad M_p = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_T^3 \cdot d = \frac{M_T}{8}$$

Por tanto, tenemos:

- Para la Tierra:

$$g_0 = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

- Para el planeta:

$$g'_0 = G \cdot \frac{M_p}{R_p^2} = G \cdot \frac{(M_T/8)}{(R_T/2)^2} \quad \rightarrow \quad g'_0 = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{2} \cdot g_0$$

Luego:

$$g'_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 4{,}905 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) La velocidad de escape desde la superficie de un planeta (u otro astro de masa suficientemente grande) de radio R y gravedad en su superficie g, la calculamos mediante la expresión:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot g \cdot R}$$

Por tanto:

- Para la Tierra:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

- Y para el planeta:

$$v'_e = \sqrt{2 \cdot g'_0 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot (g_0/2) \cdot (R_T/2)} \quad \rightarrow \quad v'_e = \sqrt{0{,}25} \cdot \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

Es decir:

$$v'_e = \sqrt{0{,}25} \cdot 11{,}2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 5{,}6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

14 **Si el Sol colapsara de pronto, transformándose en una enana blanca (igual masa en un volumen mucho menor), ¿cómo afectaría al movimiento de la Tierra alrededor del Sol?**

En principio, y referido solo a su movimiento, no la afectaría en nada. Esto es debido a que la fuerza con que el Sol atrae a la Tierra, responsable de su movimiento, depende de la masa y de la distancia entre los centros de ambos cuerpos. Como estas magnitudes no cambian, la fuerza de atracción tampoco.

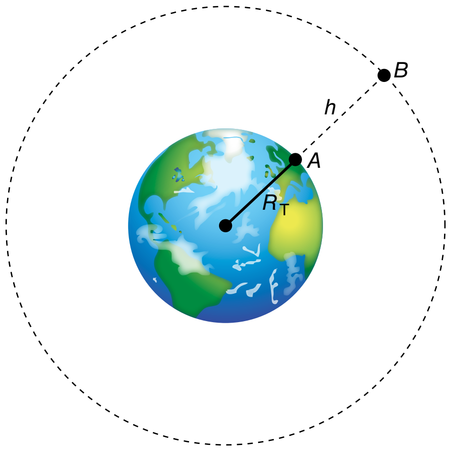
15 **Se dispara verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 4 km/s. Sin rozamiento, ¿hasta qué altura subiría?**

Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_{Tierra} = 6 370 km.

Fe de erratas de la primera edición del libro del alumnado: La velocidad inicial del proyectil es de 4 km/s, en lugar de 4 m/s.

Si realizamos un balance de energía entre los puntos A y B de la figura, nos queda:

$$E_p(A) + E_c(A) = E_p(B) + E_c(B)$$



Pero $E_c(B)$ = 0 J, luego:

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \quad \rightarrow \quad v_A^2 = 2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

Como no tenemos datos de G y M_T, igualamos el valor del peso en la superficie de la Tierra con el de la fuerza de atracción gravitatoria:

$$m \cdot g_0 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T^2} \quad \rightarrow \quad G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Luego:

$$v_A^2 = 2 \cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot \left[\frac{h}{R_T \cdot (R_T + h)}\right]$$

Despejando h y sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$h = \frac{v_A^2 \cdot R_T}{2 \cdot g_0 \cdot R_T - v_A^2} \quad \rightarrow \quad h = \frac{(4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot 6\,370 \cdot 10^3 \text{ m}}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s} \cdot 6\,370 \cdot 10^3 \text{ m} - (4 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2} = 9{,}36 \cdot 10^5 \text{ m}$$

16 **Un cuerpo que ha alcanzado la velocidad de escape en la superficie de la Luna, ¿a qué distancia del centro de la Luna habrá reducido su velocidad a la mitad?**

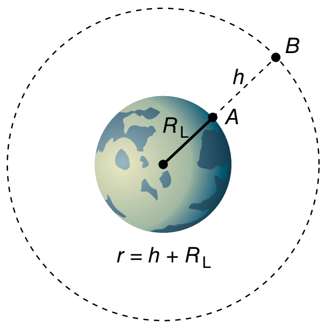
Dato: radio de la Luna, R_L = 1738 km.

Vamos a realizar un balance de energía mecánica entre los puntos A, en la superficie de la Luna, y B, el punto donde el cuerpo habrá reducido su velocidad a la mitad del valor de la velocidad de escape.

La velocidad de escape desde la superficie de la Luna, v_A, vale:

$$v_A = \sqrt{2 \cdot g_{L0} \cdot R_L}$$

donde g_{L0} es la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.



Por tanto, tendremos:

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$$

Sustituyendo por sus respectivas expresiones:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 + \left(-G \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L}\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 + \left(-G \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L + h}\right) \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$G \cdot M_L = g_{L0} \cdot R_L^2$$

$$v_A^2 = 2 \cdot g_{L0} \cdot R_L$$

$$v_B^2 = \left(\frac{v_A}{2}\right)^2 = \frac{2 \cdot g_{L0} \cdot R_L}{4} = \frac{g_{L0} \cdot R_L}{2}$$

Nos queda, al eliminar *m* de la expresión [1] y teniendo en cuenta lo anterior:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot g_{L0} \cdot R_L - g_{L0} \cdot R_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_{L0} \cdot R_L}{2} - \frac{g_{L0} \cdot R_L^2}{R_L + h} \quad \rightarrow \quad h = 3 \cdot R_L$$

Por tanto:

$$r = R_L + h = R_L + 3 \cdot R_L = 4 \cdot 1\,738 \text{ km} = 6\,952 \text{ km}$$

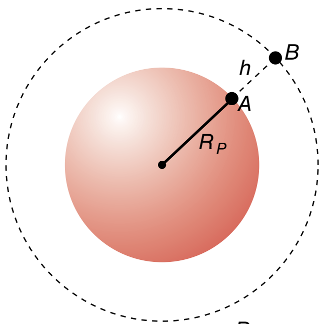
17 Un planeta esférico sin atmósfera tiene una masa $M_p = 1{,}2 \cdot 10^{23}$ kg y un radio $R_p = 1{,}3 \cdot 10^6$ m. Desde su superficie se lanza verticalmente un proyectil que llega a alcanzar una altura máxima $h = R_p/2$ antes de volver a caer hacia la superficie. ¿Con qué velocidad inicial se ha lanzado el proyectil? Ten en cuenta que $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

Puesto que el proyectil está sometido a una fuerza conservativa, podemos realizar el siguiente balance entre los puntos *A* y *B*:

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 + \left(-G \cdot \frac{M_p \cdot m}{R_p}\right) = 0 + \left(-G \cdot \frac{M_p \cdot m}{R_p + h}\right)$$



$$h + R_P = r \,;\, h = \frac{R_P}{2}$$

Teniendo en cuenta que $h = R_p/2$, la anterior expresión queda como:

$$v_A^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{G \cdot M_p}{R_p} \quad \rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_p}{3 \cdot R_p}}$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{3 \cdot 1{,}3 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 2\,026 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

18 **La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es 3,7 m/s², y su masa es un 11 % la de la Tierra. Si R_T = 6 370 km y g_T = 9,8 m/s², calcula:**

a) El radio de Marte.

b) El peso en la superficie de Marte de un astronauta de 75 kg de masa.

c) La velocidad de escape desde la superficie de Marte.

a) La aceleración de la gravedad (intensidad del campo gravitatorio) en la superficie terrestre es:

$$g_T = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Y en la supericie de Marte:

$$g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} = \frac{G \cdot 0{,}11 \cdot M_T}{R_M^2} = 3{,}7 \text{ m/s}^2$$

Si dividimos ambas expresiones entre sí, despejamos el radio de Marte y sustituimos los datos de que disponemos, se obtiene:

$$\frac{\dfrac{G \cdot M_T}{R_T^2}}{\dfrac{G \cdot 0{,}11 \cdot M_T}{R_M^2}} = \frac{9{,}8}{3{,}7} \quad \rightarrow \quad R_M = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot R_T^2 \cdot 0{,}11}{3{,}7}}$$

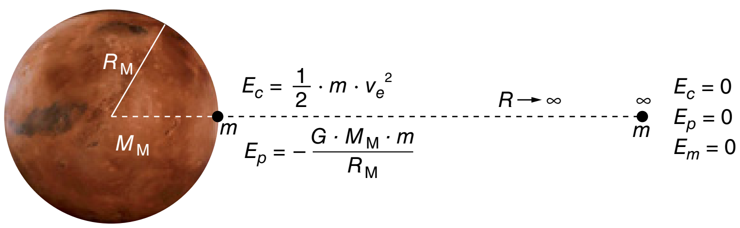
$$R_M = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 0{,}11}{3{,}7}} = 3\,438{,}33 \cdot 10^3 \text{ m}$$

b) El peso de un cuerpo en un punto es igual al producto de la masa del cuerpo por el valor de la gravedad en ese punto. En la superficie de Marte, el peso del astronauta será, por tanto:

$$P = m \cdot g_M = 75 \cdot 3{,}7 = 277{,}5 \text{ N}$$

c) La velocidad de escape es la velocidad que hay que comunicar a un cuerpo para que pueda salir de la influencia gravitatoria de un planeta.

En la superficie del planeta, el objeto tiene energía potencial negativa. Para que escape, hay que transmitirle una energía cinética suficiente para que la energía mecánica en la superficie del planeta sea igual a la energía mecánica en el infinito:



Lo que se corresponde con la siguiente expresión:

$$(E_m)_{sup} = (E_m)_\infty \quad \rightarrow \quad -G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = 0$$

De donde la expresión de la velocidad de escape resulta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_M}{R_M}}$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} \rightarrow G \cdot M_M = g_M \cdot R_M^2$$

Al sustituir en la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g_M \cdot R_M^2}{R_M}} = \sqrt{2 \cdot g_M \cdot R_M}$$

Finalmente, se obtiene:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 3{,}7 \cdot 3\,438{,}33 \cdot 10^3} = 5\,044{,}17 \text{ m/s}$$

Movimiento de los satélites

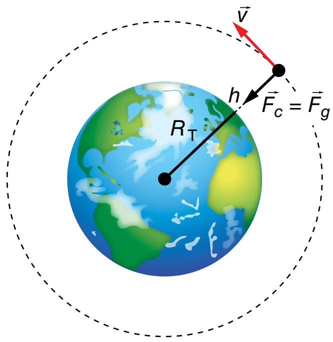
19 Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra a 3,6 · 10⁷ m de su superficie. Calcula:

a) La velocidad y la aceleración del satélite.

b) El período de rotación del satélite alrededor de la Tierra, expresado en días. ¿Qué nombre reciben los satélites de este tipo?

Datos: $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

a) Si el satélite gira alrededor de la Tierra, está sometido a una fuerza centrípeta, que es la fuerza de atracción gravitatoria. Igualando sus respectivas expresiones:



$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

siendo $r = R_T + h$.

Sustituyendo datos, se obtiene el valor de la velocidad del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{(6{,}38 + 36) \cdot 10^6}} = 3\,065{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Aunque el módulo de su velocidad es constante, el satélite cambia su dirección; luego, tiene aceleración normal, a_n, que vale:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \rightarrow a_n = \frac{(3\,065{,}3)^2}{42{,}38 \cdot 10^6} = 0{,}22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Como se desplaza con velocidad constante (en módulo), tenemos:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 42{,}38 \cdot 10^6 \text{ m}}{3\,065{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 86\,870 \text{ s} = 1 \text{ día}$$

Los satélites cuyo período es 1 día se denominan geosíncronos.

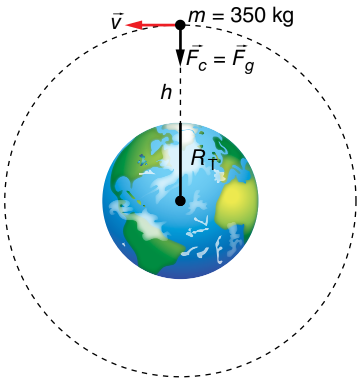
20 Un satélite artificial de 350 kg se encuentra en una órbita circular de 15 000 km de radio alrededor de la Tierra. Si R_T = 6 370 km, determina:

a) El peso del satélite estando en esta órbita.

b) Su período de rotación alrededor de la Tierra.

c) La energía total del satélite en esta órbita.

a) El peso del satélite, P, será la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre él; es decir:



$$P = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

siendo $r = 15\,000 \text{ km} = R_T + h$.

Como no tenemos datos de G y M_T, podemos expresar el producto $G \cdot M_T$ en función de datos conocidos. Para ello, consideramos un punto de la superficie de la Tierra, donde:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = m \cdot g_0 \quad \rightarrow \quad G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Por tanto:

$$P = m \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2} = m \cdot g_0 \cdot \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$P = 350 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{6\,370 \text{ km}}{15\,000 \text{ km}}\right)^2 = 618{,}6 \text{ N}$$

b) Al ser el módulo de la velocidad constante, tenemos:

$$v = \frac{s}{t} \quad \rightarrow \quad v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

La velocidad orbital del satélite la calculamos igualando la fuerza centrípeta con la fuerza de atracción gravitatoria:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{r}}$$

Sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$v = 6\,370 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{15\,000 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 5\,149 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Finalmente, de acuerdo con [1], el período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 15\,000 \cdot 10^3 \text{ m}}{5\,149 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 18\,304 \text{ s (5 h 5 min 4 s)}$$

c) La energía total del satélite, E_m, será la suma de sus energías cinética y potencial; es decir:

$$E_m = E_c + E_p \quad \rightarrow \quad E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r}\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r} \quad ; \quad G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Resulta:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r} - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{r}$$

Al sustituir datos numéricos se obtiene:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6\,370 \cdot 10^3\ \text{m})^2 \cdot 350\ \text{kg}}{15\,000 \cdot 10^3} = -4{,}64 \cdot 10^9\ \text{J}$$

21 **Un satélite se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra. Su masa es de 10 000 kg, y su velocidad, de 4,2 km/s. Calcula:**

a) El radio de la órbita.

b) Lo que tarda en dar diez vueltas a la Tierra.

c) La energía potencial gravitatoria del satélite.

Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}; M_T = 5,98 · 10^{24} kg; R_T = 6 370 km.

FE DE ERRATAS DE LA PRIMERA EDICIÓN DEL LIBRO DEL ALUMNADO: La masa del satélite es de 10 000 kg, y su velocidad, de 4,2 km/s.

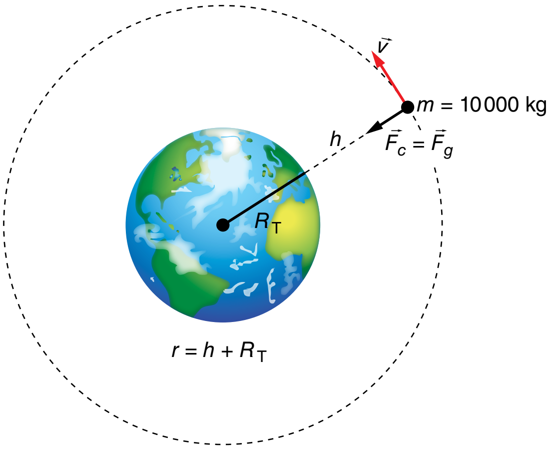
a) Si el satélite describe una trayectoria circular, está sometido a una fuerza centrípeta, que es la fuerza de atracción gravitatoria. Por tanto, se cumplirá:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

Despejando el radio de la órbita, r, y sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} \rightarrow r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(4{,}2 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}$$

$$r = 2{,}26 \cdot 10^7\ \text{m} = 22\,600\ \text{km}$$



b) El satélite se desplaza en su órbita con velocidad constante en módulo; luego:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v}$$

Como cada órbita mide 2 · π · r, sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$t = 10 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 2{,}26 \cdot 10^7\ \text{m}}{4\,200\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 338\,095\ \text{s} = 3\ \text{d}\ 21\ \text{h}\ 54\ \text{min}\ 55\ \text{s}$$

c) La energía potencial gravitatoria del satélite será:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

por lo que al sustituir datos numéricos nos queda:

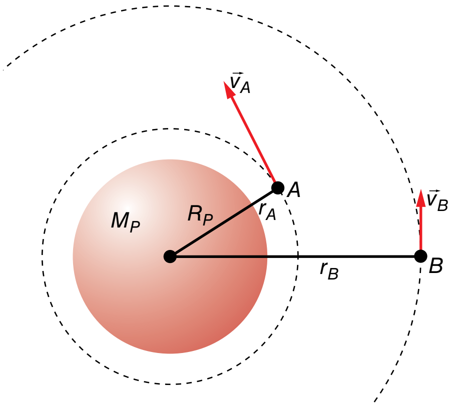
$$E_p = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 10\,000\ \text{kg}}{2{,}26 \cdot 10^7\ \text{m}} = -1{,}76 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

Página 64

22 **Dos satélites, *A* y *B*, giran alrededor de un planeta siguiendo órbitas circulares de radios $2 \cdot 10^8$ m y $8 \cdot 10^8$ m, respectivamente. Calcula la relación entre sus velocidades (tangenciales) respectivas.**

Cada satélite describe una órbita circular, luego está sometido a una fuerza centrípeta, que es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_p \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_p}{r}$$



Por tanto, para cada satélite, tenemos:

$$v_A^2 = \frac{G \cdot M_p}{r_A}$$

$$v_B^2 = \frac{G \cdot M_p}{r_B}$$

La relación entre ambas velocidades resulta:

$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{\dfrac{G \cdot M_p}{r_A}}{\dfrac{G \cdot M_p}{r_B}} = \frac{r_B}{r_A} = \quad \rightarrow \quad \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{8 \cdot 10^8 \text{ m}}{2 \cdot 10^8 \text{ m}} = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = 2$$

23 **Se consideran dos satélites, uno en órbita circular alrededor de Marte, y otro alrededor de la Tierra:**

a) ¿Cuál es la relación entre los radios de las órbitas si ambos tienen el mismo período?

b) Supongamos ahora que los dos satélites están en órbitas del mismo radio, cada uno alrededor de su planeta. Calcula la relación entre los momentos angulares orbitales correspondientes, si las masas de los satélites son iguales.

Dato: la relación entre las masas de los planetas es: $M_M = 0,11 \cdot M_T$.

a) Si un cuerpo describe una trayectoria circular es porque está sometido a una fuerza centrípeta, que en este caso es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

- Para el satélite de Marte, podemos escribir:

$$v_M = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_M}{T} \quad \rightarrow \quad v_M^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_M^2}{T^2} \; [1] \quad ; \quad v_M^2 = \frac{G \cdot M_M}{r_M} \; [2]$$

$$[1] = [2] \quad \rightarrow \quad \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_M^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_M}{r_M} \quad \rightarrow \quad r_M^3 = \frac{G \cdot M_M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

- Del mismo modo, para el satélite de la Tierra:

$$r_M^3 = \frac{G \cdot M_M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Teniendo en cuenta que $M_M = 0,11 \cdot M_T$, la relación entre los radios de las órbitas es:

$$\left(\frac{r_M}{r_T}\right)^3 = \frac{\dfrac{G \cdot 0,11 \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}{\dfrac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = 0,11 \quad \rightarrow \quad r_M = r_T \cdot \sqrt[3]{0,11} = 0,479 \cdot r_T$$

Es decir, el radio de la órbita del satélite que gira alrededor de Marte es menor que el radio de la órbita del satélite que gira alrededor de la Tierra; en concreto, 0,479 veces.

b) A partir de la definición de momento angular, $\vec{L}$, y teniendo en cuenta que las órbitas son circulares, podemos escribir:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot sen\, 90° = m \cdot r \cdot v$$

ya que en una órbita circular los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Luego, como $r_M = r_T = r$, nos queda:

- Para el satélite de Marte:

$$L_M = m \cdot r \cdot v_M \;\rightarrow\; L_M = m \cdot r \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}}$$

- Y para el satélite de la Tierra:

$$L_T = m \cdot r \cdot v_T \;\rightarrow\; L_T = m \cdot r \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Elevando al cuadrado L_M y L_T y teniendo en cuenta que $M_M = 0{,}11 \cdot M_T$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} L_M^2 &= m^2 \cdot r^2 \cdot \frac{G \cdot 0{,}11 \cdot M_T}{r} \\ L_T^2 &= m^2 \cdot r^2 \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{L_M}{L_T}\right)^2 = \frac{m^2 \cdot r^2 \cdot G \cdot 0{,}11 \cdot M_T}{m^2 \cdot r^2 \cdot G \cdot M_T} = 0{,}11$$

Es decir:

$$\frac{L_M}{L_T} = \sqrt{0{,}11} = 0{,}332$$

24 **La velocidad de un satélite, de 500 kg de masa, en órbita alrededor de la Tierra, es de 7,70 km/s:**

a) Determina el radio de la órbita.

b) Si el satélite pasa a girar a una órbita superior cuyo radio es el doble del de la anterior, ¿cuál es la nueva velocidad orbital?

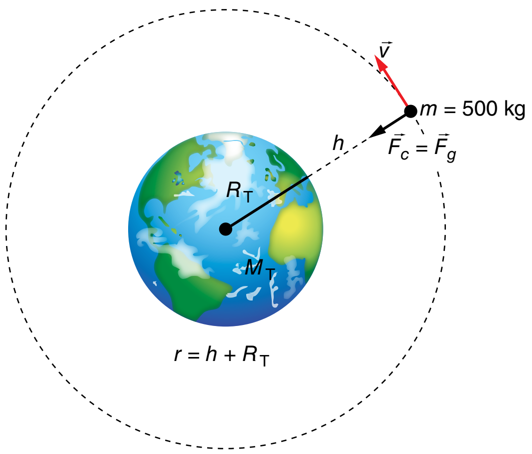
c) ¿Qué energía suplementaria hay que comunicarle al satélite para que cambie de órbita?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_{Tierra} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

FE DE ERRATAS DE LA PRIMERA EDICIÓN DEL LIBRO DEL ALUMNADO: La masa del satélite debe ser de 500 kg, y su velocidad, de 7,70 km/s.

a) Cualquier cuerpo que orbite alrededor de la Tierra está sometido a una fuerza centrípeta. En este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria; luego:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \;\rightarrow\; v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$



Despejando r y sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(7{,}70 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = 6{,}73 \cdot 10^6\ \text{m}$$

b) Ahora tenemos que, en la segunda órbita, r_2, el radio es el doble, $r_2 = 2 \cdot r_1$; luego:

- En la primera órbita:

$$v_1^2 = \frac{G \cdot M_T}{r_1}$$

- En la segunda órbita:

$$v_2^2 = \frac{G \cdot M_T}{r_2}$$

Por tanto:

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{G \cdot M_T / r_2}{G \cdot M_T / r_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{r_1}{2 \cdot r_1} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_1$$

Al sustituir datos numéricos, se obtiene:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7\,700\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 5\,445\ \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Como la energía mecánica, E_m, es la suma de las energías potencial y cinética, será:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

Por tanto, la energía suplementaria que hay que comunicarle al satélite para que cambie de órbita será la diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas; es decir:

$$\Delta E_m = E_m\ (2.^a\ \text{órbita}) - E_m\ (1.^a\ \text{órbita})$$

$$\Delta E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_1} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Pero $r_2 = 2 \cdot r_1$; luego:

$$\Delta E_m = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2 \cdot r_1}\right) = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{4 \cdot r_1}$$

Sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$\Delta E_m = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 500\ \text{kg}}{4 \cdot 6{,}73 \cdot 10^6\ \text{m}} = 7{,}41 \cdot 10^9\ \text{J}$$

25 **Un módulo lunar de 3 000 kg de masa está en órbita circular a una altura de 2000 km por encima de la superficie de la Luna:**

a) ¿Cuál es la velocidad y la energía total del módulo en su órbita?

b) ¿Cuánto variará la energía total si el módulo sube a una órbita circular de 4000 km sobre la superficie de la Luna?

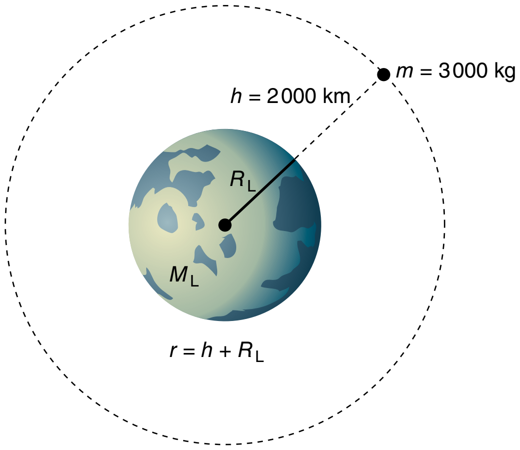
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_{Luna} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; $R_{Luna} = 1\,740$ km.

a) Si describe un movimiento circular, el módulo lunar está sometido a una fuerza centrípeta que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Por tanto:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_L}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_L}{r}}$$

Teniendo en cuenta que $r = 1\,740$ km + $2\,000$ km = $3\,740$ km, al sustituir datos, nos queda:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}}{3\,740 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}} = 1145{,}7\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$



La energía total será la suma de la energía cinética más la energía potencial:

$$E_m = E_c + E_p \quad \rightarrow \quad E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-G \cdot \frac{M_L \cdot m}{r}\right)$$

Y como:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_L}{r}$$

Resulta:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M_L}{r} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r}$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg} \cdot 3\,000\ \mathrm{kg}}{3\,740 \cdot 10^3\ \mathrm{m}} = -1{,}97 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

b) Como la energía mecánica vale:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r}$$

Al pasar el módulo lunar de una órbita de radio r_1 = $2\,000$ km + $1\,740$ km = $3\,740$ km a otra de radio r_2 = $1\,740$ km + $4\,000$ km = $5\,740$ km, la variación de energía será:

$$\Delta E_m = E_m\,(r_2) - E_m\,(r_1) \quad \rightarrow \quad \Delta E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot G \cdot M_L \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Sustituyendo datos numéricos, se obtiene:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg} \cdot 3\,000\ \mathrm{kg}}{10^3\ \mathrm{m}} \cdot \left(\frac{1}{3\,740} \cdot \frac{1}{5\,740}\right)$$

$$\Delta E_m = 6{,}86 \cdot 10^8\ \mathrm{J}$$

El signo positivo nos indica que la energía del módulo lunar ha aumentado, hecho que ocurre a medida que el cuerpo se aleja del origen del campo gravitatorio.

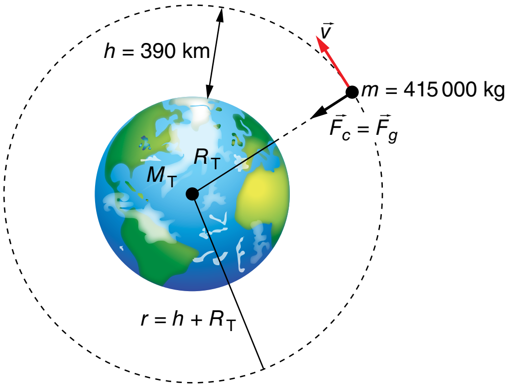
26 **La Estación Espacial Internacional (ISS) describe una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra a una altura *h* = 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa *m* = 415 toneladas:**

a) Calcula su período de rotación, en minutos, así como la velocidad con la que se desplaza.

b) ¿Qué energía se necesitaría para llevarla desde su órbita actual a otra al doble de altura? ¿Cuál sería el período de rotación en esta nueva órbita?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,370$ km.

a) La órbita circular que describe la ISS es debido a la existencia de una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:



$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(390 + 6\,370) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7\,681{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El período de rotación, *T*, es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa a la Tierra en esa órbita. Como el módulo de su velocidad es constante, será:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 + 390) \cdot 10^3\ \text{m}}{7\,681{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 5\,530\ \text{s} = 92{,}17\ \text{min}$$

b) Si ahora la altura sobre la superficie de la Tierra es el doble, tendremos que:

$$r = 6\,370\ \text{km} + 2 \cdot 390\ \text{km} = 7\,150\ \text{km}$$

Su velocidad será:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{7\,150 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7\,469\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

y el período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7\,150 \cdot 10^3\ \text{m}}{7\,469\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 6\,015\ \text{s}$$

Nota: A este mismo valor podemos llegar aplicando la tercera ley de Kepler.

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. Se puede calcular a partir de la expresión:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Por tanto, la energía necesaria para llevar la ISS a la nueva órbita sería:

$$\Delta E_m = E_m(r_2) - E_m(r_1) = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Sustituyendo datos numéricos (r_1 = 6 760 km; r_2 = 7 150 km):

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 415 \cdot 10^3\ \text{kg}}{10^3\ \text{m}} \cdot \left(\frac{1}{6\,760} - \frac{1}{7\,150}\right)$$

$$\Delta E_m = 6{,}68 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

27 **Un satélite artificial de 500 kg de masa se mueve alrededor de un planeta, describiendo una órbita circular con un período de 42,47 horas y un radio de 419 000 km. Calcula:**

a) La fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite.

b) La energía cinética, la energía potencial y la energía total del satélite en su órbita.

c) Si, por cualquier causa, el satélite duplica repentinamente su velocidad sin cambiar la dirección, ¿se alejará indefinidamente del planeta?

a) Si el satélite describe una órbita circular, está sometido a una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria, F_g, luego:

$$F_g = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Por otro lado, el módulo de la velocidad del satélite es constante; entonces:

$$v = \frac{s}{t} \quad \rightarrow \quad v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Por tanto, nos quedará:

$$F_g = m \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$$

$$F_g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 500\ \text{kg} \cdot 419\,000 \cdot 10^3\ \text{m}}{(42{,}47 \cdot 3\,600\ \text{s})^2} = 353{,}8\ \text{N}$$

b) La energía cinética será:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r^2}{T^2}$$

$$E_c = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 500\ \text{kg} \cdot (419\,000 \cdot 10^3\ \text{m})^2}{(42{,}47 \cdot 3\,600\ \text{s})^2} = 7{,}41 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

y la energía potencial:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_p \cdot m}{r}$$

Como no tenemos datos de G y de M_p (la masa del planeta) y sabemos que la velocidad orbital es:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_p}{r} \quad \rightarrow \quad G \cdot M_p = v^2 \cdot r$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} E_p = -\dfrac{v^2 \cdot r \cdot m}{r} = -v^2 \cdot m \\ E_c = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \rightarrow \quad m \cdot v^2 = 2 \cdot E_c \end{array}\right\} \rightarrow \ E_p = -2 \cdot E_c$$

El valor de la energía potencial es, entonces:

$$E_p = -2 \cdot 7{,}41 \cdot 10^{10}\ \text{J} = -14{,}82 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

La energía total será la suma de las energías cinética y potencial, luego:

$$E_m = 7{,}41 \cdot 10^{10}\ \text{J} + (-14{,}82 \cdot 10^{10}\ \text{J}) = -7{,}41 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Nota: Este resultado ya lo hemos visto en otros problemas; la energía total es la mitad del valor de la energía potencial gravitatoria.

c) Como acabamos de ver, en la órbita circular se cumple la siguiente relación entre las energías cinética y potencial del satélite:

$$E_p = -2 \cdot E_c$$

Si el satélite duplica súbitamente su velocidad, la energía potencial gravitatoria se mantiene inicialmente constante, $E'_p = E_p$, pues solo depende de la distancia del satélite al centro del planeta, pero su nueva energía cinética, E'_c, es cuatro veces mayor que la inicial:

$$E'_c = 4 \cdot E_c$$

Por tanto, ahora la energía mecánica del satélite es positiva:

$$E'_m = E'_p + E'_c = -2 \cdot E_c + 4 \cdot E_c = 2 \cdot E_c > 0$$

En consecuencia, el satélite ya no está ligado a la gravedad del planeta, y como la dirección del movimiento, inicialmente tangente a la trayectoria circular de la órbita, no es una trayectoria de colisión con el planeta, el satélite se alejará indefinidamente de él.

28 La masa de la Luna es de 7,35 · 10^{22} kg, y la de la Tierra, de 5,98 · 10^{24} kg. La distancia media de la Tierra a la Luna es de 3,84 · 10^8 m. Calcula:

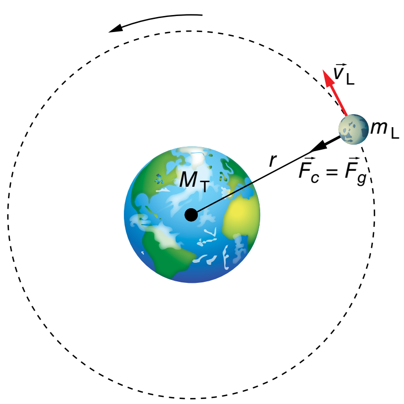
a) El período de giro de la Luna alrededor de la Tierra y su energía cinética.

b) ¿A qué distancia de la Tierra se cancela la fuerza neta ejercida por la Luna y la Tierra sobre un cuerpo allí situado?

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m² · kg⁻².

a) Si la Luna gira alrededor de la Tierra, está sometida a una fuerza centrípeta que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:

$$m \cdot \frac{v_L^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_L}{r^2} \quad \rightarrow \quad v_L^2 = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \quad \rightarrow \quad v_L = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$



Sustituyendo datos numéricos, la velocidad de la Luna resulta:

$$v_L = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{384 \cdot 10^8\ \text{m}}} = 1019{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

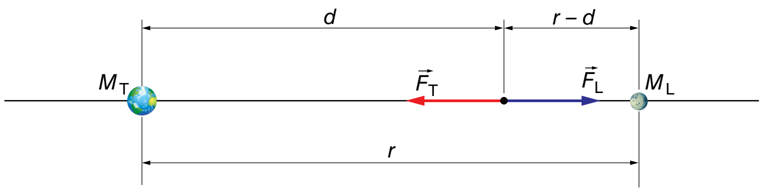
A partir del resultado obtenido y de la siguiente relación, obtenemos el período de giro de la Luna alrededor de la Tierra:

$$v_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}}{1019{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 2{,}367 \cdot 10^6\ \text{s} = 27{,}4\ \text{días}$$

Su energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot (1019{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 3{,}82 \cdot 10^{28}\ \text{J}$$

b) El siguiente esquema muestra la situación física descrita por el enunciado:



Donde F_T es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el cuerpo, y F_L, la fuerza de atracción que ejerce la Luna sobre el cuerpo.

En un determinado punto, situado a una distancia d de la Tierra, el módulo de F_T y F_L será igual; por tanto:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{d^2} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(r - d^2)} \rightarrow \frac{M_T}{M_L} = \left(\frac{d}{r - d}\right)^2$$

Luego:

$$\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}} = \left(\frac{d}{r - d}\right)^2 \rightarrow \frac{d}{r - d} = 9{,}02$$

Por tanto:

$$d = 9{,}02 \cdot r - 9{,}02 \cdot d \rightarrow 10{,}02 \cdot d = 9{,}02 \cdot r \rightarrow d = 0{,}9 \cdot r$$

siendo r la distancia que separa la Tierra de la Luna. Por tanto:

$$d = 0{,}9 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m} = 3{,}456 \cdot 10^8\ \text{m}$$

29 ¿Cómo es el trabajo exterior no gravitatorio que debemos realizar sobre un satélite para que pase a una órbita de menor tamaño? ¿Es preciso acelerar o frenar al satélite?

La energía mecánica de un satélite en órbita circular vale:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Por tanto, cuanto menor es el radio de la órbita, menor energía mecánica tiene el satélite (ten en cuenta el signo menos de la expresión de la energía mecánica).

En consecuencia, al reducir el radio de la órbita, la variación de la energía mecánica es negativa, y el trabajo exterior también lo será.

Para que pase a la órbita interna, es preciso frenar el satélite para reducir su energía cinética y, por tanto, su energía mecánica.

En la práctica, el proceso se llevaría a cabo en dos etapas, mediante una órbita de transferencia (véase la página 50 del libro del alumnado).

30 **Se lleva un cuerpo, mediante un cohete, hasta una altura de 630 km sobre el nivel del mar:**

a) ¿Cuál es la intensidad del campo gravitatorio terrestre a esa altura?

b) ¿Con qué velocidad debería lanzarse este cuerpo (colocado a esa altura) en una dirección perpendicular al radio de la Tierra de tal forma que describiese una órbita circular?

c) ¿Cuál sería el período de revolución del cuerpo alrededor de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) El módulo de la intensidad del campo gravitatorio se calcula mediante la expresión:

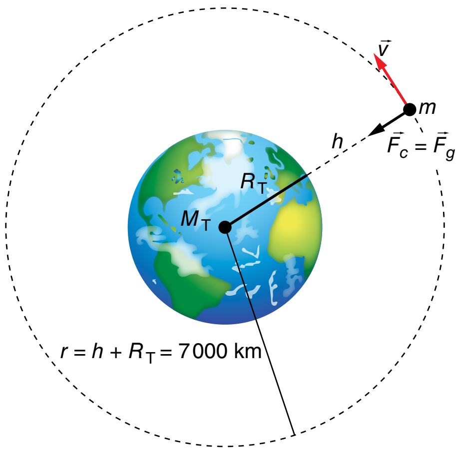
$$g = G \cdot \frac{M^2}{r^2}$$

por lo que, al sustituir datos, nos queda:

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(7\,000 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2} = 8{,}14\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$$

La expresión del vector campo gravitatorio será:

$$\vec{g} = -8{,}14 \cdot \vec{u}_r\ \mathrm{N/kg}$$



b) Para que describa una órbita circular en ese punto, debe igualarse la fuerza centrípeta con la fuerza de atracción gravitatoria (o el peso). Es decir:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \quad \rightarrow \quad v^2 = g \cdot r \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{g \cdot r}$$

Sustituyendo datos numéricos (teniendo en cuenta que $r = 6{,}37 \cdot 10^6 + 630 \cdot 10^3 = 7000 \cdot 10^3$ m), tenemos:

$$v = \sqrt{8{,}14\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 7\,000 \cdot 10^3\ \mathrm{m}} = 7548{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

c) Como el cuerpo se mueve en la órbita con velocidad constante (en módulo), tendremos que:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

Sustituyendo datos numéricos, nos queda:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7\,000 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{7\,548{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 5\,827\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 37\ \mathrm{min}\ 7\ \mathrm{s}$$

31 **Cada uno de los 24 satélites del sistema de posicionamiento GPS tiene una masa de 840 kg y se encuentra en una órbita circular de 26570 km de radio. Determina, para uno de estos satélites:**

a) Su período de rotación alrededor de la Tierra.

b) Su peso y sus energías cinética y potencial en su órbita.

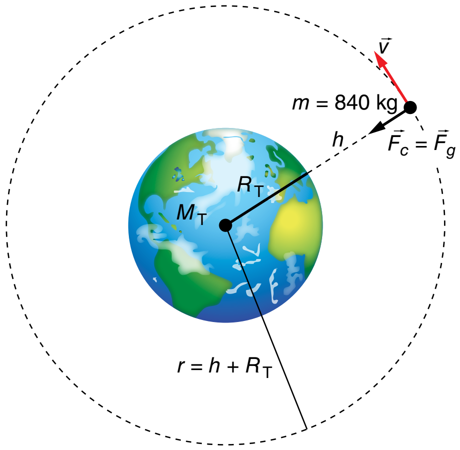
a) Si el satélite describe una órbita circular, está sometido a una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Es decir:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

Por otro lado, al desplazarse con velocidad constante (módulo), podemos escribir:

$$v = \frac{s}{t} \quad \rightarrow \quad v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$



Sustituyendo el valor de v, nos queda:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}}$$

Sustituyendo datos numéricos, el período de rotación resulta:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (26\,570 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 43\,088 \text{ s} \simeq 12 \text{ h}$$

b) El peso de cada satélite será $P = m \cdot g$, es decir:

$$P = F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Luego:

$$P = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 840 \text{ kg}}{(26\,570 \cdot 10^3 \text{ m})^2} = 474{,}6 \text{ N}$$

La energía cinética de cada satélite valdrá:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 840 \text{ kg} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{26\,570 \cdot 10^3 \text{ m}} = 6{,}30 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Y su energía potencial en esa órbita:

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} \rightarrow E_p = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 840 \text{ kg}}{26\,570 \cdot 10^3 \text{ m}} = -1{,}26 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

32 **Un satélite artificial de 300 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular (R = 36 378 km):**

a) Calcula la velocidad del satélite en la órbita.

b) Obtén la energía total del satélite en la órbita.

Datos: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $g_0 = 9{,}80$ m/s².

a) Si el satélite lleva una trayectoria circular, es porque está sometido a una fuerza centrípeta, que, en este caso, es la fuerza de atracción gravitatoria. Por tanto:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_T}{R}$$

Como no tenemos datos de G y M_T, en un punto de la superficie de la Tierra se cumplirá que:

$$m \cdot g_0 = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} \quad \rightarrow \quad G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Luego:

$$v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R}}$$

Sustituyendo datos numéricos, resulta:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{36\,378 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 3\,306{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La energía del satélite en órbita será la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E_m = E_c + E_p \quad \rightarrow \quad E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R}\right)$$

Es decir:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{R}$$

pero como:

$$v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R}$$

Resulta:

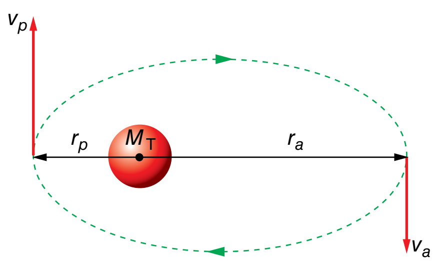
$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{R}$$

Sustituyendo datos numéricos, se obtiene:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot 300 \text{ kg}}{36\,378 \cdot 10^3 \text{ m}} = -1{,}64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

33 Un satélite artificial describe una órbita elíptica con el centro de la Tierra en uno de los focos. Si se conocen las distancias máxima y mínima del satélite al centro de la Tierra (apogeo y perigeo), r_a y r_p, respectivamente, plantea razonadamente, sin resolverlas, las ecuaciones necesarias para determinar las velocidades orbitales del satélite en esos puntos, v_a y v_p.

Las magnitudes mencionadas en el enunciado del problema se muestran en la siguiente gráfica:



En toda órbita descrita por un cuerpo dentro de un campo gravitatorio, el momento angular y la energía mecánica se mantienen constantes. Por tanto, para el apogeo y el perigeo se cumplirá:

$$L_a = L_p \quad \rightarrow \quad m \cdot r_a \cdot v_a = m \cdot r_p \cdot v_p \quad \rightarrow \quad r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p \qquad [1]$$

$$E_{m_a} = E_{m_p} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_a^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_a} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_p} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{v_a^2}{2} - \frac{G \cdot M_T}{r_a} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{G \cdot M_T}{r_p} \qquad [2]$$

Al resolver el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], por ejemplo, despejando v_p de [1] y sustituyéndolo en [2], tenemos:

$$v_p = \frac{r_a \cdot v_a}{r_p} \quad \rightarrow \quad \frac{v_a^2}{2} - \frac{r_a^2 \cdot v_a^2}{r_p^2} = G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)$$

$$v_a^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{r_a^2}{r_p^2}\right) = G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)$$

$$v_a^2 \cdot \left(\frac{r_p^2 - r_a^2}{2 \cdot r_p^2}\right) = G \cdot M_T \cdot \left(\frac{r_p - r_a}{r_a \cdot r_p}\right) \quad \rightarrow \quad v_a^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot 2 \cdot r_p}{r_a \cdot (r_p + r_a)}$$

Teniendo ahora en cuenta que el semieje mayor de la elipse, *a*, cumple la siguiente relación:

$$2 \cdot a = r_p + r_a \quad \rightarrow \quad r_p = 2 \cdot a - r_a$$

Se obtiene, finalmente:

$$v_a^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot 2 \cdot (2 \cdot a - r_a)}{r_a \cdot 2 \cdot a} \quad \rightarrow \quad v_a = \sqrt{G \cdot M_T \cdot \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)}$$

Del mismo modo, se obtiene, para el perigeo:

$$v_p = \sqrt{G \cdot M_T \cdot \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)}$$

Observa que, a partir del resultado obtenido, podemos comprobar la constancia de la energía mecánica en el perigeo y el apogeo de los satélites que se mueven en órbita elíptica; si calculamos, por ejemplo, la energía mecánica en el perigeo:

$$E_{m_p} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r_p} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right) - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_p}$$

$$E_{m_p} = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_p} - \frac{2}{2 \cdot a} - \frac{1}{r_p}\right) = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot a} = E_m = \text{cte}$$

Si asumimos desde el inicio que la energía mecánica responde a la expresión anterior, la resolución de esta actividad se simplifica.

Como la energía mecánica es suma de las energías cinética y potencial, en el perigeo y el apogeo podemos calcular v_p y v_a a partir de las respectivas energías cinéticas:

$$E_c = E_m - E_p$$

En concreto:

$$E_{c_p} = E_{m_p} - E_{p_p} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{a} - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_p}\right)$$

Para el perigeo queda:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p^2 = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2 \cdot a}\right) \quad \rightarrow \quad v_p = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)}$$

Y para el apogeo será:

$$v_a = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a}\right)}$$

34 **Explica por qué es favorable instalar cerca del ecuador las bases de lanzamiento espacial. ¿En qué dirección deberían lanzarse los cohetes?**

A causa de la rotación terrestre, todos los cuerpos de su superficie están dotados de una cierta velocidad, que es máxima en el ecuador. Esa velocidad inicial o previa reduce la energía que deben aportar los motores del cohete al satélite.

Para aprovechar al máximo esa velocidad previa, el lanzamiento debe producirse en el mismo sentido que gira la Tierra, de oeste a este.