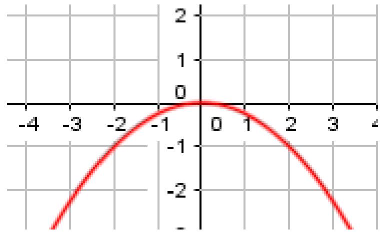
UNIDAD 10: Funciones algebraicas y trascendentes

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 194

1. Representa las siguientes parábolas y estudia el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y la concavidad y la convexidad:

a) $y = -\frac{1}{4}x^2$



Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

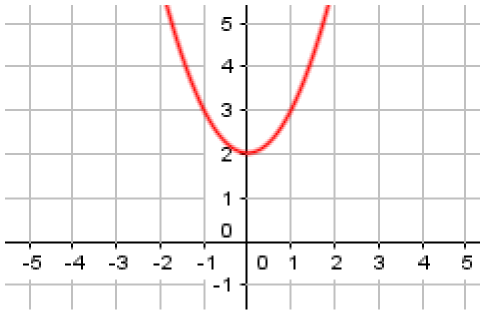
Crecimiento: $(-\infty, 0)$

Decrecimiento: $(0, +\infty)$

Máximo relativo: $(0, 0)$

La función es cóncava.

b) $y = x^2 + 2$



Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

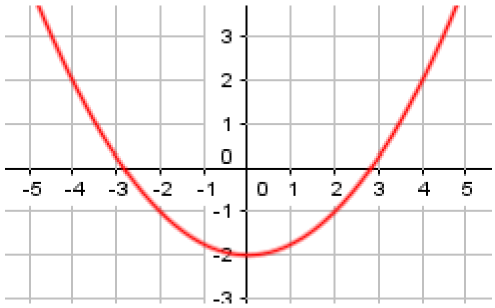
Crecimiento: $(0, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty, 0)$

Mínimo relativo: $(0, 2)$

La función es convexa.

c) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$



Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

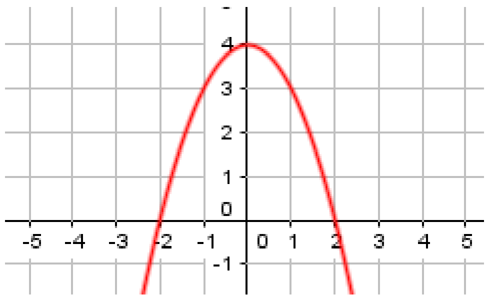
Crecimiento: $(0, +\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty, 0)$

Mínimo relativo: $(0, -2)$

La función es convexa.

d) $y = -x^2 + 4$



Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

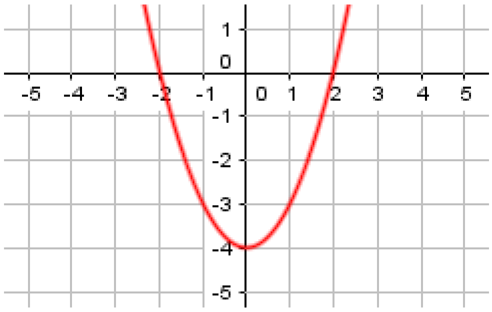
Crecimiento: $(-\infty, 0)$

Decrecimiento: $(0, +\infty)$

Máximo relativo: $(0,4)$

La función es cóncava.

e) $y=x^2-4$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

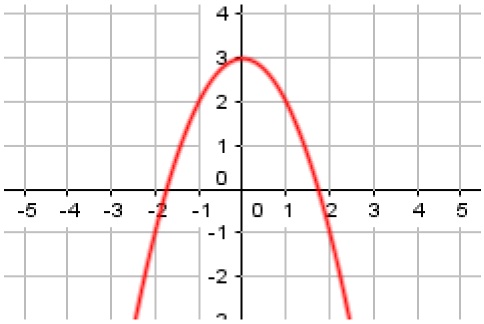
Crecimiento: $(0,+\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty,0)$

Mínimo relativo: $(0,-4)$

La función es convexa.

f) $y=-x^2+3$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

Crecimiento: $(-\infty,0)$

Decrecimiento: $(0,+\infty)$

Máximo relativo: $(0,3)$

La función es cóncava.

2. Determina el punto de corte con los ejes de las parábolas del ejercicio anterior.

a) $y=-\frac{1}{4}x^2$

Punto de corte eje X: $(0,0)$

Punto de corte eje Y: $(0,0)$

b) $y=x^2+2$

Puntos de corte eje X: No tiene

Puntos de corte eje Y: $(0,2)$

c) $y=\frac{1}{4}x^2-2$

Puntos de corte eje X: $\frac{1}{4}x^2-2=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$. Puntos: $(-2\sqrt{2},0);(2\sqrt{2},0)$

Punto de corte eje Y: $(0,-2)$

d) $y=-x^2+4$

Puntos de corte eje X: $-x^2+4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. Puntos: $(-2,0);(2,0)$

Punto de corte eje Y: $(0,4)$

e) $y=x^2-4$

Puntos de corte eje X: $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. Puntos: $(-2,0);(2,0)$

Punto de corte eje Y: $(0,-4)$

f) $y = -x^2 + 3$

Puntos de corte eje X: $-x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Puntos: $(-\sqrt{3}, 0); (\sqrt{3}, 0)$

Puntos de corte eje Y: $(0, 3)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 195

3. Representa gráficamente y estudia las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - x + 2$

Calculamos el vértice de la parábola: $x = \frac{1}{2}$.

Evaluamos la función en el vértice y en uno de los lados.

x	y
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$
1	2
2	4
3	8

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$

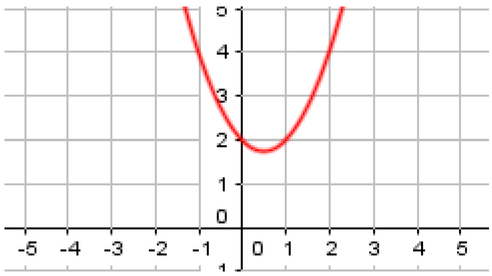
Continua en todo su dominio.

Crecimiento: $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Decrecimiento: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Mínimo relativo: $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$

La función es convexa.
Punto de corte eje X: no tiene.
Punto de corte eje Y: $(0, 2)$



b) $y = -x^2 + 3x$

Calculamos el vértice de la parábola: $x = \frac{3}{2}$.

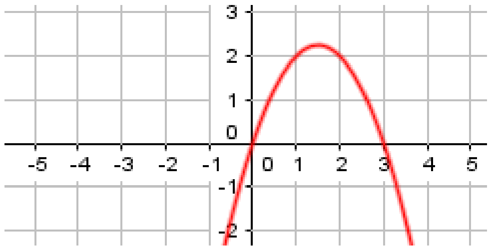
Evaluamos la función en el vértice y en uno de los lados.

x	y
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	2
3	0
4	-4

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

Continua en todo su dominio.



Crecimiento: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

Decrecimiento: $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Máximo relativo: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

La función es cóncava.

Punto de corte eje X: $-x^2+3x=0 \Rightarrow x_1=0 \text{ ó } x_2=3$

Puntos: $(0,0);(0,3)$

Punto de corte eje Y: $(0,0)$

c) $y=2x^2+5x-3$

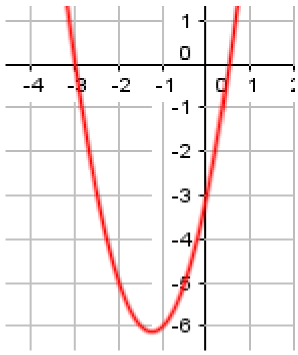
Calculamos el vértice de la parábola: $x=-\frac{5}{4}$.

Evaluamos la función en el vértice y en uno de los lados.

x	y
$-\frac{5}{4}$	$-\frac{49}{8}$
-1	-6
0	-3
1	4

Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f)=\left[-\frac{49}{8}, +\infty\right)$



Continua en todo su dominio.

Crecimiento: $\left(-\frac{5}{4}, +\infty\right)$

Decrecimiento: $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right)$

Mínimo relativo: $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$

La función es convexa.

Punto de corte eje X: $2x^2+5x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2} \text{ ó } x_2=-3$.

Puntos: $(-3,0);\left(\frac{1}{2},0\right)$

Punto de corte eje Y: $(0,-3)$

d) $y=4x^2-4x+1$

Calculamos el vértice de la parábola: $x=\frac{1}{2}$.

Evaluamos la función en el vértice y en uno de los lados.

x	y
$\frac{1}{2}$	0
1	1
2	9
3	25

Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f)=[0,+\infty)$

Continua en todo su dominio.

Crecimiento: $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

Decrecimiento: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

Mínimo relativo: $\left(\frac{1}{2},0\right)$

La función es convexa.

Punto de corte eje X: $4x^2-4x+1=0 \Rightarrow (2x-1)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.Punto: $\left(\frac{1}{2},0\right)$

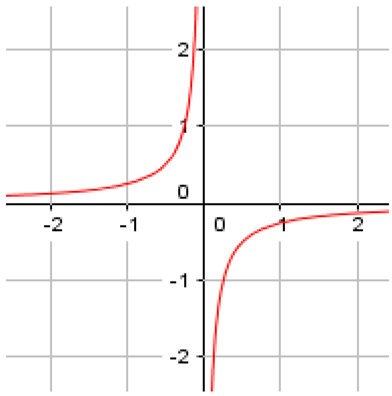
Punto de corte eje Y: $(0,1)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 196

4. Haz una tabla de valores y representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

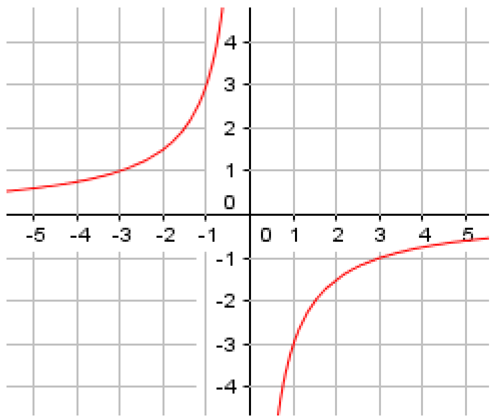
a) $y=\frac{1}{4x}$

x	y
-2	-0,125
-1	-0,25
$-\frac{1}{4}$	-1
$\frac{1}{4}$	1
1	0,25
2	0,125



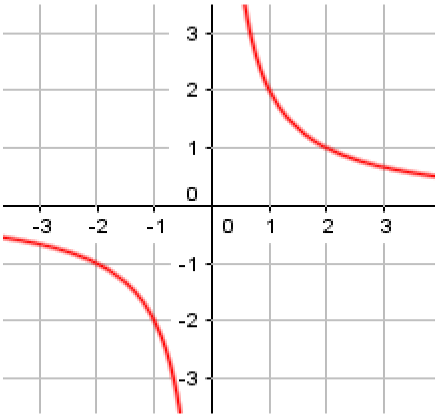
b) $y=\frac{-3}{x}$

x	y
-3	1
-1	3
$-\frac{1}{3}$	9
$\frac{1}{3}$	-9
1	-3
3	-1



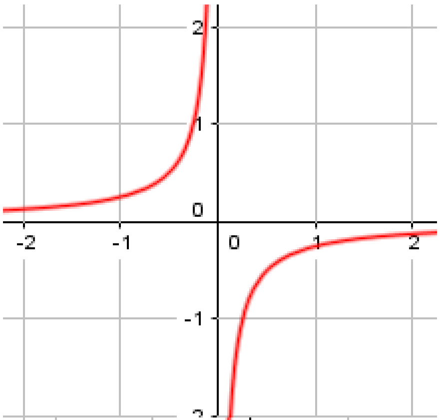
c) $y = \frac{2}{x}$

x	y
-2	-1
-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-4
$\frac{1}{2}$	4
1	2
2	1



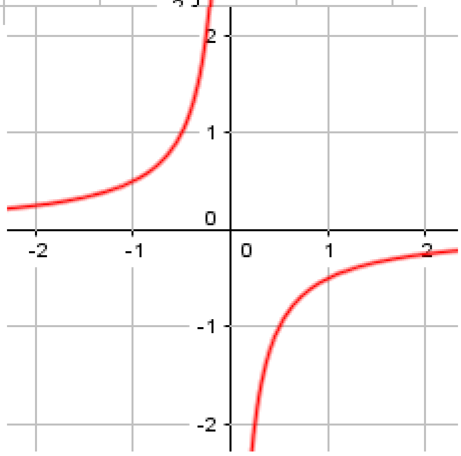
d) $y = -\frac{1}{4x}$

x	y
-2	0,125
-1	0,25
$-\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{4}$	-1
1	-0,25
2	-0,125



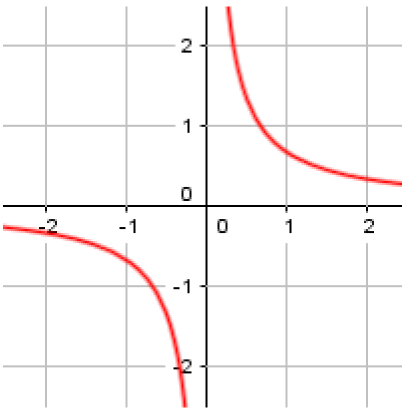
e) $y = -\frac{1}{2x}$

x	y
-2	0,25
-1	0,5
-0,25	2
0,25	-2
1	-0,5
2	-0,25



f) $y = \frac{2}{3x}$

x	y
-2	-0,33
-1	-0,67
-0,25	-2,67
0,25	2,67
1	0,67
2	0,33



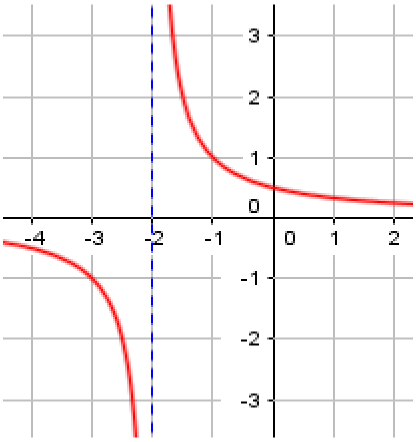
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 197

5. Determina las asíntotas de las siguientes funciones y represéntalas:

a) $y=\dfrac{1}{x+2}$

Asíntota horizontal: $y=0$

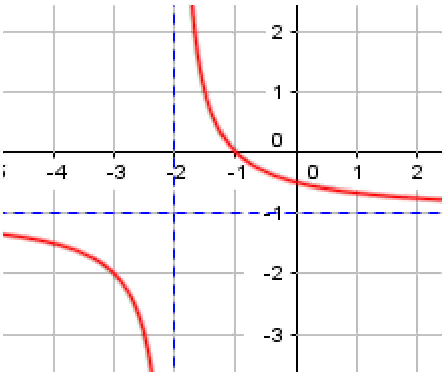
Asíntota vertical: $x=-2$



b) $y=\dfrac{1}{x+2}-1$

Asíntota horizontal: $y=-1$

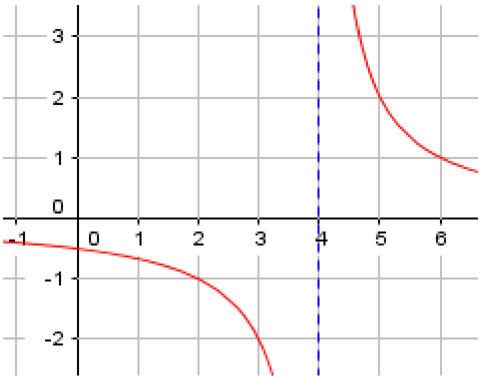
Asíntota vertical: $x=-2$



c) $y=\dfrac{2}{x-4}$

Asíntota horizontal: $y=0$

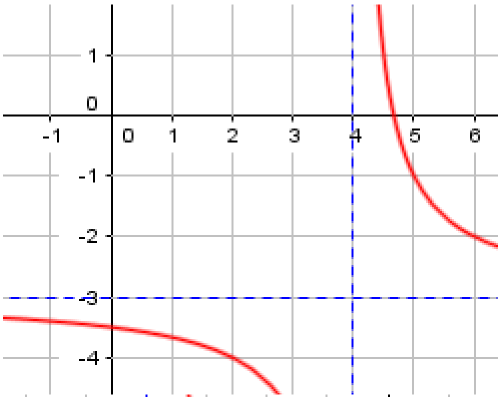
Asíntota vertical: $x=4$



d) $y=\dfrac{2}{x-4}-3$

Asíntota horizontal: $y=-3$

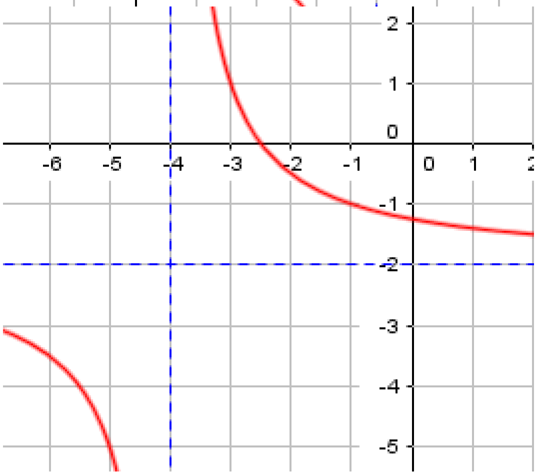
Asíntota vertical: $x=4$



e) $y=\dfrac{3}{x+4}-2$

Asíntota horizontal: $y=-2$

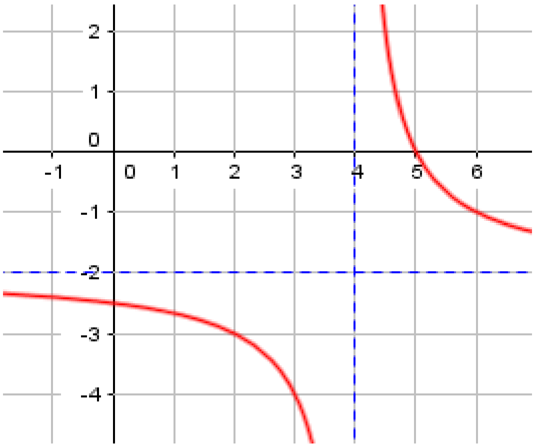
Asíntota vertical: $x=-4$



f) $y=\dfrac{2}{x-4}-2$

Asíntota horizontal: $y=-2$

Asíntota vertical: $x=4$



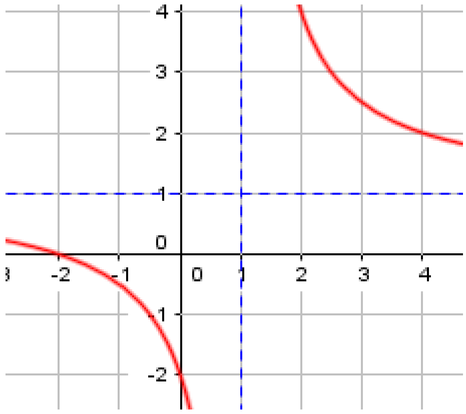
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 198

6. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$

<u>Asíntota vertical</u>: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

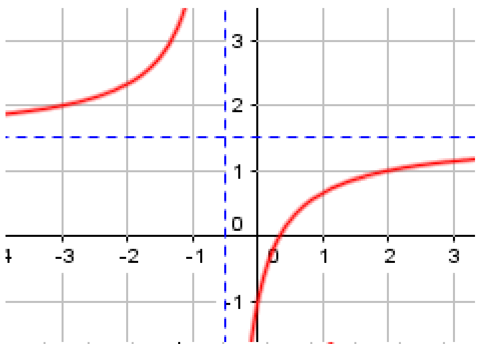
<u>Asíntota horizontal</u>: $y = \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} \Rightarrow y=1$



b) $y = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

<u>Asíntota vertical</u>: $2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

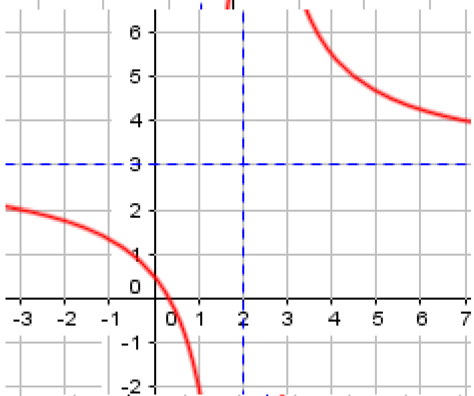
<u>Asíntota horizontal</u>: $y = \dfrac{3x-1}{2x+1} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$



c) $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$

<u>Asíntota vertical</u>: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

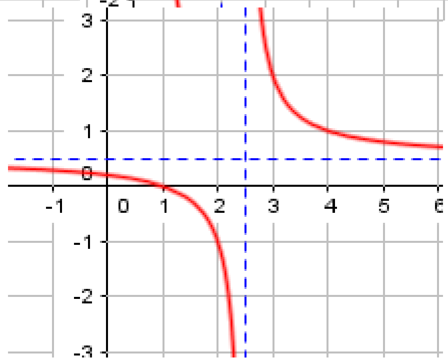
<u>Asíntota horizontal</u>: $y = \dfrac{3x-1}{x-2} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} \Rightarrow y=3$



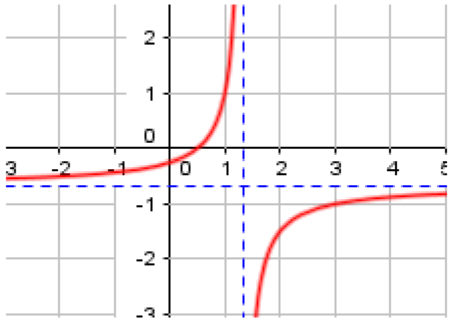
d) $y = \dfrac{x-1}{2x-5}$

<u>Asíntota vertical</u>: $2x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

<u>Asíntota horizontal</u>: $y = \dfrac{x-1}{2x-5} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{2-\frac{5}{x}} \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$



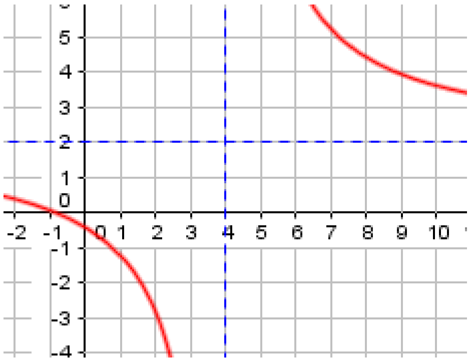
e) $y=\dfrac{-2x+1}{3x-4}$



Asíntota vertical: $3x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Asíntota horizontal: $y=\dfrac{-2x+1}{3x-4}=\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}}{3-\dfrac{4}{x}} \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}$

f) $y=\dfrac{6x+5}{3x-12}$



Asíntota vertical: $3x-12=0 \Rightarrow x=4$

Asíntota horizontal: $y=\dfrac{6x+5}{3x-12}=\dfrac{6+\dfrac{5}{x}}{3-\dfrac{12}{x}} \Rightarrow y=2$

7. Estudia el dominio y la imagen, la continuidad, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la concavidad y la convexidad de las funciones del ejercicio anterior:

a) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Continua y decreciente en todo su dominio.

Cóncava en $(-\infty,1)$ y convexa en $(1,+\infty)$

b) $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Continua y creciente en todo su dominio.

Cóncava en $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ y convexa en $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Continua y decreciente en todo su dominio.

Cóncava en $(-\infty, 2)$ y convexa en $(2, +\infty)$

d) $y = \dfrac{x-1}{2x-5}$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

Imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Continua y decreciente en todo su dominio.

Cóncava en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$ y convexa en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$

e) $y = \dfrac{-2x+1}{3x-4}$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

Imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

Continua y creciente en todo su dominio.

Cóncava en $\left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$ y convexa en $\left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right)$

f) $y = \dfrac{6x+5}{3x-12}$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Continua y decreciente en todo su dominio.

Cóncava en $(-\infty, 4)$ y convexa en $(4, +\infty)$

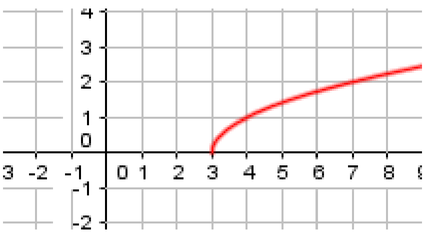
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 199

8. Representa las siguientes funciones con raíces:

a) $y = \sqrt{x-3}$

El dominio es: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow [3, +\infty)$

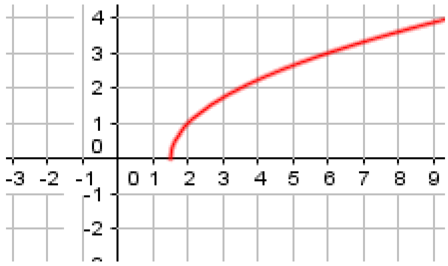
x	y
3	0
4	1
5	1,414
7	2



b) $y=\sqrt{2x-3}$

El dominio es: $2x-3\geq 0 \Rightarrow \left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

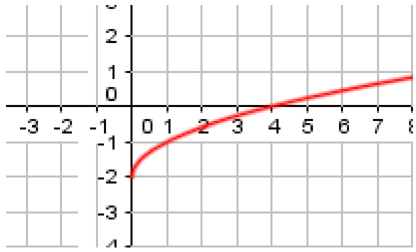
x	y
1,5	0
2	1
3	1,732
4	2,236
5	2,646
6	3



c) $y=\sqrt{x}-2$

El dominio es: $x\geq 0 \Rightarrow [0,+\infty)$

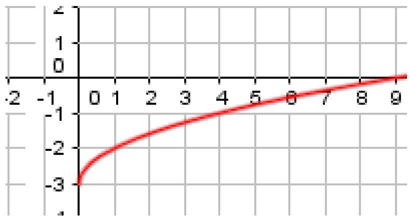
x	y
0	-2
1	-1
2	-0,59
3	-0,27
4	0
5	0,236



d) $y=\sqrt{x}+3$

El dominio es: $x\geq 0 \Rightarrow [0,+\infty)$

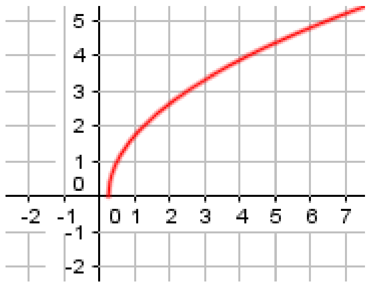
x	y
0	-3
1	-2
2	-1,59
4	-1
5	-0,76



e) $y=\sqrt{4x-1}$

El dominio es: $4x-1\geq 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

x	y
0,25	0
1	1,732
2	2,646
3	3,317
4	3,873
5	4,359

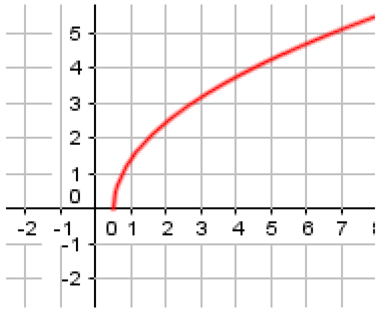


x	y
0,5	0
1	1,414
2	2,449
3	3,162

f) $y=\sqrt{4x-2}$

Dominio: $4x-2\geq 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

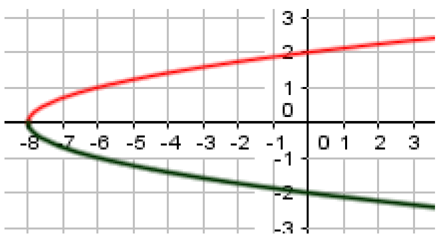
4	3,742
5	4,243



9. Determina la función inversa de la función $y=2x^2-8$ y representa las dos ramas.

La función inversa se obtiene cambiando las variables y despejando:

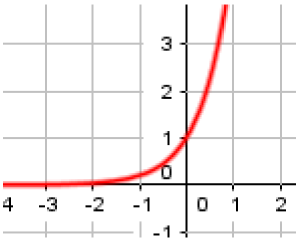
$$x=2y^2-8 \Rightarrow y^2=\frac{x+8}{2} \Rightarrow \begin{cases} y=+\sqrt{\dfrac{x+8}{2}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{x+8}{2}} \end{cases}$$



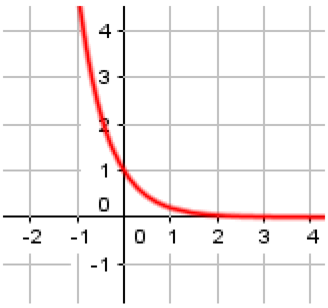
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 200

10. Haz un boceto de las gráficas de las siguientes funciones exponenciales:

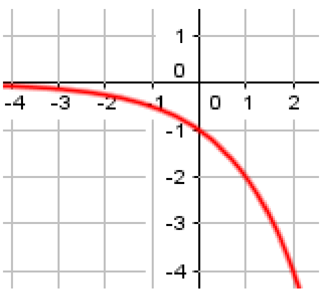
a) $y=5^x$



b) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

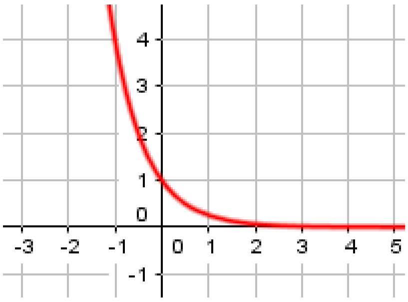


c) $y=-2^x$

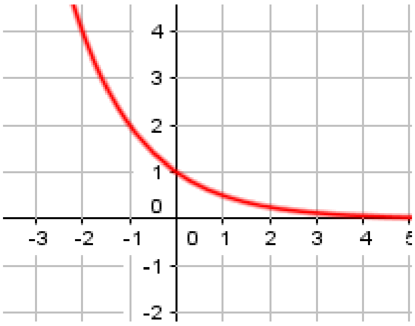


11. Expresa como una función exponencial utilizando las propiedades de potencia y realiza un boceto:

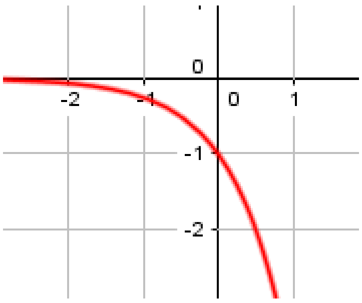
a) $y = 2^{-2x} \Rightarrow y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$



b) $y = \dfrac{1}{2^x} \Rightarrow y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$



c) $y = -2^{2x}$

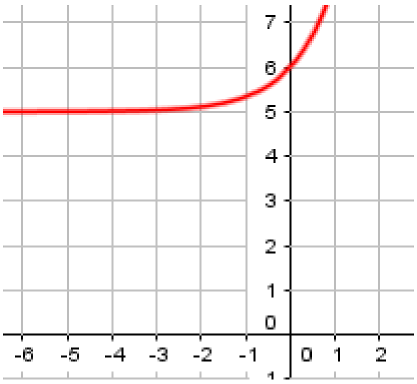


EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 201

12. Representa las siguientes funciones exponenciales utilizando una tabla de valores:

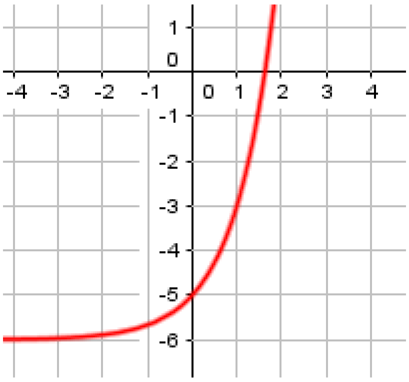
a) $y = 3^x + 5$

x	y
-4	5,012
-2	5,111
0	6
1	8
2	14



b) $y = 3^x - 6$

x	y
-3	-5,96
-1	-5,67
0	-5
1	-3
2	3
3	21

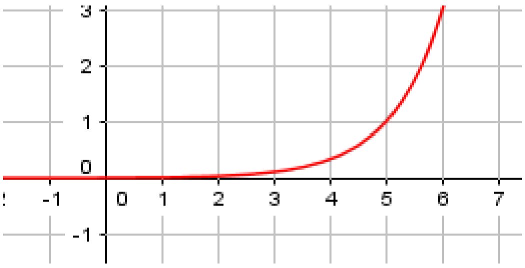


c) $y = 3^{x+4}$

x	y
-8	0,012
-4	1
-3	3
-2	9
-1	27
0	81

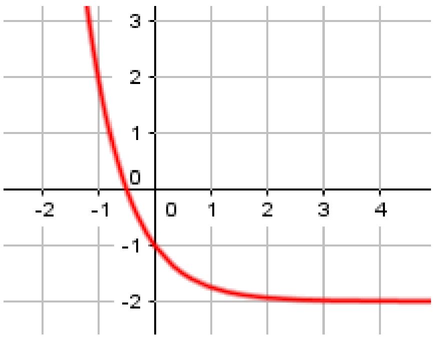
d) $y = 3^{x-5}$

x	y
-1	0,001
0	0,004
2	0,037
5	1
6	3
7	9



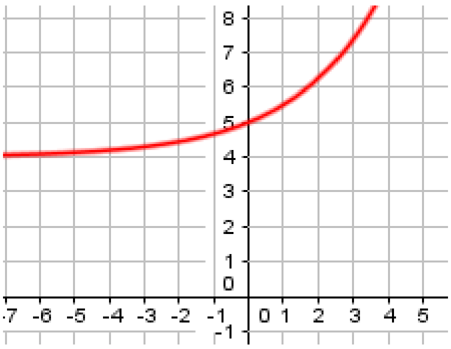
e) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

x	y
-2	14
-1	2
0	-1
1	-1,75
2	-1,94
3	-1,98

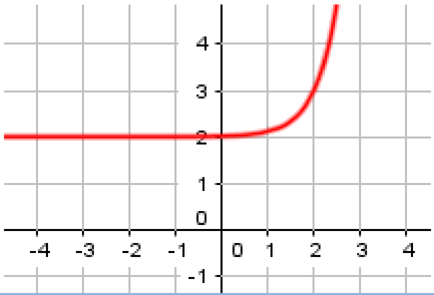


f) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x+4$

x	y
-5	4,132
-2	4,444
0	5
1	5,5
2	6,25
3	7,375



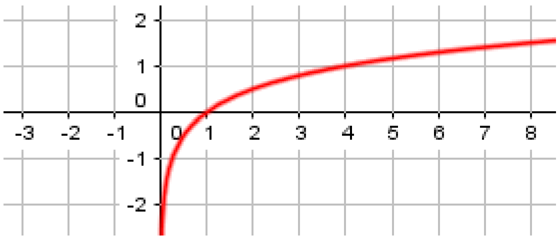
13. Representa la función $f\left(x\right)=3^{2x-4}+2$



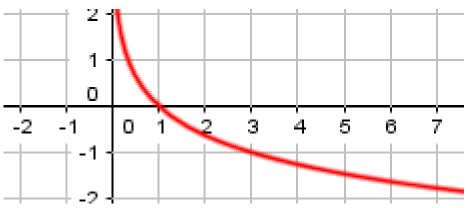
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 202

14. Representa las siguientes funciones logarítmicas:

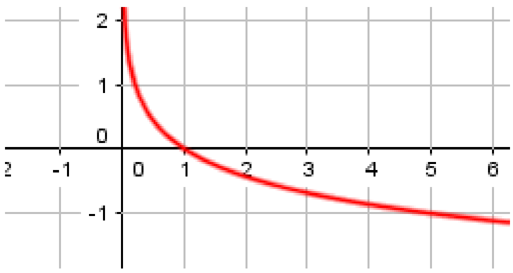
a) $y=\log_4 x$



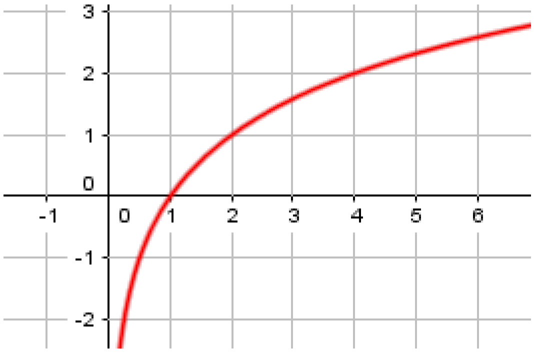
b) $y=-\log_3 x$



c) $y=\log_{0,2} x$



d) $y=-\log_{0,5} x$



15. Representa y estudia las siguientes funciones logarítmicas:

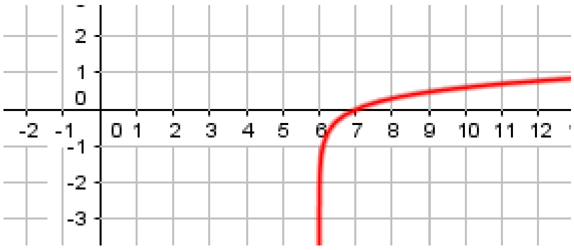
a) $y=\log(x-6)$

Dominio: $\text{Dom}(f)=(6,+\infty)$

Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$

Continua y creciente en todo su dominio.
La función es cóncava.

Punto de corte eje X: $(7,0)$



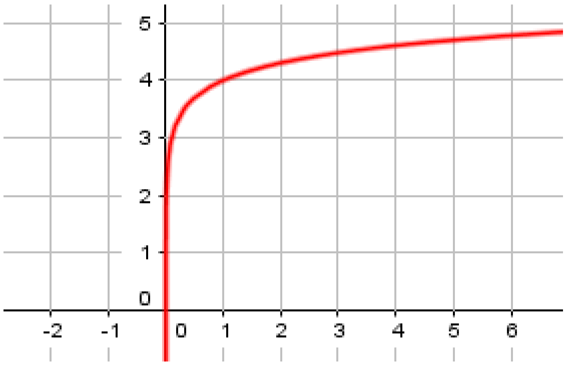
b) $y=\log x+4$

Dominio: $\text{Dom}(f)=(0,+\infty)$

Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$

Continua y creciente en todo su dominio.
La función es cóncava.

Punto de corte eje X: $(0.0001,0)$



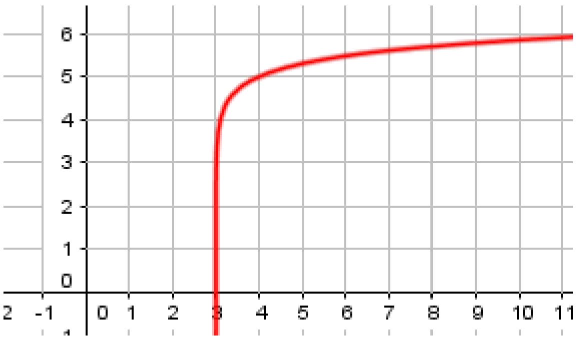
c) $y=\log(x-3)+5$

Dominio: $\text{Dom}(f)=(3,+\infty)$

Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$

Continua y creciente en todo su dominio.
La función es cóncava.

Punto de corte eje X: $(3.00001,0)$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 203

16. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{3x}=1$

Para que una potencia de 1, el exponente debe ser 0, por tanto:

$$3x=0 \Rightarrow x=0$$

b) $3^{2x+1}=27$

Tomando logaritmo en base 3:

$$\log_3\left(3^{2x+1}\right)=\log_3 27$$

$$2x+1=3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

c) $3^{2x-1}=7$

$$\log\left(3^{2x-1}\right)=\log 7$$

$$(2x-1)\cdot\log 3=\log 7$$

$$2x-1=\frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x=\frac{1+\frac{\log 7}{\log 3}}{2}=\frac{\log 3+\log 7}{2\log 3}\approx 1,39$$

d) $3\cdot 2^x=2$

$$2^x=\frac{2}{3}$$

$$x=\log_2\frac{2}{3} \Rightarrow x=1-\log_2 3=1-\frac{\log 3}{\log 2}\approx -0,58$$

e) $4^x=8\cdot 2^x$

$$\frac{4^x}{2^x}=8$$

$$2^x=8$$

$$x=3$$

f) $2^{2x+1}=3^{x-1}$

$$\log\left(2^{2x+1}\right)=\log\left(3^{x-1}\right)$$

$$(2x+1)\log 2=(x-1)\log 3$$

$$(2\log 2-\log 3)\,x=-\log 3-\log 2$$

$$x=\frac{-\log 3-\log 2}{2\log 2-\log 3}\approx -6,23$$

17. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x=4 \Rightarrow x=10^4=10000$

b) $\log_3 x=4 \Rightarrow x=3^4=81$

c) $\log 3x = 5 \Rightarrow 3x = 10^5 \Rightarrow x = \dfrac{10^5}{3}$

d) $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$

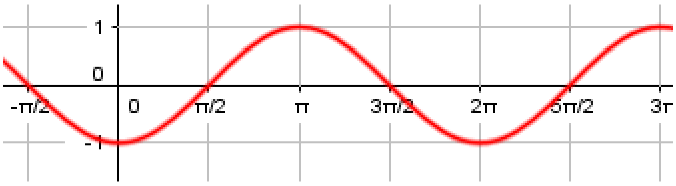
e) $\log 2x + \log x = 1 \Rightarrow \log 2x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

f) $\log x - \log(2x-1) = 4 \Rightarrow \log\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) = 4 \Rightarrow \dfrac{x}{2x-1} = 10^4 \Rightarrow x = \dfrac{10^4}{2\cdot 10^4 - 1}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 204

18. Representa las funciones trigonométricas y determina los puntos de corte y los extremos relativos:

a) $y = \cos(x+\pi)$



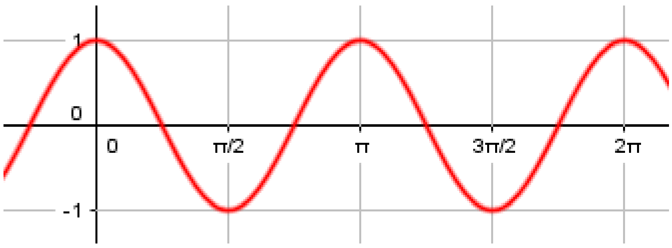
Punto de corte con el eje Y: $(0,-1)$

Puntos de corte con el eje X:

$$\cos(x+\pi) = 0 \Rightarrow x + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Puntos: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k, 0\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $y = \operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$



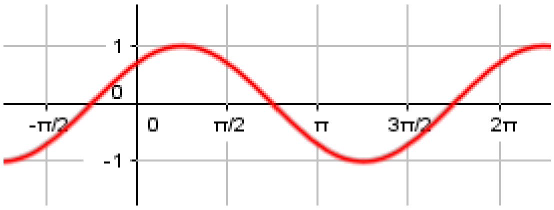
Punto de corte con el eje Y: $(0,1)$

Puntos de corte con el eje X:

$$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Puntos de corte; $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, 0\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$



Punto de corte con el eje Y: $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

Puntos de corte con el eje X:

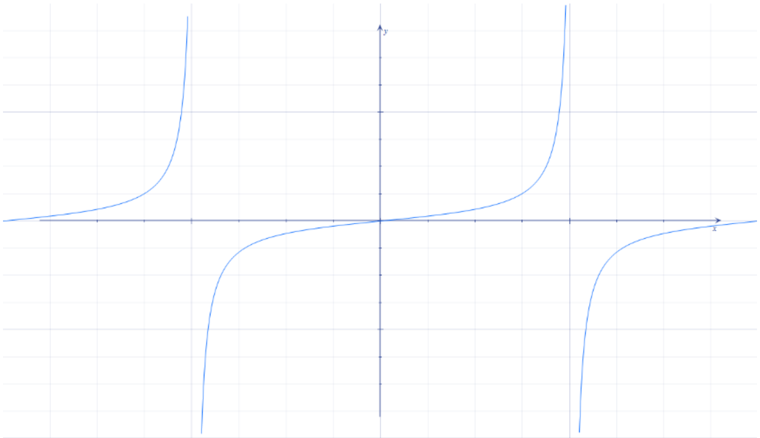
$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=0+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$$

Puntos de corte: $\left\{\left(\frac{3\pi}{4}+\pi k,0\right)/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

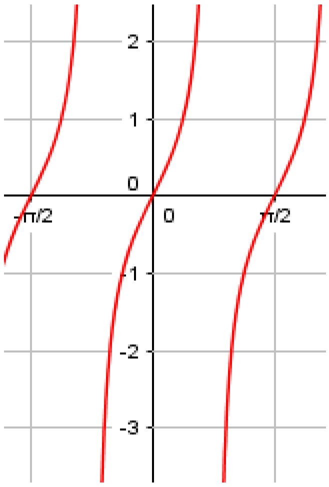
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 205

19. Representa las siguientes funciones en un intervalo de amplitud de su periodo:

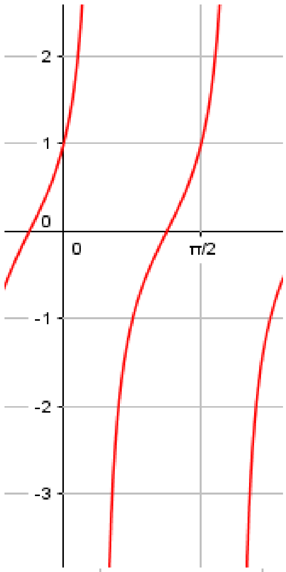
a) $\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$



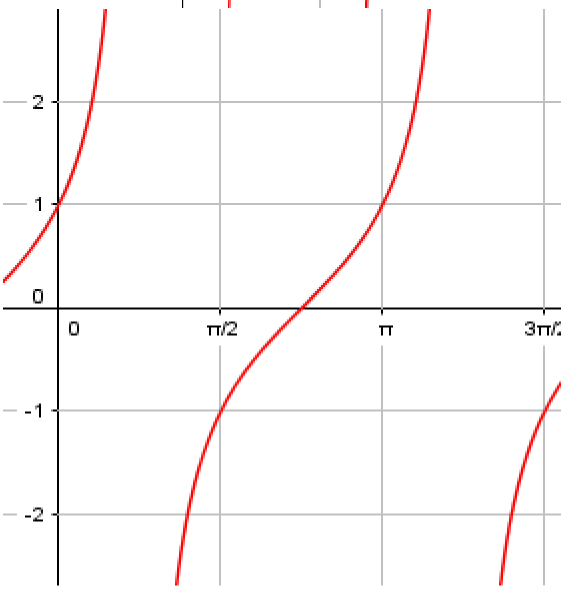
b) $\tan(2x)$



c) $\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$



d) $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGS. 208-210

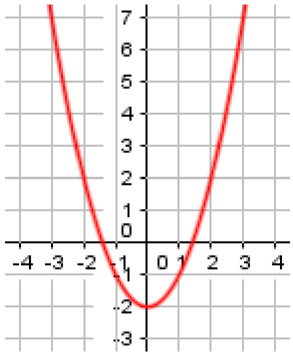
FUNCIONES PARABÓLICAS

1. Representa las siguientes funciones parabólicas:

a) $y = x^2 - 2$

Vértice en $x = 0$

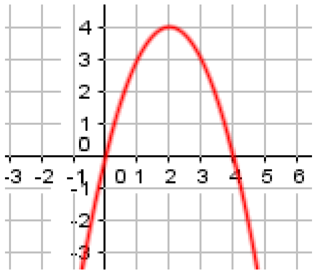
x	y
0	-2
1	-1
2	2
3	7



b) $y = -x^2 + 4x$

Vértice en $x = 2$

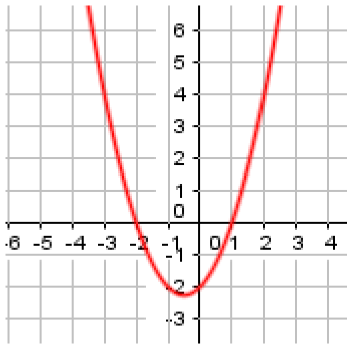
x	y
2	4
3	3
4	0
5	-5



c) $y = x^2 + x - 2$

Vértice en $x = -\frac{1}{2}$

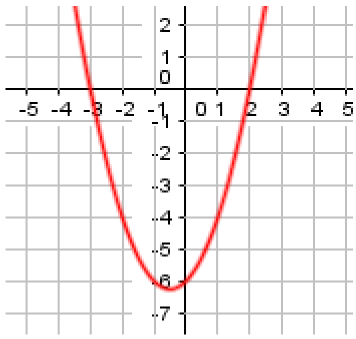
x	y
0	-2
1	0
2	4
3	10



d) $y = x^2 + x - 6$

Vértice en $x = -\frac{1}{2}$

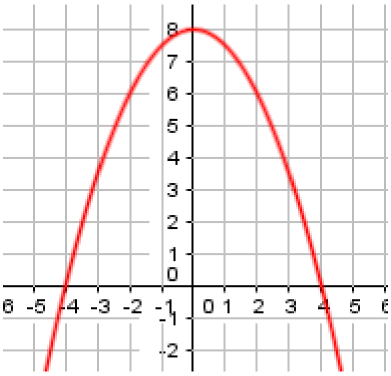
x	y
0	-6
1	-4
2	0
3	6



e) $y=-\frac{1}{2}x^2+8$

Vértice en $x=0$

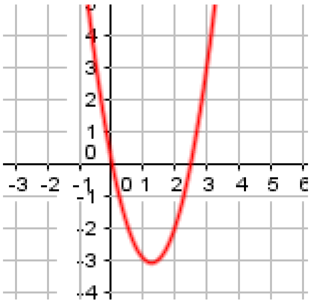
x	y
0	8
2	6
4	0
6	-10



f) $y=2x^2-5x$

Vértice en $x=\frac{5}{4}$

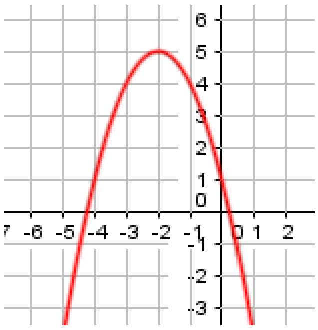
x	y
2	-2
3	3
4	12
5	25



g) $y=-x^2-4x+1$

Vértice en $x=-2$

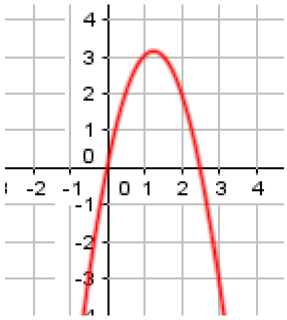
x	y
-2	5
-1	4
0	1
1	-4



h) $y=-2x^2+5x$

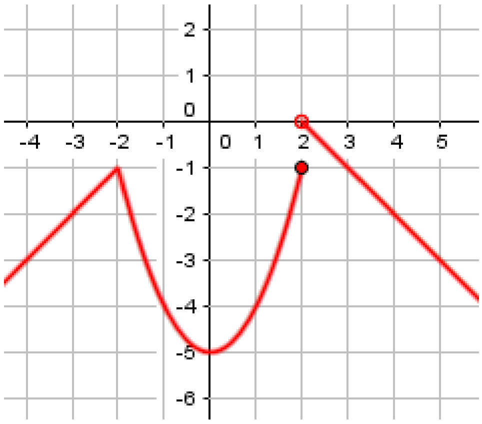
Vértice en $x=\frac{5}{4}$

x	y
2	2
2,5	0
3	-3
3,5	-7

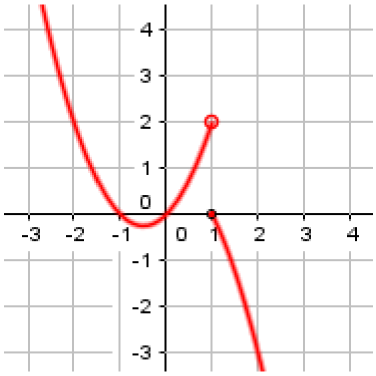


2. Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<-2 \\ x^2-5 & \text{si } -2\le x\le 2 \\ -x+2 & \text{si } x>2 \end{cases}$



b) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x<1 \\ -x^2+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$



3. Determina la ecuación de la función parabólica que verifica que $f(-1)=f(2)=0$ y pasa por el punto $(3,4)$.

La función debe tener la forma $y=a(x+1)(x-2)$ con $a\in\mathbb{R}$.

Sustituyendo las coordenadas del punto, tenemos: $4=a(3+1)(3-2)=4a\Rightarrow a=1$.

Por tanto, la función es: $y=(x+1)(x-2)\Rightarrow y=x^2-x-2$

4. Determina gráfica y analíticamente la intersección de la recta $y=2x-14$ con la parábola $y=x^2-4x-5$.

Para hallar la intersección resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y=2x-14 \\ y=x^2-4x-5 \end{cases}$$

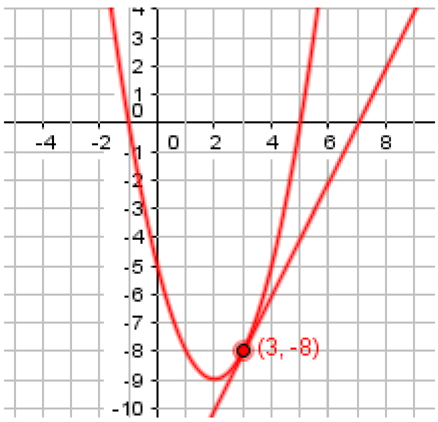
Por el método de igualación:

$$2x-14=x^2-4x-5$$

$$x^2-6x+9=0$$

$$(x-3)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=3;\ y=-8$$

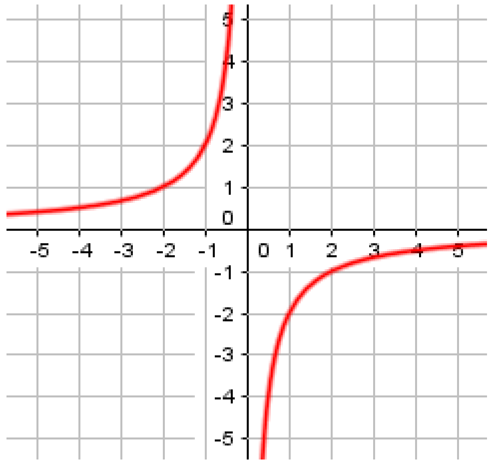
El punto de intersección es $(3,-8)$, como se ve en la gráfica.



FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA. HIPÉRBOLAS

5. Representa y estudia las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{-2}{x}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

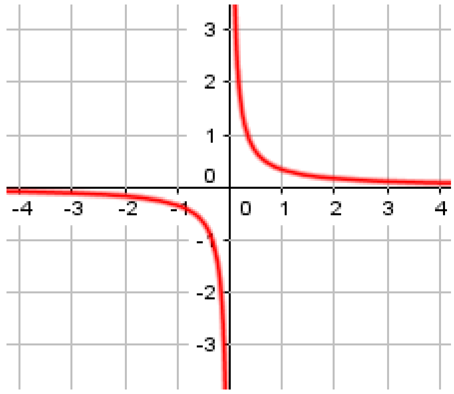
Creciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

Asíntota vertical en $x = 0$.

b) $y = \dfrac{1}{3x}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

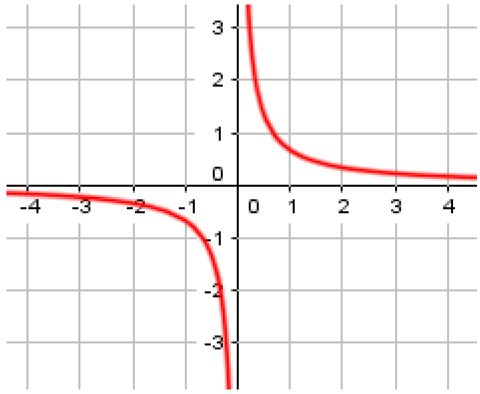
Decreciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

Asíntota vertical en $x = 0$.

c) $y = \dfrac{2}{3x}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Decreciente en todo su dominio.

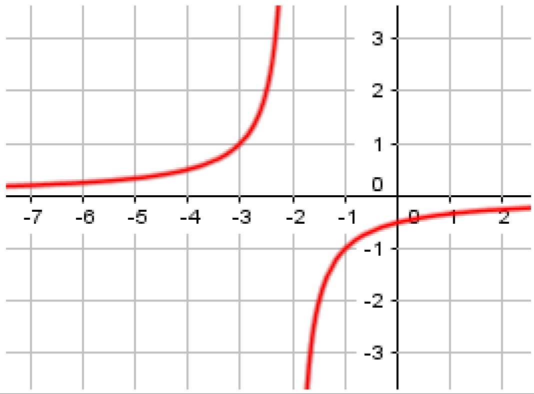
Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

Asíntota vertical en $x = 0$.

6. Representa y estudia las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{-1}{x+2}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

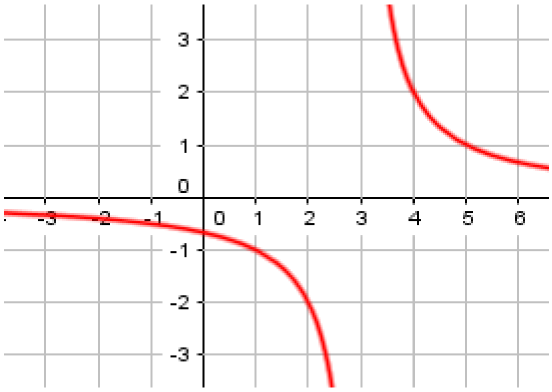
Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Creciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x = -2$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y = 0$.
Asíntota vertical en $x = -2$.

b) $y = \dfrac{2}{x-3}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

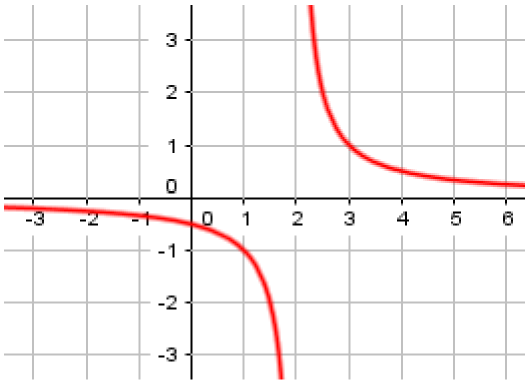
Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Decreciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y = 0$.
Asíntota vertical en $x = 3$.

c) $y = \dfrac{1}{x-2}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

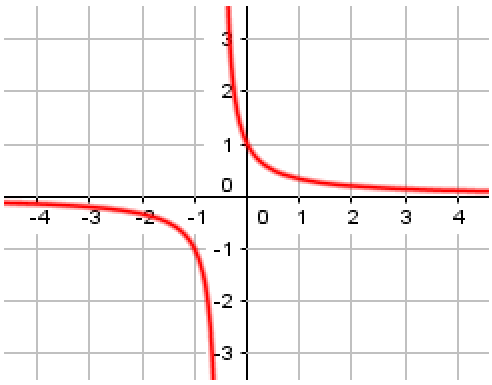
Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Decreciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y = 0$.
Asíntota vertical en $x = 2$.

d) $y = \dfrac{1}{2x+1}$



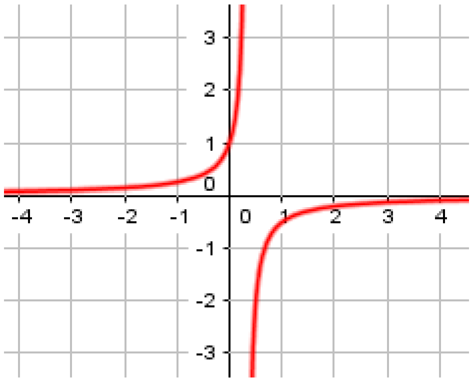
Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Decreciente en todo su dominio.

Continua en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x=-\frac{1}{2}$.



No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y=0$.

Asíntota vertical en $x=-\frac{1}{2}$.

e) $y=\frac{-1}{3x-1}$

Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$

Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Creciente en todo su dominio.

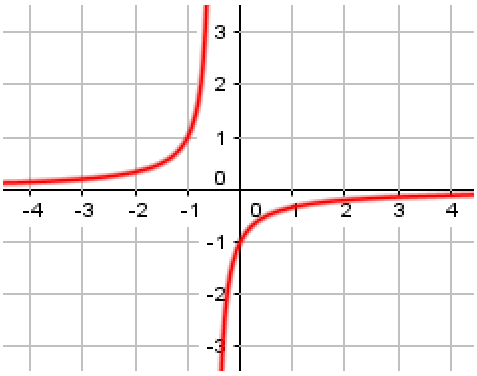
Continua en $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x=\frac{1}{3}$.

No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y=0$.

Asíntota vertical en $x=\frac{1}{3}$.

f) $y=\frac{-1}{1+2x}$



Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Creciente en todo su dominio.

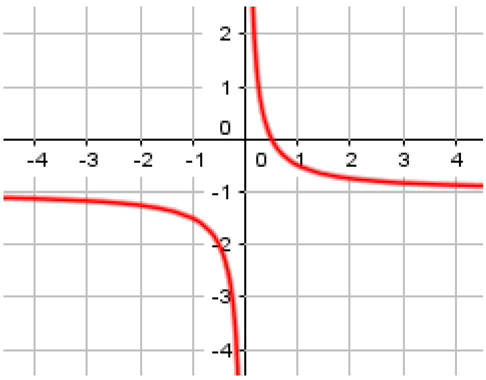
Continua en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x=-\frac{1}{2}$.

No hay máximos ni mínimos locales.

Asíntota horizontal en $y=0$. Asíntota vertical en $x=-\frac{1}{2}$.

7. Representa y estudia las siguientes funciones:



a) $y=\frac{1}{2x}-1$

Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

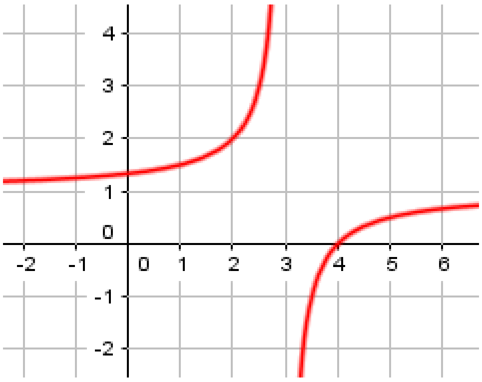
Decreciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x=0$.

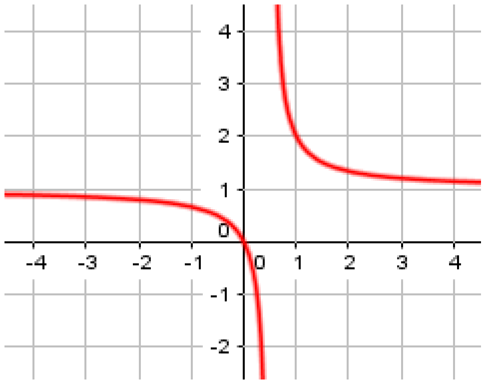
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y=-1$.
Asíntota vertical en $x=0$.

b) $y=\dfrac{-1}{x-3}+1$



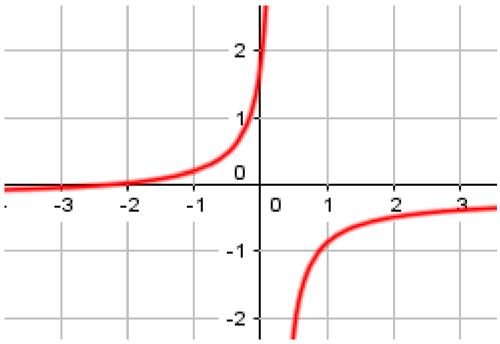
Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{3\}$
Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$
Creciente en todo su dominio.
Continua en $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.
Discontinuidad de salto infinito en $x=3$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y=1$.
Asíntota vertical en $x=3$.

c) $y=\dfrac{1}{2x-1}+1$



Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$
Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$
Decreciente en todo su dominio.
Continua en $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.
Discontinuidad de salto infinito en $x=\dfrac{1}{2}$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y=1$.
Asíntota vertical en $x=\dfrac{1}{2}$.

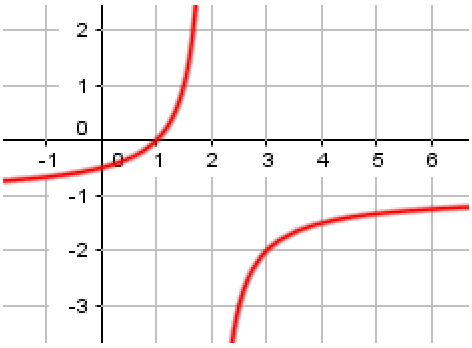
d) $y=\dfrac{2}{1-4x}-\dfrac{1}{5}$



Dominio: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$
Imagen: $\text{Im}(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{5}\right\}$
Creciente en todo su dominio.
Continua en $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.
Discontinuidad de salto infinito en $x=\dfrac{1}{4}$.
No hay máximos ni mínimos locales.
Asíntota horizontal en $y=-\dfrac{1}{5}$.
Asíntota vertical en $x=\dfrac{1}{4}$.

8. Representa y estudia las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1-x}{x-2}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Creciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

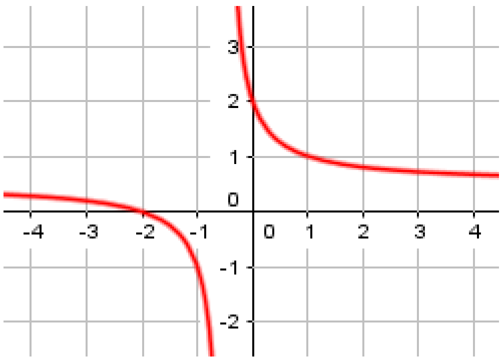
Discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

No hay máximos ni mínimos locales.

Asíntota horizontal en $y = -1$.

Asíntota vertical en $x = 2$.

b) $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Decreciente en todo su dominio.

Continua en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

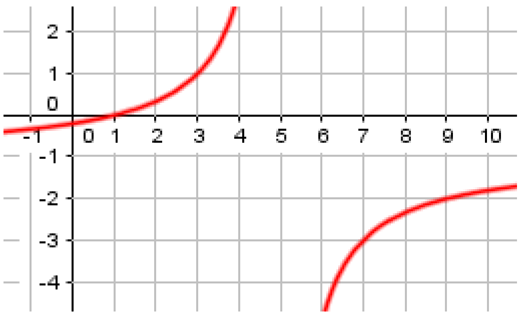
Discontinuidad de salto infinito en $x = -\dfrac{1}{2}$.

No hay máximos ni mínimos locales.

Asíntota horizontal en $y = \dfrac{1}{2}$.

Asíntota vertical en $x = -\dfrac{1}{2}$.

c) $y = \dfrac{1-x}{x-5}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Creciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.

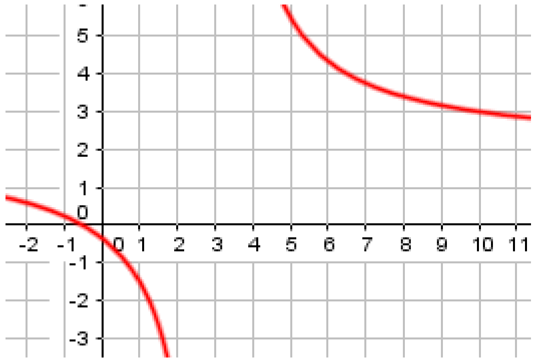
Discontinuidad de salto infinito en $x = 5$.

No hay máximos ni mínimos locales.

Asíntota horizontal en $y = -1$.

Asíntota vertical en $x = 5$.

d) $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

Decreciente en todo su dominio.

Continua en $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x=3$.

No hay máximos ni mínimos locales.

Asíntota horizontal en $y=2$.

Asíntota vertical en $x=3$.

e) $y=\dfrac{4x-1}{2x-3}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

Decreciente en todo su dominio.

Continua en $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

Discontinuidad de salto infinito en $x=\dfrac{3}{2}$.

No hay máximos ni mínimos locales.

Asíntota horizontal en $y=2$.

Asíntota vertical en $x=\dfrac{3}{2}$.

f) $y=\dfrac{2x+3}{4x-1}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

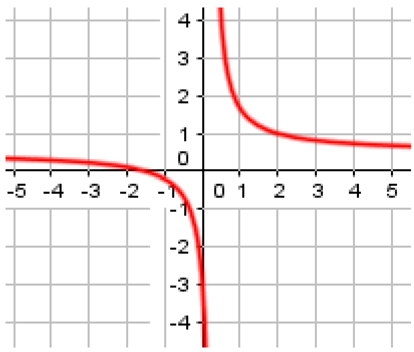


Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Decreciente en todo su dominio.

Continua en $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

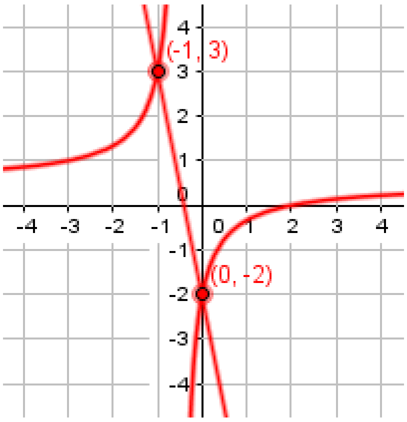
Discontinuidad de salto infinito en $x=\dfrac{1}{4}$.

No hay máximos ni mínimos locales.

Asíntota horizontal en $y=\dfrac{1}{2}$.

Asíntota vertical en $x=\dfrac{1}{4}$.

9. Determina analítica y gráficamente la intersección de la hipérbola $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$ con la recta $y=-5x-2$.



Para hallar la intersección resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x-2}{2x+1} \\ y=-5x-2 \end{cases}$$

Por el método de igualación:

$$\frac{x-2}{2x+1}=-5x-2$$

$$x-2=-10x^2-4x-5x-2$$

$$10x^2+10x=0$$

$$10x(x+1)=0$$

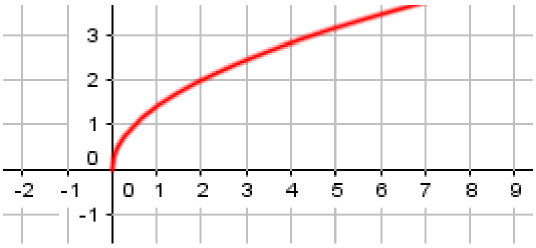
$$\begin{cases} x_1=0 \Rightarrow y_1=-2 \\ x_2=-1 \Rightarrow y_2=3 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son $(0,-2)$ y $(-1,3)$, como se ve en la gráfica.

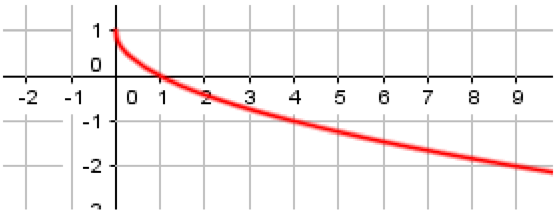
FUNCIONES CON RAÍCES

10. Representa las siguientes funciones radicales.

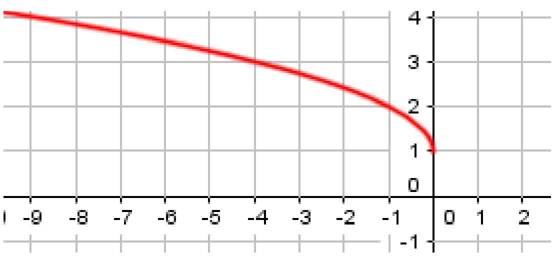
a) $y=\sqrt{2x}$



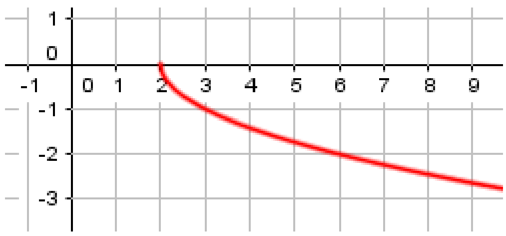
b) $y=1-\sqrt{x}$



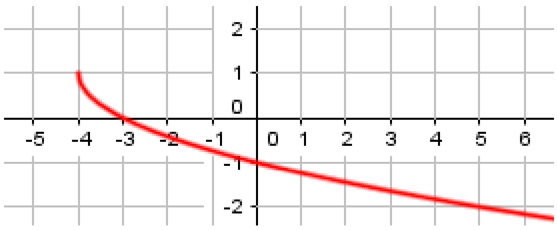
c) $y=1+\sqrt{-x}$



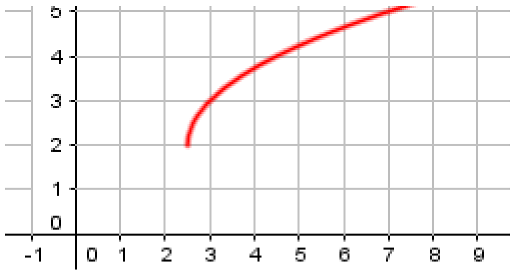
d) $y = -\sqrt{x-2}$



e) $y = 1-\sqrt{x+4}$



f) $y = 2+\sqrt{2x-5}$



11. Determina la función inversa (o las dos ramas en su caso) de las siguientes funciones:

a) $y = x^2+1 \quad \Rightarrow x = y^2+1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x-1}$

b) $y = x^2-x \quad \Rightarrow x = y^2-y \Rightarrow y^2-y-x=0 \Rightarrow y = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$

c) $y = -x^2+2 \quad \Rightarrow x = -y^2+2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2-x}$

d) $y = \dfrac{1}{x-2} \quad \Rightarrow x = \dfrac{1}{y-2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}+2$

e) $y = \dfrac{1}{x-1}+3 \quad \Rightarrow x = \dfrac{1}{y-1}+3 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x-3}+1$

f) $y = \dfrac{2x+4}{x+5} \quad \Rightarrow x = \dfrac{2y+4}{y+5} \Rightarrow yx+5x = 2y+4 \Rightarrow (x-2)y = 4-5x \Rightarrow y = \dfrac{4-5x}{x-2}$

12. Determina la función inversa (o las dos ramas en su caso) de las siguientes funciones:

a) $y = x^2-x \quad \Rightarrow x = y^2-y \Rightarrow y^2-y-x=0 \Rightarrow y = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$

b) $y = x^2+x-6 \quad \Rightarrow x = y^2+y-6 \Rightarrow y^2+y-(6+x)=0 \Rightarrow y = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(6+x)}}{2}$

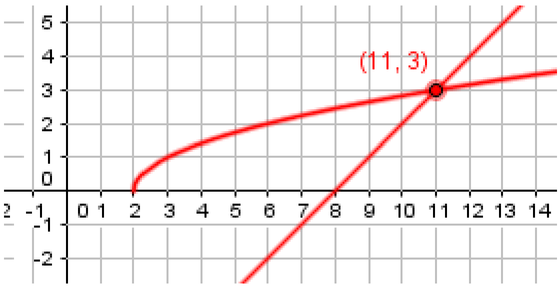
c) $y=x^2-2x+1 \Rightarrow x=y^2-2y+1 \Rightarrow x=(y-1)^2 \Rightarrow y=1\pm\sqrt{x}$

d) $y=-x^2+x-6 \Rightarrow x=-y^2+y-6 \Rightarrow -y^2+y-(6+x)=0 \Rightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(6+x)}}{-2}$

13. Determina la intersección de la función $f(x)=x-8$ con la función $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Para hallar la intersección resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y=x-8 \\ y=\sqrt{x-2} \end{cases}$$



Por el método de igualación:

$$x-8=\sqrt{x-2}$$

$$x^2-16x+64=x-2$$

$$x^2-17x+66=0$$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-264}}{2}=\frac{17\pm5}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=11 \Rightarrow y_1=3 \\ x_2=6 \Rightarrow y_2=-2 \end{cases}$$

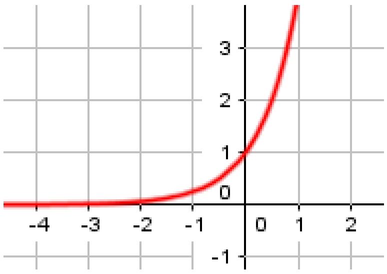
El punto de intersección es $(11,3)$, como se ve en la gráfica.

El segundo punto no es válido ya que la función $g(x)=\sqrt{x-2}$ tiene imagen positiva.

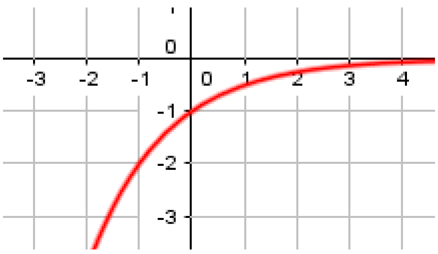
FUNCIÓN EXPONENCIAL

14. Representa las siguientes funciones exponenciales:

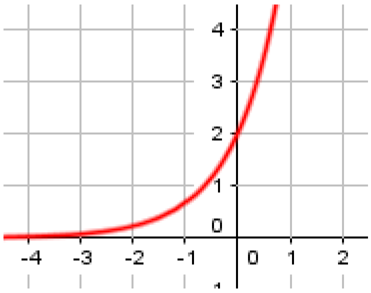
a) $y=4^x$



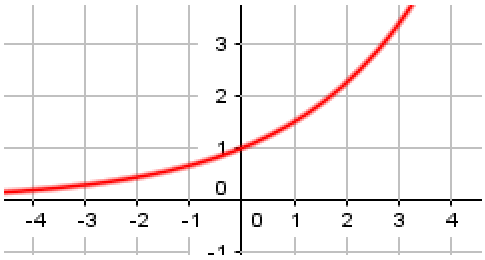
b) $y=-\dfrac{1}{2^x}$



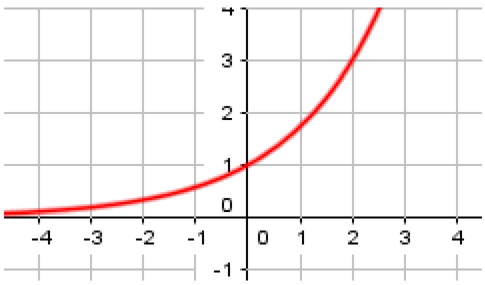
c) $y=\dfrac{2}{3^{-x}}\Rightarrow y=2\cdot 3^{x}$



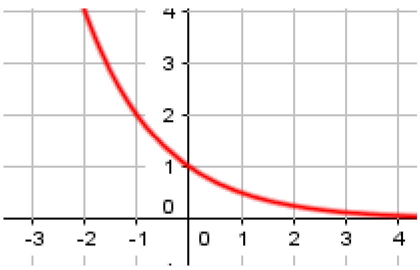
d) $y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$



e) $y=\left(\sqrt{3}\right)^{x}$



f) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x}\Rightarrow y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$



OTRAS FUNCIONES EXPONENCIALES

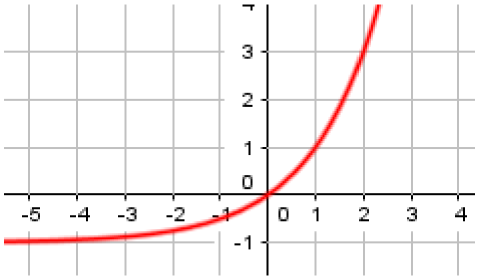
15. Representa y estudia las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 2^x - 1$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = (-1, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = -1$.

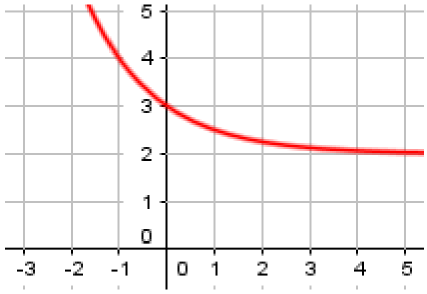


b) $y = \dfrac{1}{2^x} + 2$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = (2, +\infty)$

Continua y decreciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 2$.

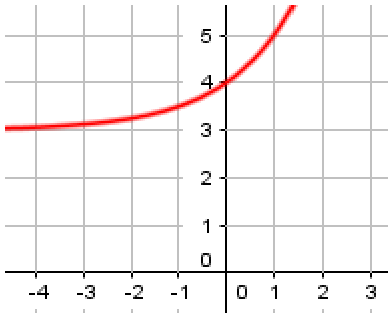


c) $y = 2^x + 3$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = (3, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 3$.

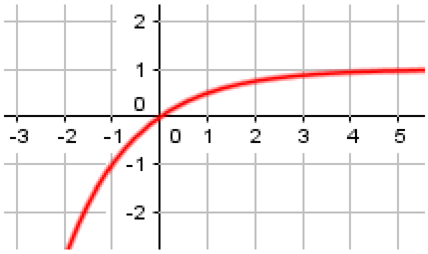


d) $y = 1 - \dfrac{1}{2^x}$

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = (-\infty, 1)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 1$.



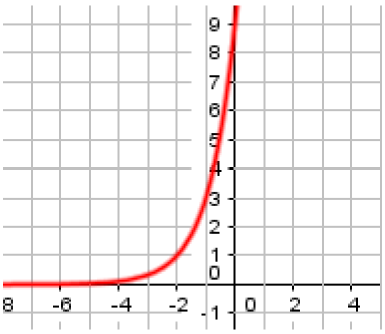
16. Representa y estudia las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 3^{x+2}$

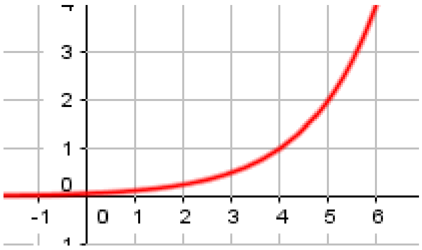
Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 0$.



b) $y = 2^{x-4}$

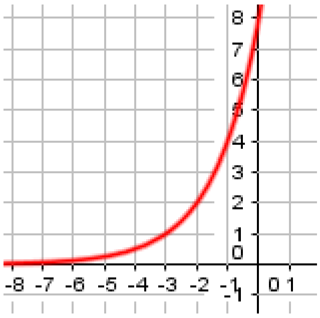


Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

c) $y = 2^{x+3}$

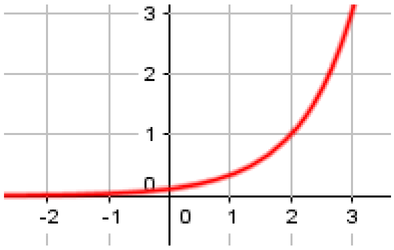


Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

d) $y = 3^{x-2}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

17. Representa y estudia las siguientes funciones exponenciales:

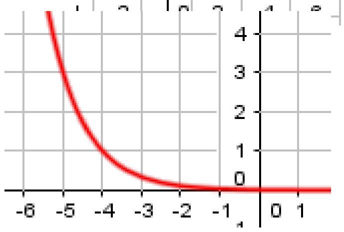
a) $y = \dfrac{1}{2^{x-3}}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

Continua y decreciente en todo su dominio. Ni máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

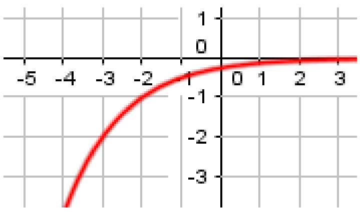
b) $y = \dfrac{1}{3^{x+4}}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

Continua y decreciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

c) $y = -\dfrac{1}{2^{x+2}}$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 0$.

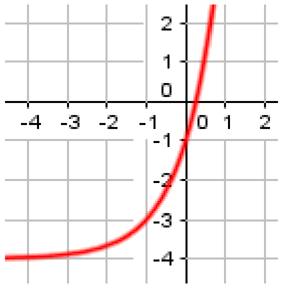
18. Representa y estudia las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 3^{x+1} - 4$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (-4, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = -4$.

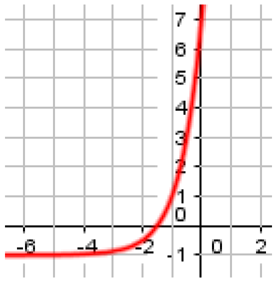


b) $y = 2^{2x+3} - 1$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (-1, +\infty)$

Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = -1$.

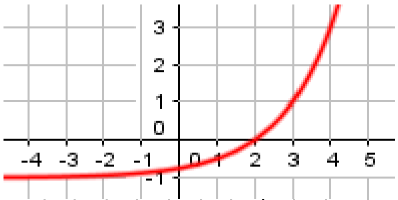


c) $y = \dfrac{1}{2^{2-x}} - 1$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (-1, +\infty)$

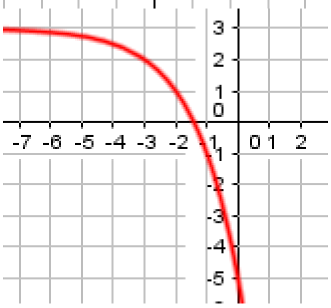
Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = -1$.



d) $y = 3 - 2^{x+3}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ Imagen: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 3)$

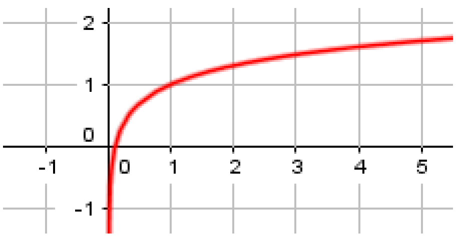
Continua y decreciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota horizontal en $y = 3$.



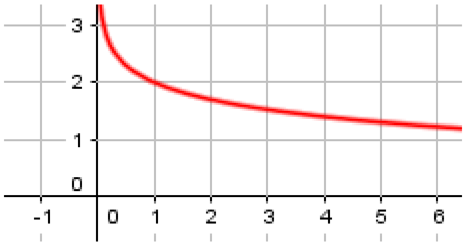
FUNCIÓN LOGARÍTMICA

19. Representa las siguientes funciones logarítmicas:

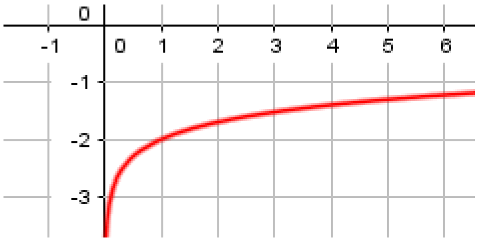
a) $y = 1 + \log x$



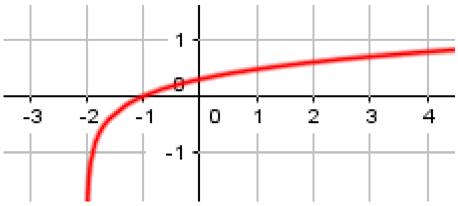
b) $y = 2 - \log x$



c) $y = -2 + \log x$

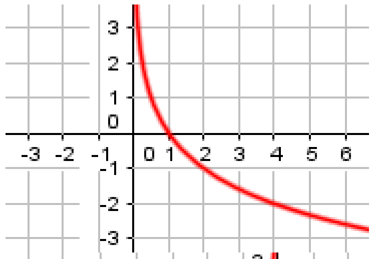


d) $y = \log(x+2)$



20. Representa y estudia las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_{0,5} x$



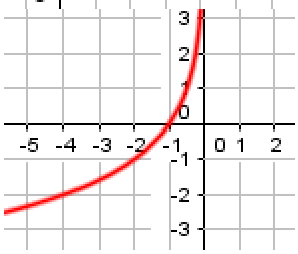
Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Continua y decreciente en todo su dominio.

No tiene máximos ni mínimos.

Asíntota vertical en $x = 0$

b) $y = \log_{0,5}(-x)$



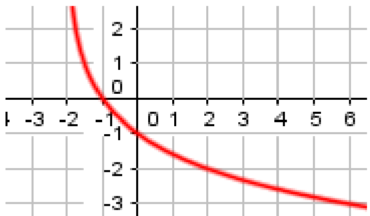
Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Continua y creciente en todo su dominio.

No tiene máximos ni mínimos.

Asíntota vertical en $x = 0$

c) $y = \log_{0,5}(x+2)$



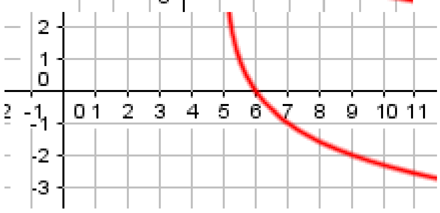
Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (-2, +\infty)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Continua y decreciente en todo su dominio.

No tiene máximos ni mínimos.

Asíntota vertical en $x = -2$

d) $y = \log_{0,5}(x-5)$



Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = (5, +\infty)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Continua y decreciente en todo su dominio.

No tiene máximos ni mínimos.

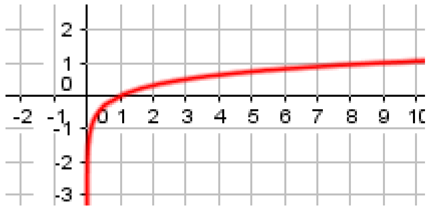
Asíntota vertical en $x = 5$

21. Representa las siguientes funciones logarítmicas y estúdialas:

a) $y=\log_3 \sqrt{x}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=(0,+\infty)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$

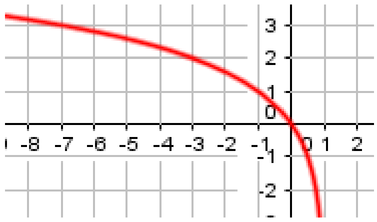
Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota vertical en $x=0$.



b) $y=\log_2(1-x)$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty.1)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$

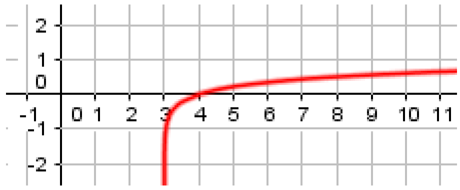
Continua y decreciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota vertical en $x=1$.



c) $y=\log_5 \sqrt{x-3}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=(3,+\infty)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$

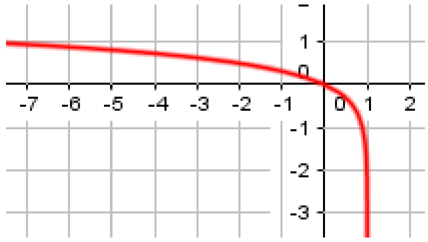
Continua y creciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota vertical en $x=3$.



d) $y=\log_3 \sqrt{1-x}$

Dominio: $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,1)$ Imagen: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$

Continua y decreciente en todo su dominio.
No tiene máximos ni mínimos.
Asíntota vertical en $x=1$.



22. ¿La función $f(x)=\log x^2$ es igual que la función $g(x)=2\log x$? Razona tu respuesta.

A pesar de que $\log x^2=2\log x$, ambas funciones no son iguales ya que tienen un dominio de definición diferente, ya que $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^*$ y $\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}^+$

23. Estudia el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y=\ln x^2 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $y=\log_3(2x+1) \Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

c) $y=\log(x+3) \Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=(3,+\infty)$

d) $y=\log_{0,5}(1-3x) \Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

24. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = 81 \quad \Rightarrow x = \log_3 81 = 4$

b) $3^{x-1} = 4 \quad \Rightarrow (x-1)\log 3 = \log 4 \Rightarrow x = 1 + \dfrac{\log 4}{\log 3} \approx 2,26$

c) $2^x = 3 \quad \Rightarrow x = \log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58$

d) $2^{x-1} = 4 \quad \Rightarrow x - 1 = \log_2 4 \Rightarrow x = 3$

e) $2^{x-1} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow x - 1 = \log_2 \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 0$

f) $3^{-x} = 27 \quad \Rightarrow -x = \log_3 27 \Rightarrow x = -3$

25. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{x+1} - 3^x = 2 \quad \Rightarrow 3 \cdot 3^x - 3^x = 2 \Rightarrow 2 \cdot 3^x = 2 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

b) $5^{x+2} - 5^x = 24 \quad \Rightarrow 5^2 \cdot 5^x - 5^x = 24 \Rightarrow 24 \cdot 5^x = 24 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

c) $9^x + 3^x = 2$

Llamando $t = 3^x$, tenemos:

$t^2 + t - 2 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

Como t no puede ser negativo, tenemos que $1 = 3^x \Rightarrow x = 0$

d) $2^{1-x} - 2^{-x} = 1 \quad \Rightarrow \dfrac{2}{2^x} - \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{2^x}{2^x} \Rightarrow 1 = 2^x \Rightarrow x = 0$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x-1} + 2^x = 8 \quad \Rightarrow 2^x\left(\dfrac{1}{2} + 1\right) = 8 \Rightarrow 2^x = \dfrac{16}{3} \Rightarrow x = \log_2 \dfrac{16}{3} = \dfrac{\log 16 - \log 3}{\log 2} \approx 2,41$

b) $3^{x+1} - 3^{x-1} + 3^x = 1 \quad \Rightarrow 3^x\left(3 - \dfrac{1}{3} + 1\right) = 1 \Rightarrow 3^x = \dfrac{3}{11} \Rightarrow x = \log_3 \dfrac{3}{11} = 1 - \dfrac{\log 11}{\log 3} \approx -1,18$

c) $5^x + 5^{1-x} = 6 \quad \Rightarrow 5^x + \dfrac{5}{5^x} = 6 \Rightarrow \left(5^x\right)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Llamando $z = 5^x$, tenemos:

$z^2 - 6z + 5 = 0$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 5 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Por tanto, $5 = 5^x \Rightarrow x_1 = 1$ o $1 = 5^x \Rightarrow x_1 = 0$

d) $7^{x+2} - 7^{x+1} + 7^x = 43 \quad \Rightarrow 7^x(49 - 7 + 1) = 43 \Rightarrow 7^x \cdot 43 = 43 \Rightarrow 7^x = 1 \Rightarrow x = 0$

27. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x = 4 \quad \Rightarrow x = 10^4 = 10000$

b) $\ln x = 2 \quad \Rightarrow x = e^2$

c) $\log_2 x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

28. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x+3) = 2 \quad x+3 = 10^2 \Rightarrow x = 97$

b) $\log_3 (x+1)^2 = 5 \quad \Rightarrow 2\log_3(x+1) = 5 \Rightarrow \log_3(x+1) = \frac{5}{2} \Rightarrow x+1 = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{3^5} - 1$

c) $\log_2 x = -3 \quad \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

d) $\log_3 \frac{1}{x} = -2 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = 3^{-2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 9$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5 \quad \Rightarrow \log_2 x = \log_2 15 \Rightarrow x = 15$

b) $\log_3 2 - \log_3 4 = \log_3 x \quad \Rightarrow \log_3 \frac{2}{4} = \log_3 x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_4 3 + \frac{1}{2}\log_4 3 + \log_4 x = 0 \quad \Rightarrow \log_4\left(3\sqrt{3}\,x\right) = 0 \Rightarrow 3\sqrt{3}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x - 1 = \log(2x-1) \quad \Rightarrow \log\frac{x}{10} = \log(2x-1) \Rightarrow \frac{x}{10} = 2x-1 \Rightarrow x = 20x - 10 \Rightarrow x = \frac{10}{19}$

b) $\log(2x+3) - \log 3 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log\frac{2x+3}{3} = \log\frac{10}{2} \Rightarrow \frac{2x+3}{3} = 5 \Rightarrow 2x+3 = 15 \Rightarrow x = 6$

c) $\log(x+1) - \log(x-2) = 1 - \log 3 \Rightarrow \log\frac{x+1}{x-2} = \log\frac{10}{3} \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} = \frac{10}{3}$

$3x + 3 = 10x - 20 \Rightarrow -7x = -23 \Rightarrow x = \frac{23}{7}$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x + \log x^2 = \log 2 \quad \Rightarrow \log x^3 = \log 2 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

b) $\log(x+1) - \log x = \log 2 \quad \Rightarrow \log\frac{x+1}{x} = \log 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x} = 2 \Rightarrow x+1 = 2x \Rightarrow x = 1$

c) $\log_2 x + \log_2(x+5) - \log_2 3 = \log_2 2 \quad \Rightarrow \log_2 \dfrac{x(x+5)}{3} = \log_2 2 \Rightarrow$

$$\frac{x(x+5)}{3} = 2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \begin{cases} = 1 \\ = -6 \end{cases}$$

La solución es $x = 1$ ya que x no puede ser negativo.

d) $\log x + \log 3 = \log(x-2) - \log 3 \quad \Rightarrow \log 3x = \log \dfrac{x-2}{3} \Rightarrow 3x = \dfrac{x-2}{3} \Rightarrow$

$9x = x - 2 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ Como x no puede ser negativo, no tiene solución.

e) $\log 2x + \log 3 = 2 - \log(x-3) \quad \Rightarrow \log 6x = \log \dfrac{100}{x-3} \Rightarrow 6x = \dfrac{100}{x-3} \Rightarrow 6x^2 - 18x - 100 = 0$

$$6x^2 - 18x - 100 = 0$$

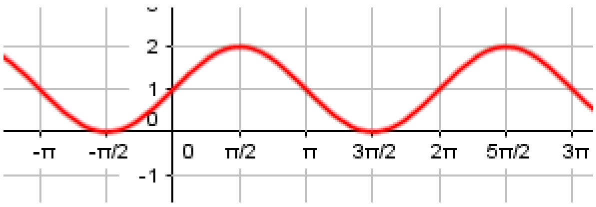
$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324+2400}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{18+2\sqrt{681}}{12} = \dfrac{9+\sqrt{681}}{6} \\ x_2 = \dfrac{18-2\sqrt{681}}{12} = \dfrac{9-\sqrt{681}}{6} \end{cases}$$

Como x no puede ser negativo, la única solución válida es la primera.

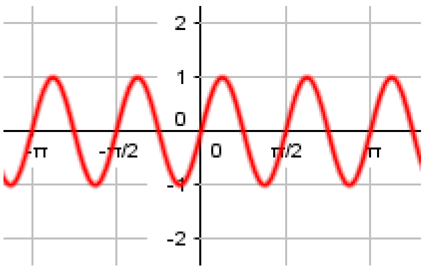
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

32. Representa las siguientes funciones:

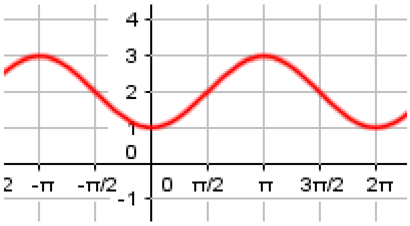
a) $y = 1 + \operatorname{sen} x$



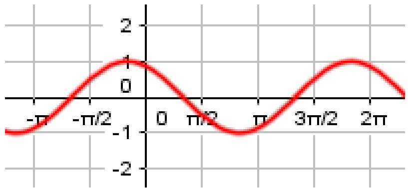
b) $y = \operatorname{sen} 4x$



c) $y = 2 - \cos x$

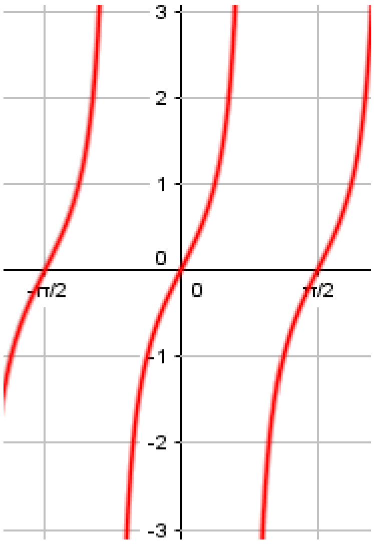


d) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

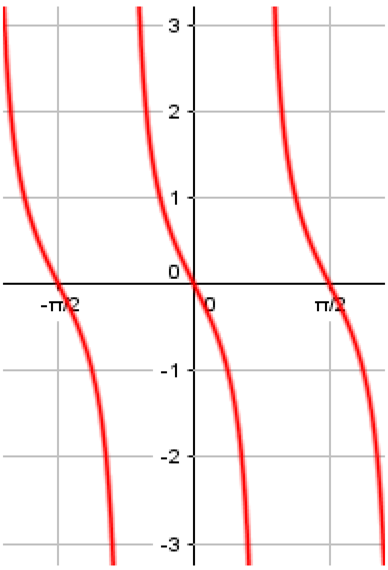


33. Representa las siguientes funciones:

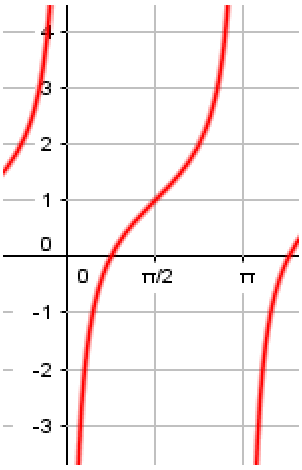
a) $y = \tan 2x$



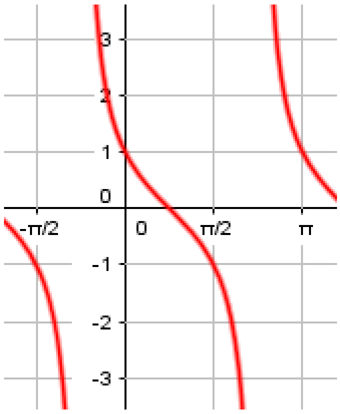
b) $y = -\tan 2x$



c) $y = 1 + \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



d) $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

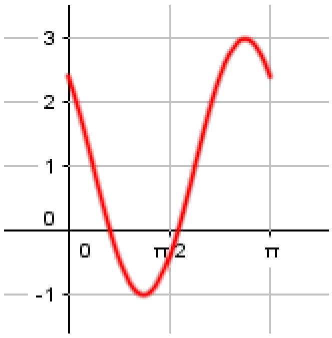


34. Determina el periodo de la función $y = 1 + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ y representa en un intervalo de amplitud ese periodo:

Como el periodo de la función coseno es 2π, si T es el periodo de la función se tiene:

$$\left(2(x+T) + \frac{\pi}{4}\right) - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$$

La representación de la función en el intervalo $[0, \pi]$ es:



35. Un agricultor tiene un depósito de agua con el que proporciona riego para su huerto a través de varios desagües iguales. Construye una función que relacione el número de desagües y el tiempo que tarda en vaciarse sabiendo que abriendo 3 desagües el depósito se vacía en 24 horas.

Como tarda 24h con 3 desagües abiertos, con un solo desagüe tardaría 72 horas.

Desagües	1	2	3	4	6
Tiempo	72	36	24	18	12

Se trata de una función de proporcionalidad inversa cuya expresión será: $y=\frac{k}{x}$.

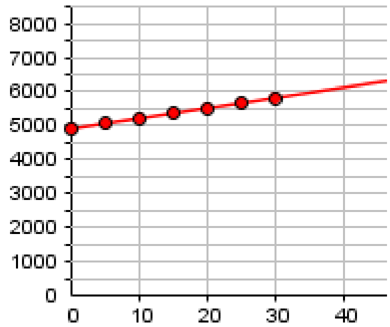
Para calcular el tiempo que tarda en vaciarse según el número de desagües hay que dividir 72 entre el número de desagües, por tanto, la función es $y=\frac{72}{x}$

36. Una empresa de mecanizados vende bombas hidráulicas a un precio que depende de la longitud del émbolo y del radio de la botella, de forma que el precio de la bomba lo calcula con la siguiente fórmula: $P=120+30x+12R^2$ donde P es el precio de la bomba en euros, x la longitud del émbolo en metros y R el radio de la botella en centímetros.

a) **Representa una gráfica con la evolución del precio de una bomba de radio $R=20\,cm$ en función de la longitud del émbolo.**

La función es $P=120+30x+12\cdot 20^2 \Rightarrow P=30x+4920$. Se trata por tanto de una función lineal. Construimos una tabla de valores y representamos la función:

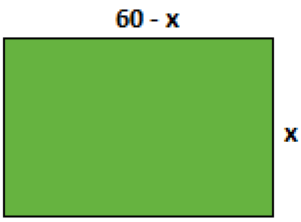
x	P
0	4920
5	5070
10	5220
15	5370
20	5520
25	5670
30	5820



b) **Determina el precio de una bomba que tiene un émbolo de $0,8$ metros y un radio de botella de 30 cm.**

$P=120+30\cdot 0,8+12\cdot 30^2=10944\,€$

37. Cercamos un terreno rectangular utilizando 120 m de valla. Determina la función que nos proporciona el área del terreno dependiendo de la anchura de éste.

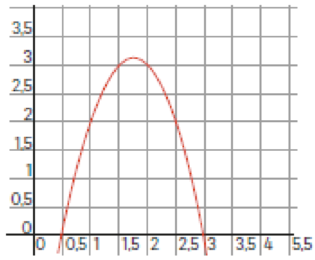


Sea x la anchura del terreno, entonces su largo es $60-x$ y la función que nos da el área dependiendo de su ancho:

$A(x)=x(60-x)$

$A(x)=60x-x^2$

38. La siguiente gráfica representa la trayectoria de un balón de baloncesto al tirar a canasta:



a) **Determina la función que tiene como gráfica esta trayectoria.**
Se trata de una función parabólica cuyos puntos de corte con el eje X de la función están en $x=\frac{1}{2}$ y en $x=3$, por tanto la función tiene la forma: $f(x)=A\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)$.
Observando que la función pasa por el punto $(1,2)$, tenemos que:

$$A\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-3)=A\Rightarrow -A=2\Rightarrow A=-2$$

Por tanto, la función es: $f(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)\Rightarrow f(x)=-2x^2+7x-3$

b) **¿A qué distancia de la canasta tendría que estar el lanzador del balón para encestar si la canasta tiene una altura de 2,25 metros?**
El tirador está situado en $x=0,5$. Tenemos que calcular el valor de x para que $f(x)=2,5$:

$$-2x^2+7x-3=\frac{5}{2}\Rightarrow -2x^2+7x-\frac{11}{2}=0\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-44}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{5}}{4}=\begin{cases}\frac{7+\sqrt{5}}{4}\approx 2,31\\ \frac{7-\sqrt{5}}{4}\approx 1,19\end{cases}$$

Nos quedamos con la solución mayor (en la que la pelota está cayendo). La distancia a la canasta será: $\frac{7+\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{4}\approx 1,81$ metros.

39. Un proyectil es lanzado y sigue una trayectoria definida por la función $f(x)=-x^2+11x+80$. Determina:

a) **El punto más alto que alcanza el proyectil.**
El punto más alto se encuentra en el vértice de la parábola que describe, por tanto se alcanza en $x=-\frac{11}{-1}=11$. La altura en ese punto **será:** $f(11)=-121+121+80=80$ **metros.**

b) **La distancia que alcanza el proyectil.**

$$f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+11x+80=0$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121+320}}{-2}=\frac{-11\pm 21}{-2}\Rightarrow\begin{cases}=\frac{-11+21}{-2}=-5\\ =\frac{-11-21}{-2}=16\end{cases}$$

Nos quedamos con la solución positiva: el proyectil alcanza una distancia de 16 metros.

40. En un laboratorio realizan un experimento para determinar la velocidad con la que una vacuna empieza a ser efectiva. Dicha vacuna consta de anticuerpos que se reproducen por bipartición una vez cada 10 segundos. Si tenemos un cultivo con una población inicial de 250 anticuerpos:

a) **Determina la ecuación de crecimiento de la población y represéntala.**
Sea N el número de anticuerpos y t el tiempo en segundos.
Cada intervalo de 10 segundos, el número de anticuerpos se multiplica por 2, de modo que la función pedida es: $N = 250 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$.

b) **¿Cuántas bacterias habrá al cabo de tres horas y media?**
Tres horas y media son $3,5 \cdot 3600 = 12\,600$ segundos, por tanto el número de anticuerpos será:
$N = 250 \cdot 2^{\frac{12\,600}{10}} = 250 \cdot 2^{1260}$ anticuerpos.

c) **Si la efectividad de la vacuna comienza cuando tenemos un millón de anticuerpos, ¿cuánto tiempo pasará desde que se administra la vacuna hasta que empieza a ser efectiva?**
$$250 \cdot 2^{\frac{t}{10}} = 1\,000\,000 \Rightarrow 2^{\frac{t}{10}} = \frac{1\,000\,000}{250}$$
Tomando logaritmos:
$$\frac{t}{10}\log 2 = \log\frac{1\,000\,000}{250} \Rightarrow t = \frac{10(\log 1\,000\,000 - \log 250)}{\log 2} = \frac{10(6-\log 250)}{\log 2} \approx 119,66$$
La bacteria empieza a ser efectiva por tanto a los 2 minutos.

41. Una determinada bacteria intestinal se reproduce por esporulación generando 5 bacterias iguales cada 12 minutos. Si tenemos un cultivo de dicha bacteria con 150 ejemplares.

a) **¿Cuántas bacterias tendremos en el cultivo después de 2 horas?**
En cada intervalo de 12 minutos, el número de bacterias B se multiplica por 5.
Teniendo en cuenta que dos horas son 120 minutos y por tanto 10 intervalos de ese tiempo, tendremos:
$B = 150 \cdot 5^{10} = 1,47 \cdot 10^{9}$ bacterias.

b) **Escribe la función que representa el número de bacterias en función del tiempo medido en minutos.**
Sea t el tiempo transcurrido en minutos.
Tras cada intervalo de 12 minutos, el número de bacterias se multiplica por 5. Por tanto:
$B = 150 \cdot 5^{\frac{t}{12}}$

c) **¿Qué tiempo habrá pasado si tenemos en el cultivo más de 500 000 bacterias?**
$$150 \cdot 5^{\frac{t}{12}} = 500\,000 \Rightarrow 5^{\frac{t}{12}} = \frac{500\,000}{150}$$
Tomando logaritmos:
$$\frac{t}{12}\log 5 = \log\frac{10\,000}{3} \Rightarrow t = \frac{12(\log 10\,000 - \log 3)}{\log 5} = \frac{12(4-\log 3)}{\log 5} \approx 60,48 \text{ minutos}$$
Habrá pasado, por tanto, poco más de 1 hora.

42. El producto radioactivo torio 234 emite partículas alfa y beta. Se degrada en función del tiempo según la función $f(t) = 1020 \cdot 5^{-t} - 1$, que representa la cantidad de partículas alfa y beta que emite. ¿Qué tiempo tiene que pasar para que el producto deje de emitir radiaciones?

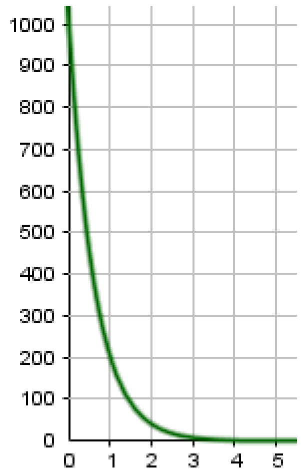
El producto dejará de emitir radiaciones cuando $f(t) = 0$, esto es:

$$1020 \cdot 5^{-t} = 1 \Rightarrow \frac{1}{5^t} = \frac{1}{1020} \Rightarrow 5^t = 1020$$

Tomando logaritmos:

$$t = \log_5 1020 = \frac{\log 1020}{\log 5} \approx 4{,}3$$

Por tanto, el tiempo transcurrido es de 4,3 segundos.



DESAFÍO PISA - PÁG. 211

EL TIRO PARABÓLICO

Si lanzamos un objeto con una velocidad inicial v_0 con una determinada inclinación, que forma un ángulo α con la horizontal y desde una altura inicial y_0, describirá una trayectoria parabólica.

En primer lugar determinamos la velocidad en el eje *X* y la velocidad en el eje *Y:*

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$
$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha$$

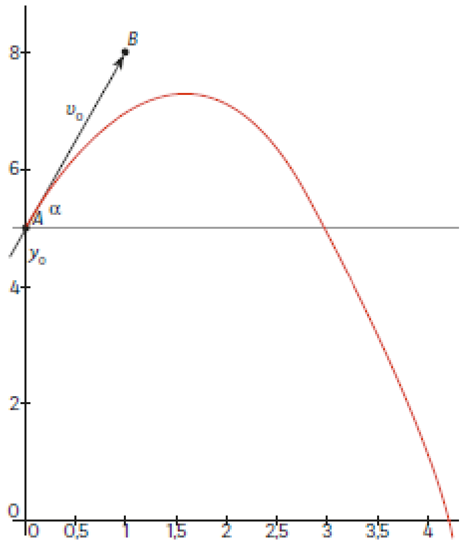
De forma que el espacio recorrido para cada eje será:

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = y_0 + v_y t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Despejando el tiempo y sustituyendo, tendremos la parábola que determina la trayectoria.

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x} x - \frac{g}{2v_x^2} x^2$$

Nota: si lanzamos una pieza de mortero desde una altura de 10 m con una velocidad inicial $v_0 = 18\ m/s$ formando un ángulo de 60° con la horizontal obtenemos la siguiente figura.



ACTIVIDAD 1. Según los datos, la velocidad en el eje X será de:

C: $9\sqrt{3}$ m/s, ya que $v_x = 18\cos 60^{o} = \dfrac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

ACTIVIDAD 2. La altura máxima que alcanzará el objeto será de:

B: 22,40 m, ya que si el vértice de la parábola $y = y_0 + v_y\, t - \dfrac{1}{2} g t^2$ está en $t = \dfrac{v_y}{g} = \dfrac{18\,\text{sen}\,60^{o}}{9,8} = 1,59$

. En ese punto la altura es: $y = 10 + 18\,\text{sen}\,60 \cdot 1,59 - \dfrac{1}{2} g \cdot 1,59^2 = 22,4$

ACTIVIDAD 3. El tiempo que tardará en alcanzar la altura máxima será de:

C: 1,6 s, como hemos visto en la actividad anterior.

ACTIVIDAD 4. ¿A qué distancia caerá el objetivo?

B: $33,80$ m. Cuando caiga, la altura será 0. Tomando la parábola: $y = y_0 + \dfrac{v_y}{v_x} x - \dfrac{g}{2v_x^2} x^2$ tendremos que: $0 = 10 + \dfrac{18\,\text{sen}\,60^{o}}{18\cos 60^{o}} x - \dfrac{9,8}{2\cdot\left(18\cos 60^{o}\right)} x^2 \Leftrightarrow 0 = 10 + \sqrt{3}\, x - \dfrac{9,8}{162} x^2$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + \dfrac{40\cdot 9,8}{162}}}{\dfrac{9,8}{81}} = \frac{\sqrt{3} \pm 2,42}{0,121} = \begin{cases} = \dfrac{\sqrt{3} \pm 2,42}{0,121} \approx 33,80 \\ = \dfrac{\sqrt{3} \pm 2,42}{0,121} < 0 \end{cases}$$

ACTIVIDAD 5. Si cambiamos el ángulo de tiro a 45º, la altura máxima será:

C: 18,2 m, ya que si el vértice de la parábola $y = y_0 + v_y\, t - \dfrac{1}{2} g t^2$ está en $t = \dfrac{v_y}{g} = \dfrac{18\,\text{sen}\,45^{o}}{9,8} = 1,3$.

En ese punto la altura es: $y = 10 + 18\,\text{sen}\,45 \cdot 1,3 - \dfrac{1}{2} g \cdot 1,3^2 = 18,2$