UNIDAD 10: Límites de funciones. Continuidad

ACTIVIDADES-PÁG. 208

1. Podemos decir lo siguiente:

a) Para esta función:

f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$
f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a – 2 por la izquierda
f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a – 2 por la derecha
f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a 2 por la izquierda
f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a 2 por la derecha
f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

b) En este caso:

f (x) tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$
f(x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

c) Para esta gráfica:

f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$
f(x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

d) Para esta funcióm:

f (x) tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty$
f (x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

ACTIVIDADES-PÁG. 227

1. Designamos los colores por: rojo (R), verde (V), azul (Z) y amarillo (A). Las cuatro formas por: cuadrada (C), circular (O), triangular (T) y pentagonal (P).
Por ensayo y error colocamos las fichas en un tablero 4x4, cumpliendo las condiciones que indica el enunciado y obtenemos una solución:

RC	VO	ZT	AP
ZP	AT	RO	VC
AO	ZC	VP	RT
VT	RP	AC	ZO

Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas.
Resolviendo el problema mediante ecuaciones obtenemos:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \quad \Rightarrow x = 8 \;\; amanitas$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de latas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error obtenemos:

Hay 7 latas de zumo.

El primer amigo se bebe 7/2 + 0,5 = 4 latas. Quedan 3 latas.

El segundo amigo se bebe 3/2 + 0,5 = 2 latas. Quedan 1 lata.

El dueño de la casa se bebe 1/2 + 0,5 = 1 lata.

Luego, efectivamente había 7 latas de zumo.

Este problema se puede resolver también mediante ecuaciones.

4. Sea n un número real. Veamos si $n^2 \cdot (n^2 - 1) = \dot{12}$

Como $n^2 \cdot (n^2 - 1) = n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$, entonces:

- $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3}$, pues es producto de tres números consecutivos.

- Si $n = \dot{3}$, entonces $n - 1 = \dot{2}$ y $n + 1 = \dot{2}$. Por tanto $n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3} \cdot \dot{2} \cdot \dot{2} = \dot{12}$
- Si $n - 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$. Por tanto $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3} \cdot \dot{2} \cdot \dot{2} = \dot{12}$
- Si $n + 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$. Por tanto $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = \dot{3} \cdot \dot{2} \cdot \dot{2} = \dot{12}$

En cualquier caso se verifica que $n^2 \cdot (n^2 - 1) = \dot{12}$

ACTIVIDADES-PÁG. 229

1. En la imagen tenemos la resolución, con Wiris, de estos límites.

$$\lim_{x \to 0^+} (1+4x)^{\frac{3}{2x^2}} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2-2x}-3x\right) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

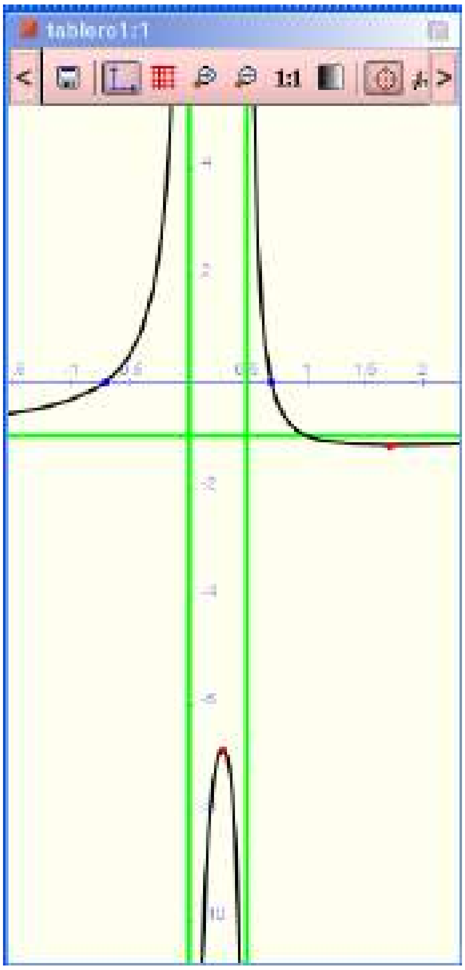
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-6x+5}{2\sqrt{x-1}-4} \rightarrow 8$$

2. Con Wiris representamos la función y vemos en la gráfica que tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones x = 0; x = 0,5 y una asíntota horizontal de ecuación y = - 1.

En la misma gráfica estudiamos la continuidad y esta función es continua en R – {0; 0,5}

$$f(x) := \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x} \rightarrow x \mapsto \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x}$$

representar(f(x),{asíntota={color=verde,anchura_línea=3}})

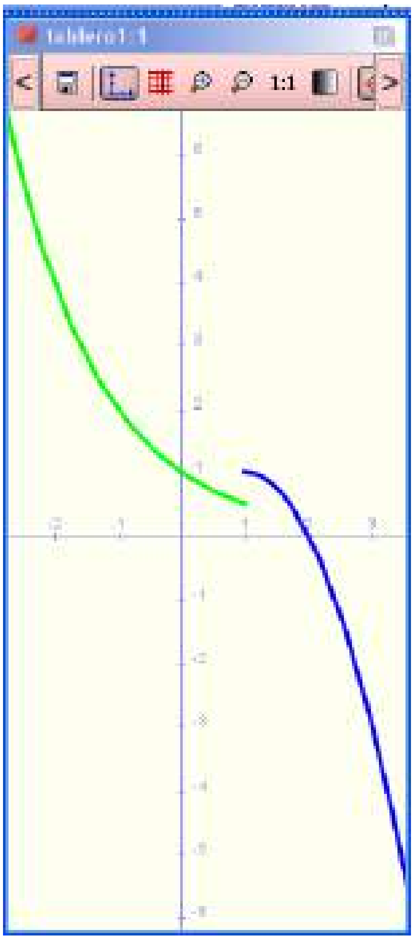


3. Representamos con Wiris estas dos funciones:

a) Esta es una función a trozos y hay que dibujar cada trozo en su intervalo, los dos dibujos dentro del mismo bloque.

$$\begin{array}{l} \text{dibujar}(2\cdot x - x^2,\ 1..+\infty, \{\text{color}=\text{azul}, \text{anchura\_línea}=3\}) \rightarrow \text{tablero1} \\ \text{dibujar}(2^{-x},\ -\infty..1, \{\text{color}=\text{verde}, \text{anchura\_línea}=3\}) \rightarrow \text{tablero1} \end{array}$$

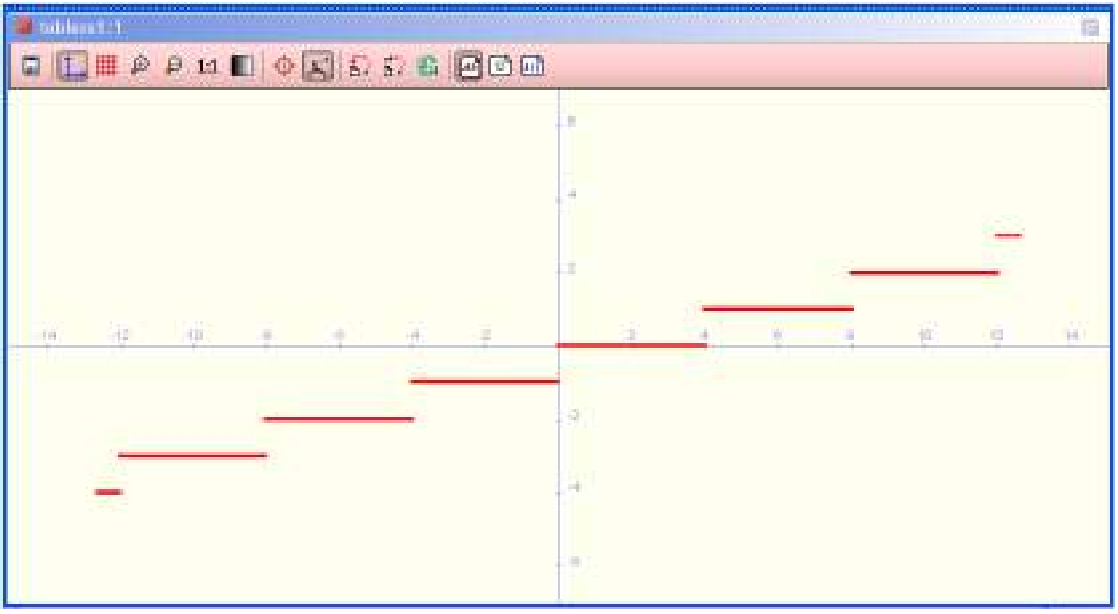
A partir de la gráfica vemos que esta función es continua en R – {1}



b) Para representar la parte entera se escribe **dibujar(suelo(x/4))**

La representamos y a partir de la gráfica vemos que es una función es continua en $R - \{x = 4 \cdot k \;/\; k \in Z\}$.

$$\text{dibujar}\left(\text{suelo}\left(\frac{x}{4}\right), \{\text{color}=\text{rojo}, \text{anchura\_línea}=3\}\right) \rightarrow \text{tablero1}$$



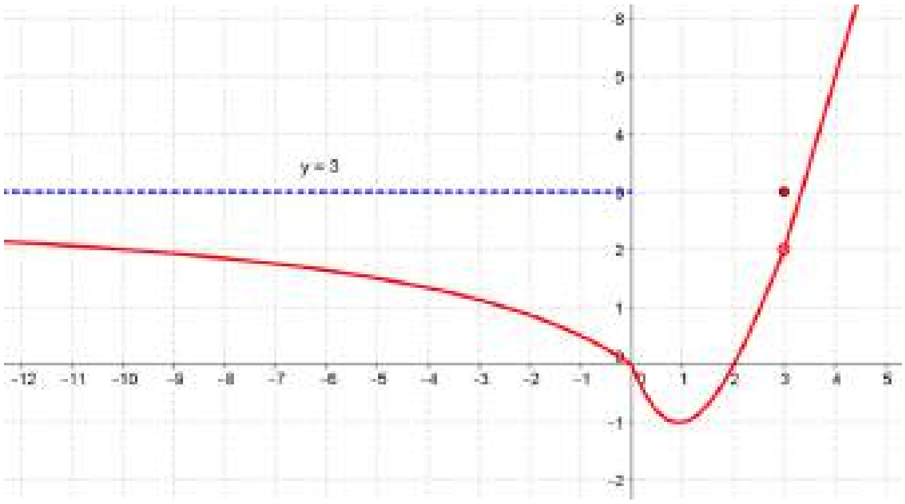
ACTIVIDADES-PÁG. 230

1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

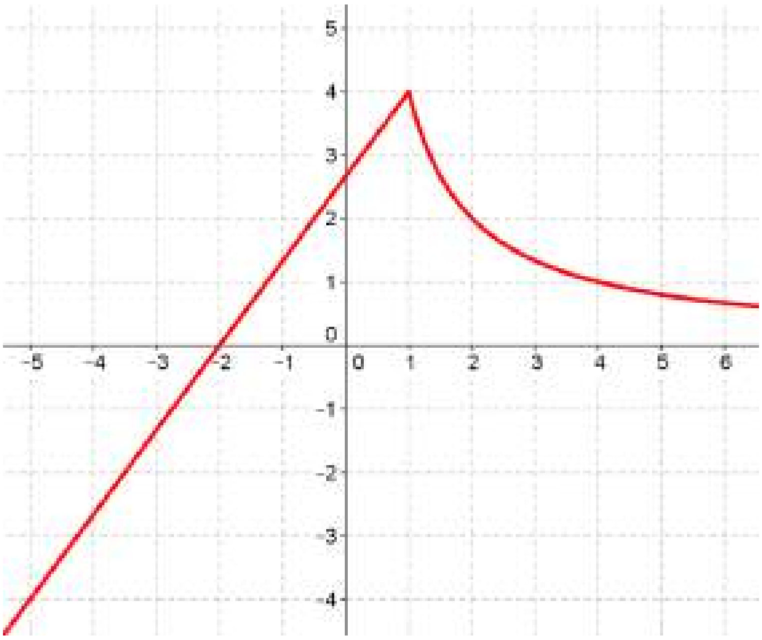
Apartados	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
a) Dom f	R	R	R
b) Im f	[0, 1)	R	[0, + ∞)
c) f (0)	0	2	1
d) f (1)	0	2	0
e) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$	1	1	1
f) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$	0	1	1
g) $\lim_{x \to 0} f(x)$	No existe	1	1
h) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$	1	2	0
i) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$	0	2	2
j) $\lim_{x \to 1} f(x)$	No existe	2	No existe
k) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$	No existe	- ∞	+ ∞
l) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$	No existe	+ ∞	+ ∞

2. Las gráficas pueden ser como las que siguen.

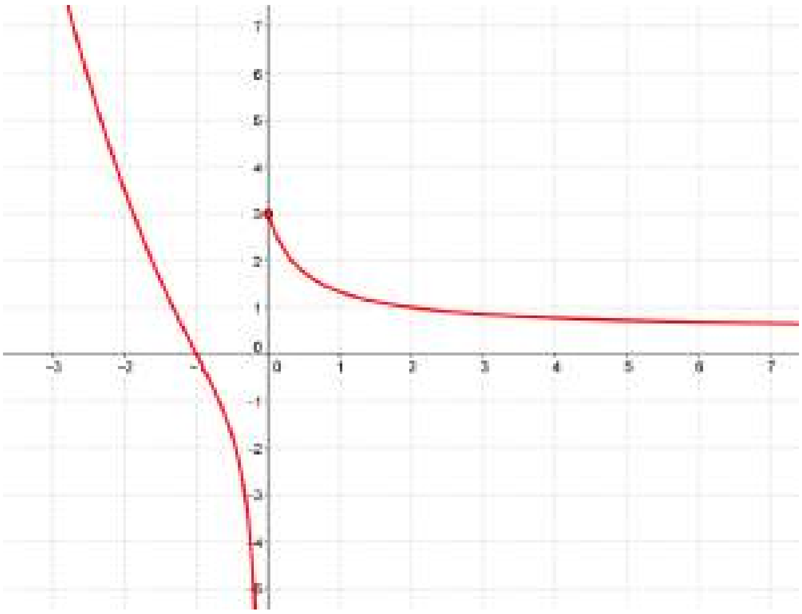
a)



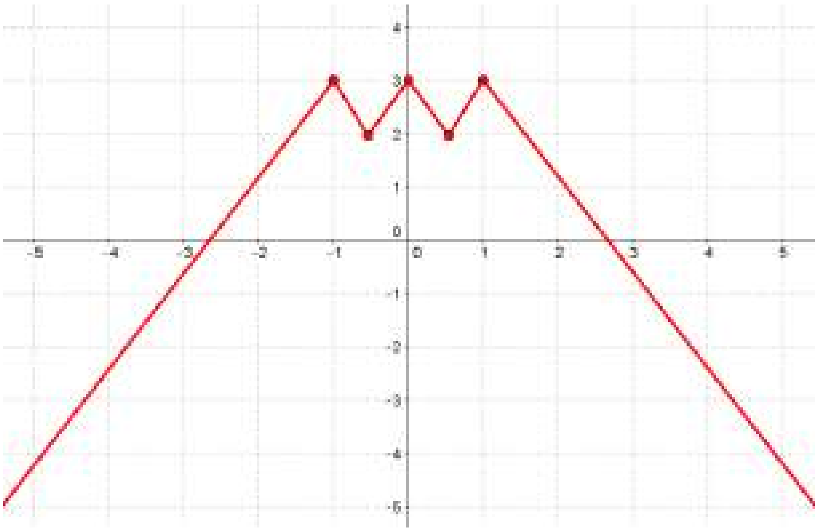
b)



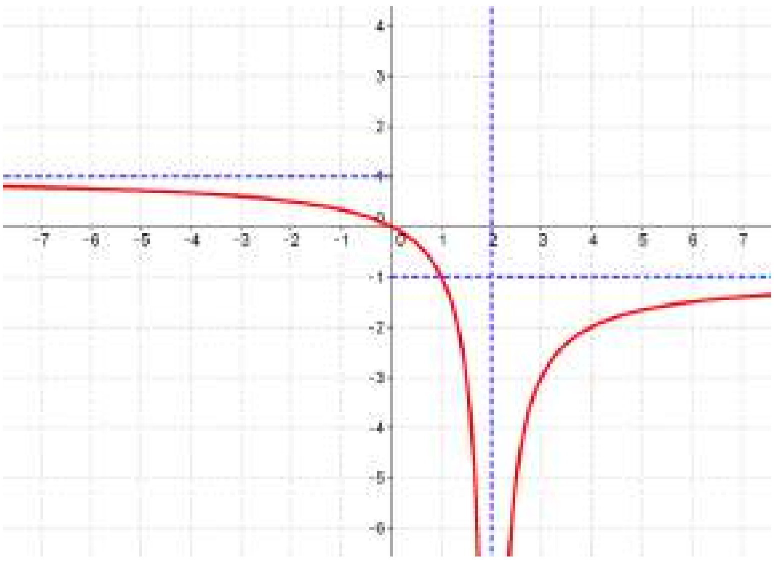
c)


7
6
5
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2
-3
-4
-5

d)


4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5

e)


4
3
2
1
0
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2
-3
-4
-5
-6

3. La asociación es:

a) con (II) b) con (III) c) con (I)

ACTIVIDADES-PÁG. 231

4. Las soluciones son:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe

d) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

h) $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = 1$

i) $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$ no existe

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

k) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

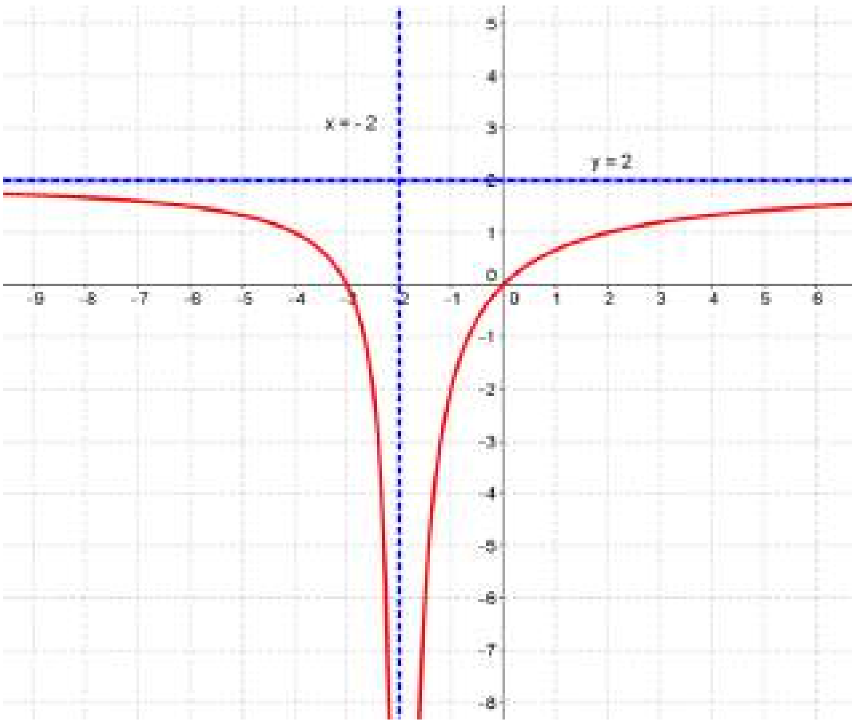
l) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ no existe

m) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -1$

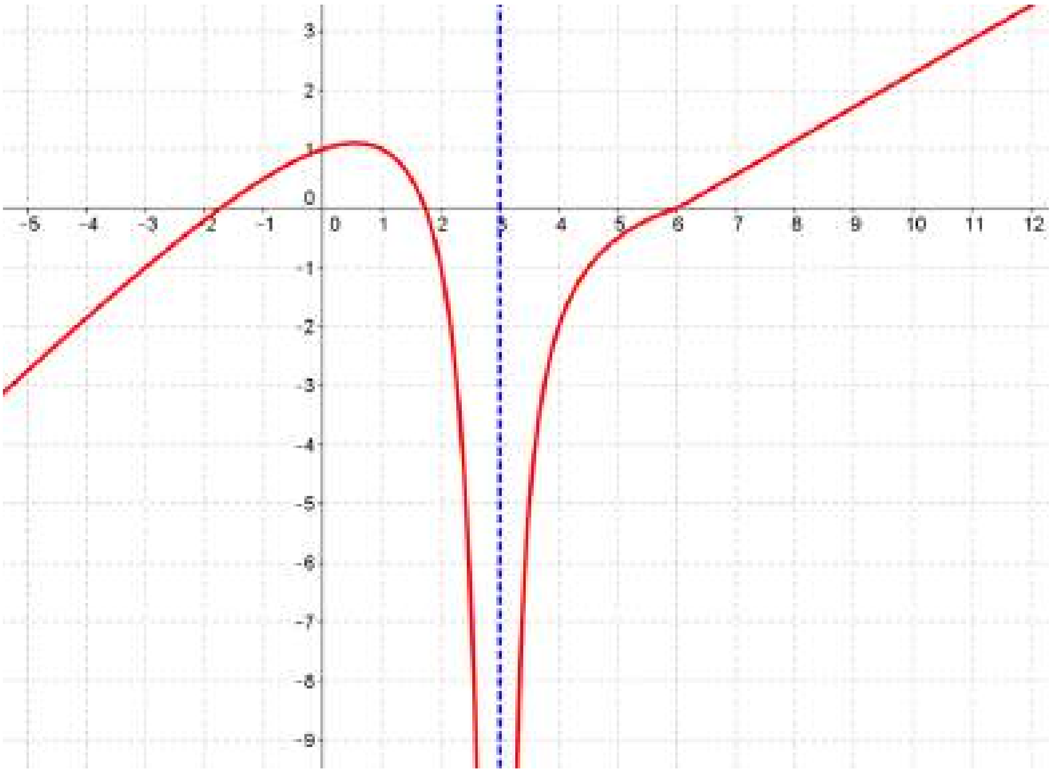
n) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

5. Las gráficas pueden verse a continuación:

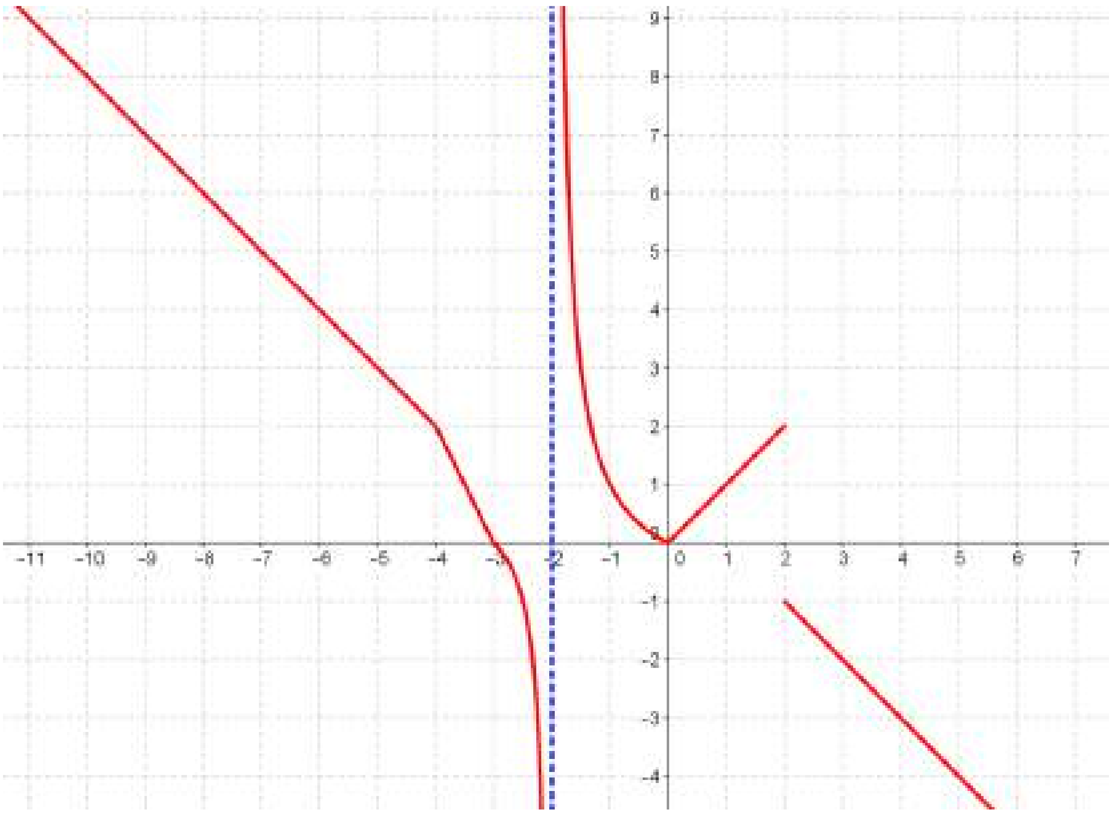
a)



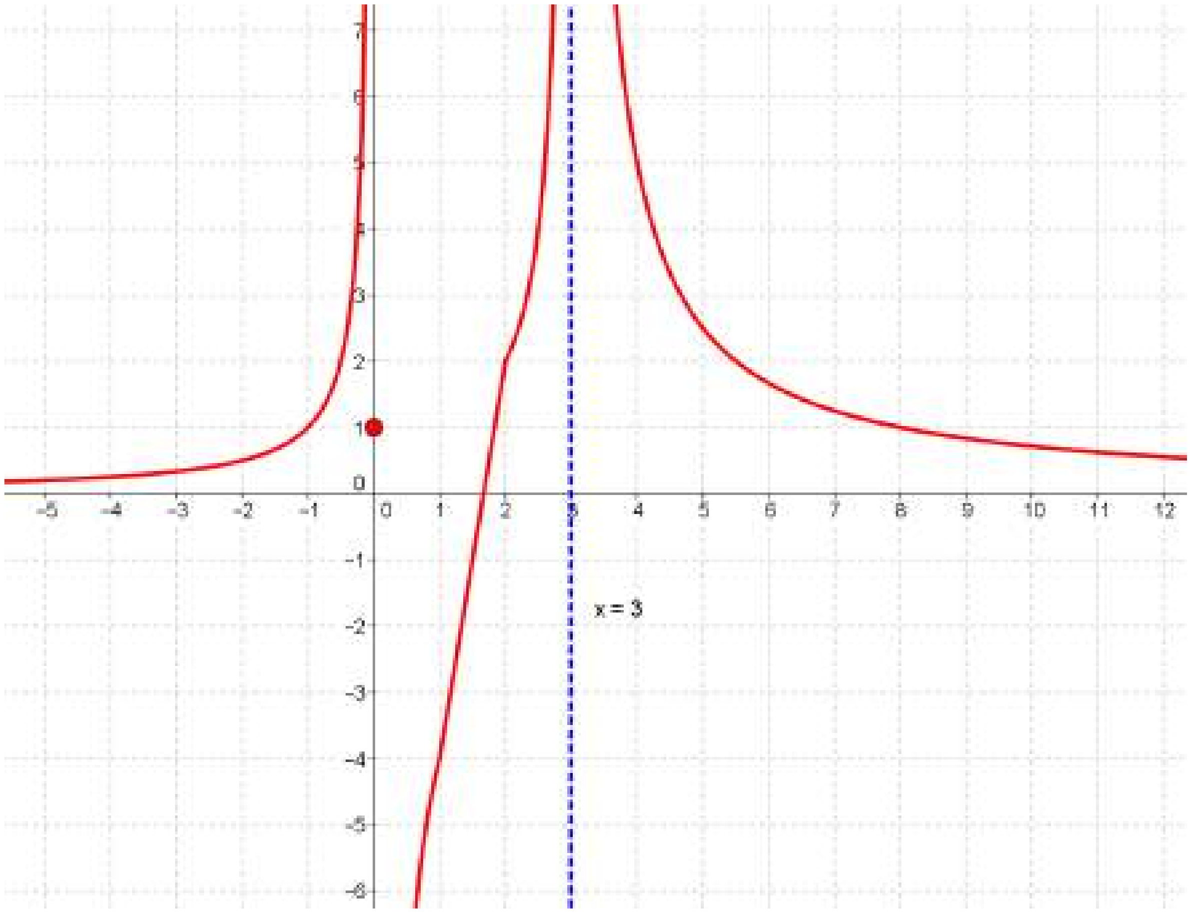
b)


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

c)


9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

d)



6. Los valores de los límites son:

a) $\lim_{x \to 0} 7 = 7$

b) $\lim_{x \to +\infty} x^{-3} = 0$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} (-3) = -3$

f) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^8} = +\infty$

i) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{11}} = 0$

j) $\lim_{x \to -1} x^4 = 1$

k) $\lim_{x \to 0^-} x^{-5} = -\infty$

l) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$

m) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

n) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^8} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^8} = +\infty$

p) $\lim\limits_{x \to -1} x^3 = -1$

ACTIVIDADES-PÁG. 232

7. El valor de los límites es:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1$

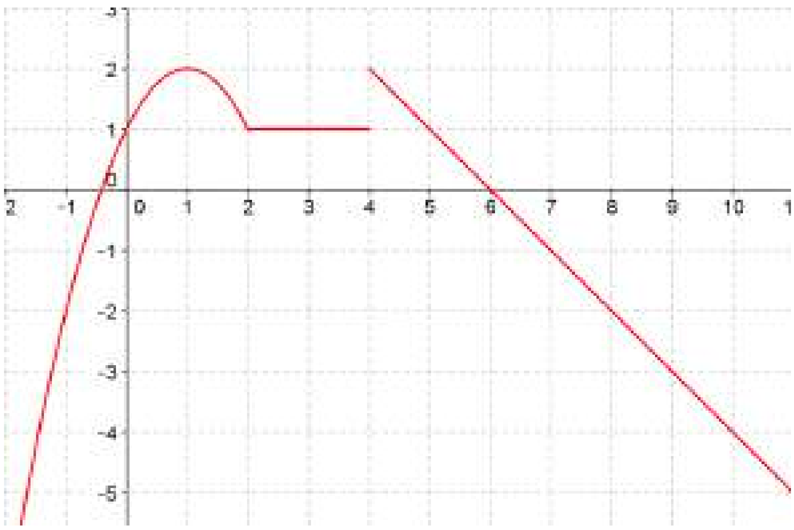
e) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$ no existe

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.



8. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 4) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 2x + 1}{6x^2 + 2x} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 6x^2 - 5) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 - 2}}{\sqrt[3]{8x^2 - 5x + 3}} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2x^3 - 4x + 6} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 7}}{4x} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 7}{-3x^2 - 3x + 4} = -1$

9. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3x} = -1$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x}{2x^3 + 3x^2 + 2x} = 1$

h) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6} = \dfrac{4}{13}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 1} = -\dfrac{4}{3}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 - \sqrt{7 - x}}{4 - \sqrt{13 + x}} = -2$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - 3x^3}{x^3 + x^2} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}$ no existe (los límites laterales son diferentes)

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}} = \sqrt{2}$

10. Los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{2x - 4}$ no existe, ya que: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{2x - 4} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^{+-}} \dfrac{x^2}{2x - 4} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - x}{x^2} = +\infty$ ya que: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4 - x}{x^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4 - x}{x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = +\infty$ ya que $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{3} \right) [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(x^2 + 2x)}{3x^3} \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\,(x + 2)}{3x^3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x+3} \cdot \sqrt{x^2+4} \right) [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4\sqrt{x^2+4}}{x+3} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 4$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2+2} \right) \right] [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x^2 \, (x+2)(x^2+2)} \left[\frac{0}{0} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\,(x-1)}{x^2\,(x+2)\,(x^2+2)}$ no existe, al ser los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x\,(x+2)\,(x^2+2)} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x\,(x+2)\,(x^2+2)} = -\infty$$

11. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 4x - 1} - 3x \right) = -\frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-2} \right) \right] = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+3}{x} - \frac{x^2-1}{x} \right) = 0$

ACTIVIDADES-PÁG. 233

12. Los límites son:

a) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x+2}{4x-3} \right)^{2x} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \cdot \left(\frac{4x+2}{4x-3} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{10x}{4x-3}} = e^{\frac{5}{2}}$$

b) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-7}{3x} \right)^{\frac{2x^2+1}{3x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{3x} \cdot \left(\frac{3x-7}{3x} - 1 \right)} = e^{-\frac{14}{9}}$$

c) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x} \right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{2}{5x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

d) El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3+2x}{x-5} \right)^{3x} = 2^{+\infty} = +\infty$$

e) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x} \cdot (1+3x-1)} = e^{6}$$

f) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5-3x}{4-3x} \right)^{x-3} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) \cdot \left(\frac{5-3x}{4-3x} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x+3}{-3x+4}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

13. Las soluciones son:

a) La función f(x) = $\frac{3x-2}{6x+6}$ tiene dos asíntotas: vertical de ecuación x = - 1 y horizontal de ecuación y = 1/2.

b) La función $f(x) = \frac{2}{x^2 - x}$ tiene tres asíntotas: dos verticales de ecuaciones x = 1 y x = 0 ; y una horizontal de ecuación y = 0.

c) La función f(x) = $\frac{x^2-1}{x}$ tiene dos asíntotas: vertical de ecuación x = 0 y oblicua de ecuación y = x.

d) La función f(x) = $\frac{3x}{x^2+4}$ tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 0.

e) La función $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$ tiene dos asíntotas: vertical de ecuación x = - 2 y oblicua de ecuación y = x – 4

f) La función f(x) = $\frac{3x^2-2}{6x+6}$ tiene dos asíntotas: Vertical de ecuación x = - 1 y oblicua de ecuación $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

14. A la vista de la gráfica podemos asegurar que:

a) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

b) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

c) La gráfica es continua para cualquier número real.

15. Los resultados son:

(I) a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ e) f (0) = 3

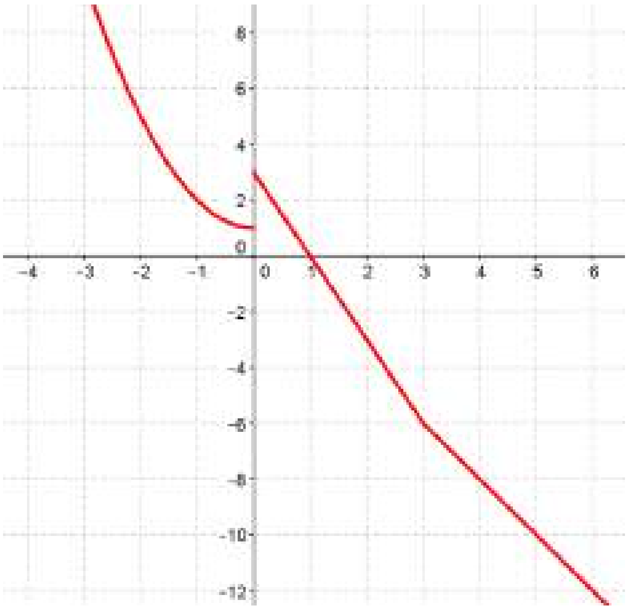
b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$ f) f (1) = 0

c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ g) f (3) = - 6

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = -6$

La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica adjunta.



(II) a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$ e) f (0) = - 4

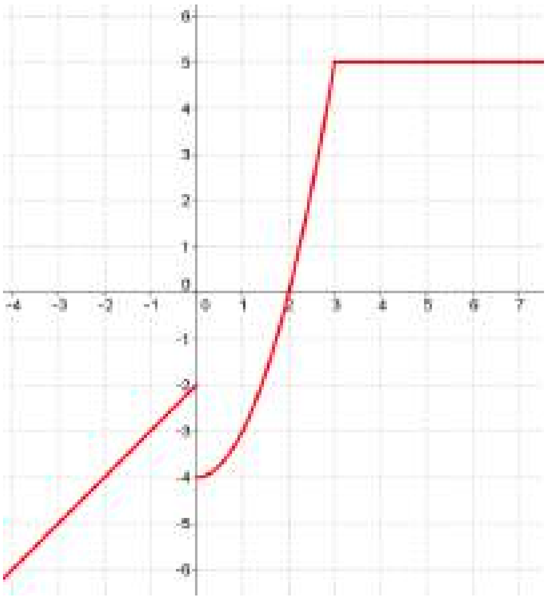
b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$ f) f (1) = - 3

c) $\lim_{x \to 1} f(x) = -3$ g) f (3) = 5

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica adjunta.



16. Los valores del parámetro a para que las funciones sean continuas es:

a) a = 6 b) a = 1

ACTIVIDADES-PÁG. 234

17. a) La función f (x) es continua en R – {- 2, 2}.

b) La función f (x) es continua en [- 1, 1].

c) La función f (x) no es continua en x = 4.

d) La función f (x) es continua en $(3, +\infty)$.

e) La función f (x) es continua en $[-2, 0) \cup (0 + \infty)$

f) La función f (x) no es continua en x = - 1 pues no esta definida. Tampoco es continua en x = 1.

g) La función f (x) es continua en R.

h) La función f (x) es continua en R

i) La función f (x) es continua en $(-\infty, 1) \cup (-2, +\infty)$.

18. La función dada es discontinua evitable en x = - 3 y discontinua no evitable en x = 3. La redefinimos para x = - 3 y queda:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{6x+18}{x^2-9} & si \quad x \neq -3 \\ -1 & si \quad x = -3 \end{cases}$$

19. a) En este momento hay 4000 águilas. Al cabo de 8 años habrá 7368 águilas y al cabo de 12 años habrá 7556 águilas, es decir, habrá aumentado el número.

b) Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{16t+12}{2t+3} \right) = 8$, es decir se estabilizará en 8 000 animales.

20. La función beneficio es: $B(t) = I(t) - G(t) = \dfrac{60t+700}{2t^2+8}$

Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{60t+700}{2t^2+8} \right) = 0$, es decir tienden a anularse.

21. a) La función es continua en $[0, +\infty)$

b) El 6º año hará un promedio de unas 35 fotocopias por minuto.

c) Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{12t+172}{t+1} \right) = 12$, es decir, hará 12 fotocopias por minuto, por término medio.

ACTIVIDADES-PÁG. 235

Dibujamos un triángulo equilátero, dividimos cada lado en tres partes y sobre la parte central, dibujamos otro triángulo equilátero, en el siguiente paso sobre cada uno de los 6 triángulos equiláteros repetimos el proceso e iterando obtenemos esta curva.

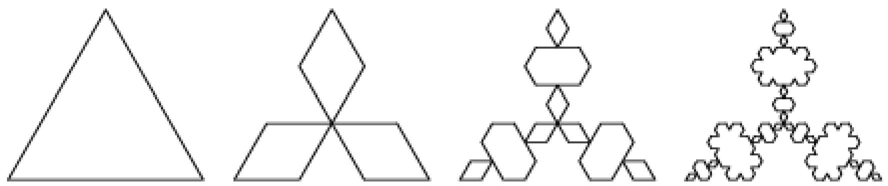
Consideramos que el triángulo equilátero inicial tiene de lado a unidades.

NÚMERO DE CURVA	PERÍMETRO	ÁREA
1	3a	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$
2	12a/3	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}$
3	48a/9	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4}$
4	192a/27	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4}+48\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{729\cdot 4}$
enésima	$\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a$	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$

Como vemos en la tabla la sucesión de los perímetros es una sucesión geométrica de razón 4/3. Por lo que su longitud es infinita pues $\lim_{n\to+\infty}\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a=+\infty$ .La sucesión de las áreas es una sucesión geométrica de razón 4/9. Su superficie es finita pues: $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

La propiedad que tienen estas curvas es que **siendo su longitud infinita encierran una superficie finita.**

La curva *anticopo de nieve* es la que vemos en el dibujo:



Es la configuración opuesta al copo de nieve. Se forma del mismo modo pero metiendo los triángulos hacia adentro.

Se obtienen los mismos resultados que en la anterior y tienen la misma propiedad.