MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS
3.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

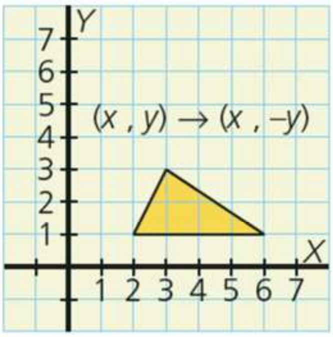
UNIDAD 10. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

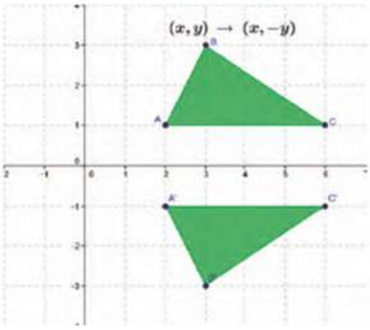
Unidad 10. Movimientos en el plano

SOLUCIONES PÁG. 226

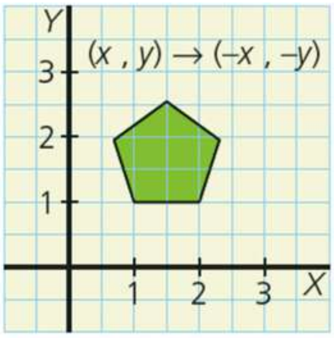
1 Copia en tu cuaderno estas figuras y dibuja, en cada caso, la figura homóloga en la transformación que se indica:

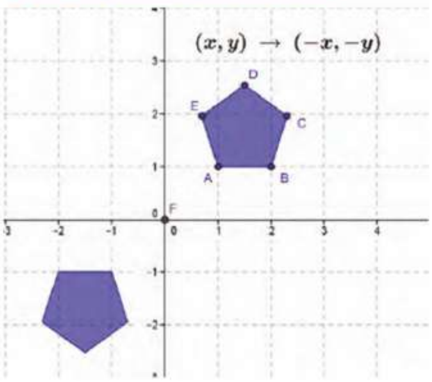
a.



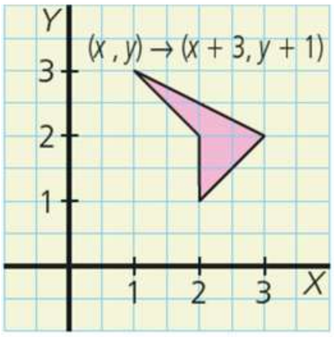


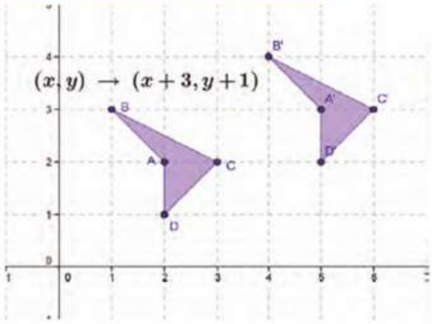
b.



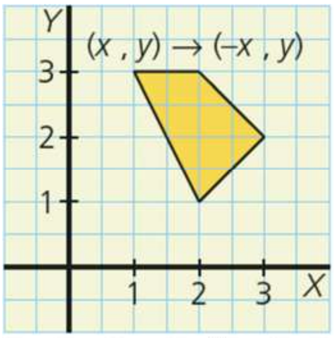


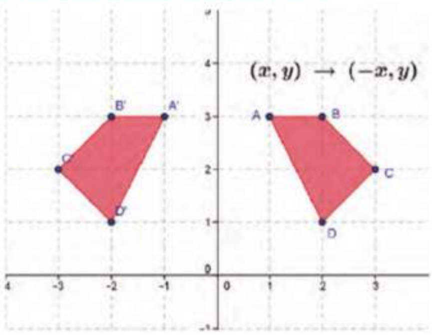
c.


$(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$

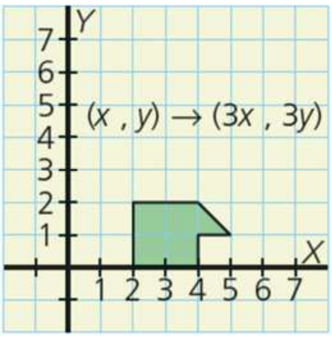

$(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$

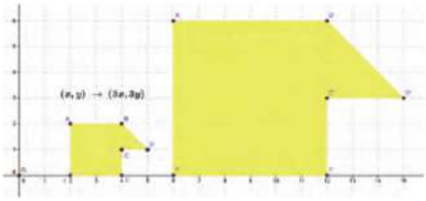
d.


$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

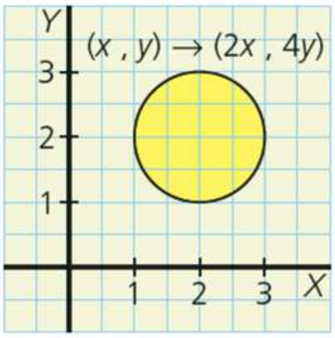

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

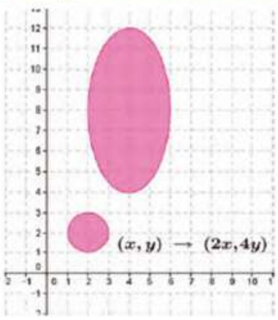
e.





f.





2 **Indica qué transformaciones de la actividad anterior cumplen las siguientes condiciones:**

a. **Conserva la forma y el tamaño de la figura.**
a., b., c., y d.

b. **Conserva la forma de la figura, pero no el tamaño.**
e.

3 **Actividad resuelta.**

4 Calcula los puntos invariantes en las siguientes transformaciones:

a. (x , y) → (2x – 1 , 2y + 1)

$2x-1=x \Rightarrow x=1$

$2y+1=y \Rightarrow y=-1$

El punto invariante es (1 , –1)

b. (x , y) → (2x , y + 1)

$x = 2x \Rightarrow 0 = x$

$y = y + 1 \Rightarrow 0y = 1$

No hay punto invariante.

c. (x , y) → (x^2 , 2y)

$$x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$y = 2y \Rightarrow y = 0$

Hay dos puntos invariantes: (0 , 0) y (1 , 0)

d. (x , y) → (x + y , x – y)

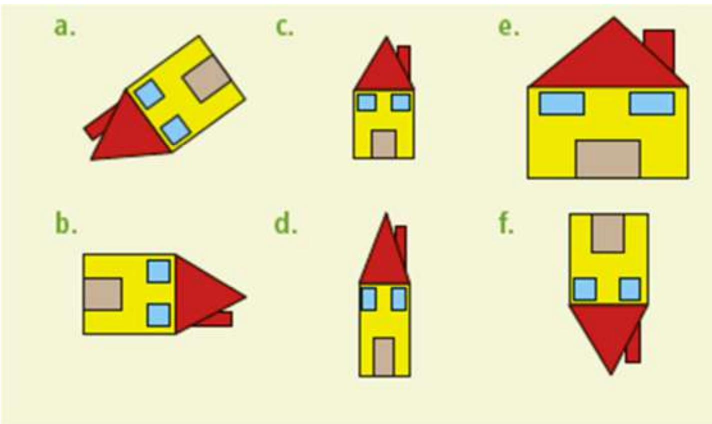
$x+y=x \Rightarrow y=0$

$x-y=y \Rightarrow x=2y \Rightarrow x=0$

Hay un punto invariante: (0 , 0)

SOLUCIONES PÁG. 227

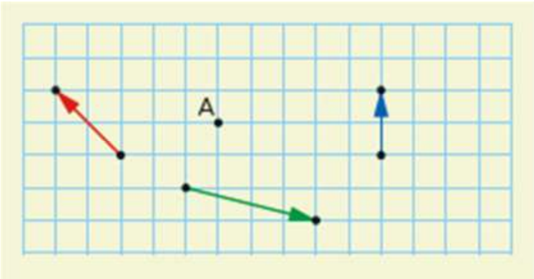
5 Señala, en cada caso, si la transformación en el plano que se ha aplicado a la figura adjunta corresponde a un movimiento, indicando, en caso afirmativo, si es directo o inverso.

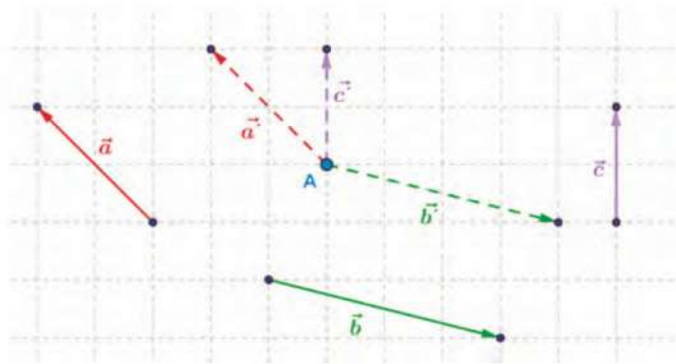


Movimientos directos: a. y b. porque conservan la orientación de los ángulos.
Movimientos inversos: f., porque invierte la orientación de los ángulos.
No son movimientos: c., d., e, porque no se conserva el tamaño de la figura original.

SOLUCIONES PÁG. 229

6 Copia en tu cuaderno estos vectores y traza un vector equipolente a cada uno de ellos con origen en A:





7 Representa los siguientes vectores y determina sus coordenadas y sus módulos:

a. $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$**, con A (4 , 2) y B (2 , 2)**

$\overrightarrow{AB}$ = (2 , 2) – (4 , 2) = (–2 , 0)

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

b. $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$**, con C (–1 , 3) y D (4 , –2)**

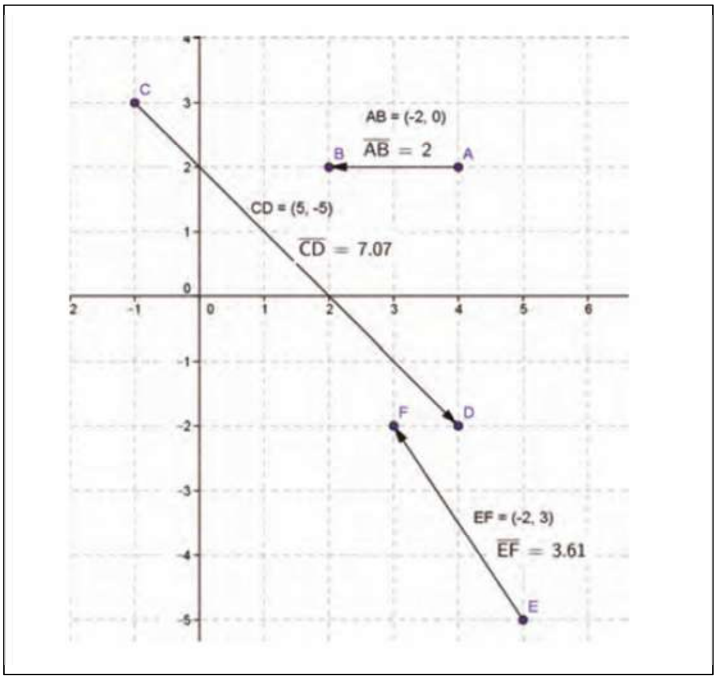
$\overrightarrow{CD}$ = (4 , –2) – (–1 , 3) = (5 , –5)

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 7{,}07$

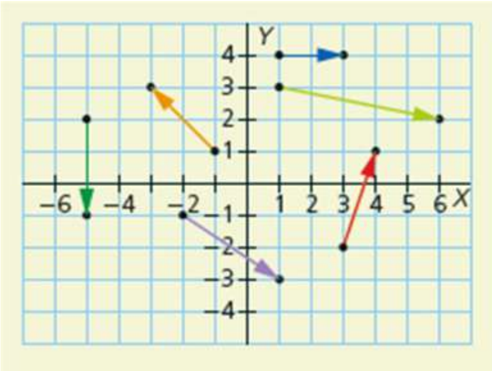
c. $\overrightarrow{\mathbf{EF}}$**, con E (5 , –5) y F (3 , –2)**

$\overrightarrow{EF}$ = (3 , –2) – (5 , –5) = (–2 , 3)

$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3{,}61$



8 **Halla las coordenadas y el módulo de cada vector.**



$\overrightarrow{AA_1}$ = (3 , 4) – (1 , 4) = (2 , 0)

$\left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$\overrightarrow{BB_1}$ = (6 , 2) – (1 , 3) = (5 , –1)

$\left|\overrightarrow{BB_1}\right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = 5,2$

$\overrightarrow{CC_1}$ = (4 , 1) – (3 , –2) = (1 , 3)

$\left|\overrightarrow{CC_1}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,16$

$\overrightarrow{DD_1}$ = (1 , –3) – (–2 , –1) = (3 , –2)

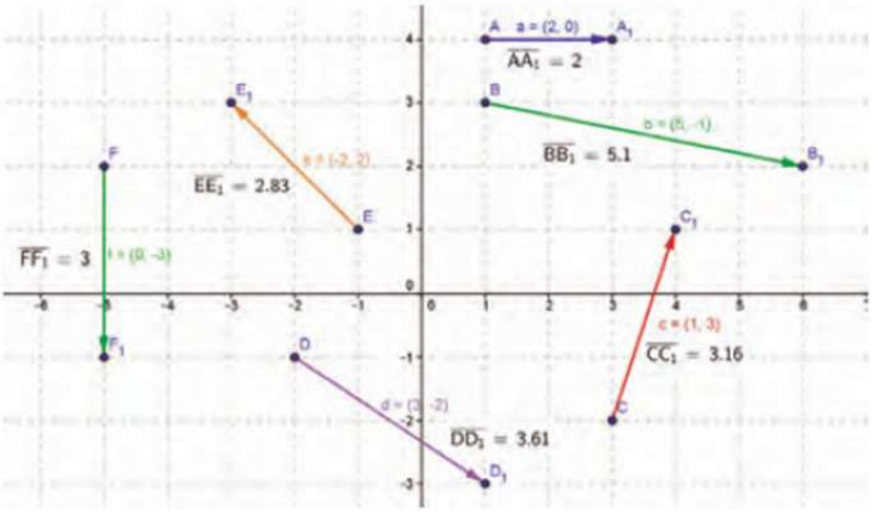
$\left|\overrightarrow{DD_1}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = 3,61$

$\overrightarrow{EE_1}$ = (–3 , 3) – (–1 , 1) = (–2 , 2)

$\left|\overrightarrow{EE_1}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2,83$

$\overrightarrow{FF_1}$ = (–5, –1) – (–5 , 2) = (0 , –3)

$\left|\overrightarrow{FF_1}\right| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$



9 Considera el vector $\overrightarrow{AB}$ = (7 , –4), con origen en el punto A = (2 , –1). ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow (7\ ,\ -4) = B - (2, -1) \Rightarrow B = (7\ ,\ -4) + (2, -1) \Rightarrow$ B = (9 , –5)

10 ¿Cuál debe ser el valor de *x* para que el módulo del vector $\vec{v}$ = (–6 , *x*) sea 10 unidades?

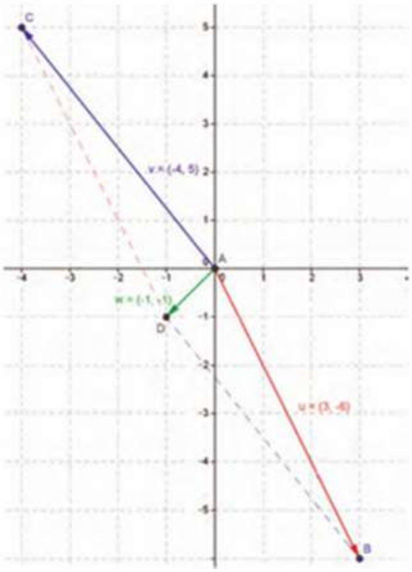
$$\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = 10 \\ |\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = \sqrt{(-6)^2 + x^2} \Rightarrow 100 = 36 + x^2 \Rightarrow x = \pm 8$$

11 Dados los vectores $\vec{u}$ = (3 , –6) y $\vec{v}$ = (–4 , 5):

a. Obtén las coordenadas del vector $\vec{u} + \vec{v}$.

$\vec{u} + \vec{v}$ = (–1 , –1)

b. Realiza la suma gráficamente y comprueba que el resultado concuerda con lo obtenido en el apartado anterior.



12 Calcula la longitud de los lados de un triángulo que tiene sus vértices en los puntos A (–1 , 2), B (3 , –5) y C (–2 , –3).

La longitud de los lados del triángulo son los módulos de los vectores determinados por cada par de vértices.

$\overrightarrow{AB}$ = (3 , –5) – (–1 , 2) = (4 , –7)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = 8{,}06$$

$\overrightarrow{BC}$ = (–2 , –3) – (3 , –5) = (–5 , 2)

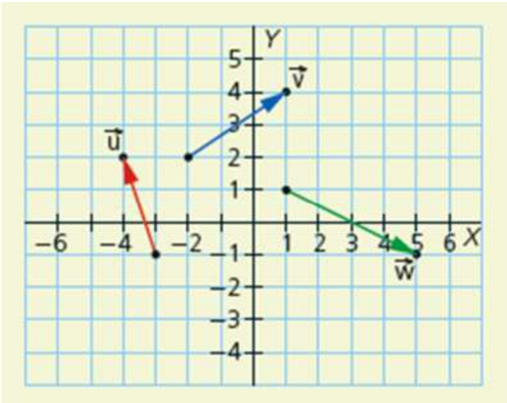
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = 5{,}39$$

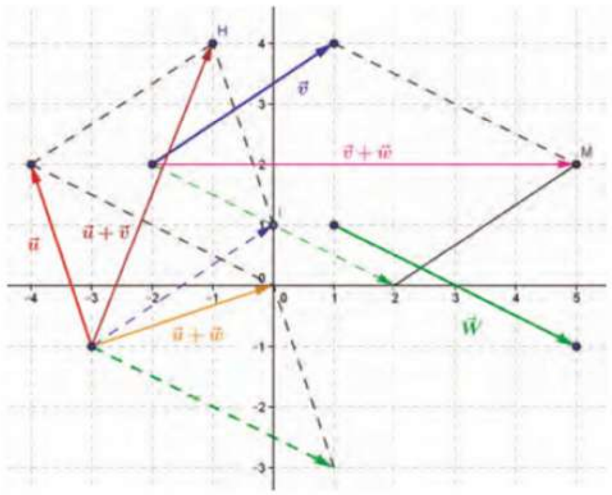
$\overrightarrow{AC}$ = (–2 , –3) – (–1 , 2) = (–1 , –5)

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = 5{,}1$$

Así, las longitudes de los lados del triángulo son:
AB = 8,06; BC = 5,39; AC = 5,1

13 Copia en tu cuaderno los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y realiza gráficamente las sumas, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{v} + \vec{w}$.

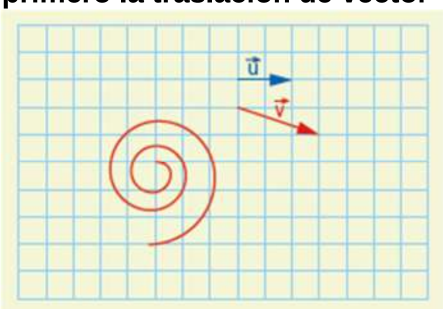




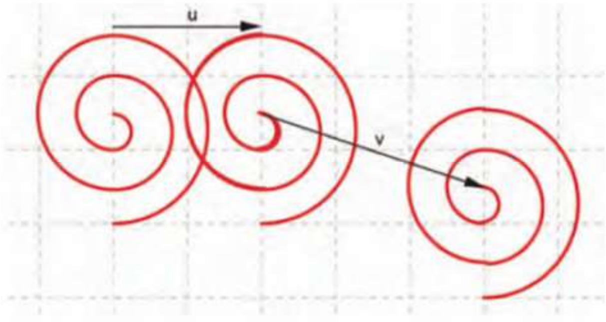
SOLUCIONES PÁG. 231

14 Actividad resuelta.

15 Copia este dibujo en tu cuaderno y aplica a la figura dos traslaciones sucesivas de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente. ¿Qué sucede si aplicas primero la traslación de vector $\vec{v}$ y después la de vector $\vec{u}$? ¿Por qué?



Se obtiene el mismo resultado con independencia del orden en que se realicen las traslaciones, ya que la composición de dos traslaciones es una traslación de vector $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.



16 Calcula, en cada caso, el vector de la traslación que transforma el primer punto en el segundo.

a. A (–3 , 4) en A’ (2 , 6)

$\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ = A’– A = (2 , 6) – (–3 , 4) = (5 , 2)

b. B (5 , –9) en B’ (0 , 3)

$\vec{u} = \overrightarrow{BB'}$ = B’– B = (0 , 3) – (5 ,–9) = (–5 , 12)

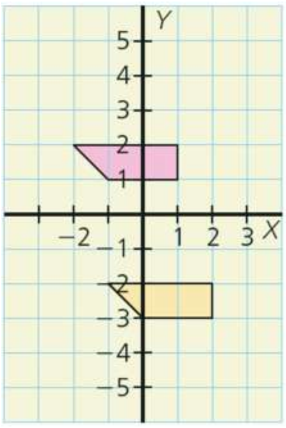
c. C (0 , –1) en C’ (7 , –3)

$\vec{w} = \overrightarrow{CC'}$ = C’– C = (7 , –3) – (0 , –1) = (7, –2)

17 Determina, en cada caso, el vector de la traslación que transforma la figura rosa en la figura naranja.

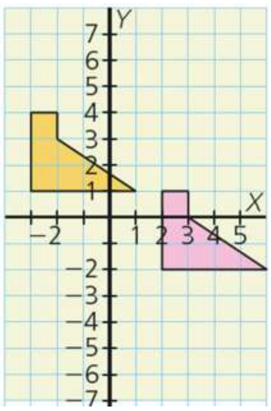
Se elige un punto de la figura naranja y su homólogo en la figura rosa y se restan.

a.



$\overrightarrow{v_1}$ = (–1 , –2) – (–2 , 2) = (1 , –4)

b.



$\overrightarrow{v_2}$ = (2 , –2) – (–3 , 1) = (5 , –3)

18 ¿Qué coordenadas ha de tener un punto, A, para que al aplicarle dos traslaciones sucesivas de vectores $\vec{v}$ = (–4 , –3) y $\vec{u}$ = (5 , –1), se obtenga el punto A'' (0 , 5)?

El vector A'' = A + $\vec{v}$ + $\vec{u}$; luego:

(0 , 5) = A + (–4 , –3) + (5 , –1) $\Rightarrow$ A = (0 , 5) – (–4 , –3) – (5 , –1) $\Rightarrow$ A = (–1 , 9)

19 Al aplicar al punto A (2 , 4) dos traslaciones sucesivas de vector $\vec{v}$, se obtiene el punto A'' (5 , 3). ¿Cuáles son las coordenadas de dicho vector?

El vector A'' = A + 2$\vec{v}$; luego:

(5 , 3) = (2 , 4) + 2$\vec{v}$ $\Rightarrow$ 2$\vec{v}$ = (3 , –1) $\Rightarrow$ $\vec{v}$ = $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

20 Dados los puntos A (1 , –1), B (3 , 2) y C (4 , 6), halla:

a. Las coordenadas de un cuarto punto, D, de manera que la figura de vértices ABCD sea un paralelogramo.

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{CD}$ son las mismas que las del vector $\overrightarrow{BA}$. Así:

$\overrightarrow{BA}$ = (1 , –1) + (3 , 2) = (–2 , –3)

A partir del vector $\overrightarrow{CD}$ se obtiene el punto D:

D = C + $\overrightarrow{CD}$ = (4 , 6) + (–2 , –3) = (2 , 3)

b. La longitud de los lados AB y BC.

La longitud de los lados AB y BC son los módulos de los vectores que tienen dichos puntos como componentes:

$\overrightarrow{AB}$ = (3 , 2) – (1 , –1) = (2 , 3)

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,61$

$\overrightarrow{BC}$ = (4 , 6) – (3 , 2) = (1 , 4)

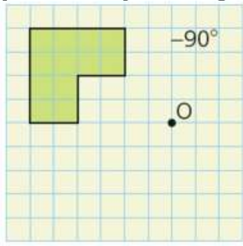
$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2} = 4,12$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = 3,61 u; $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ = 4,12 u

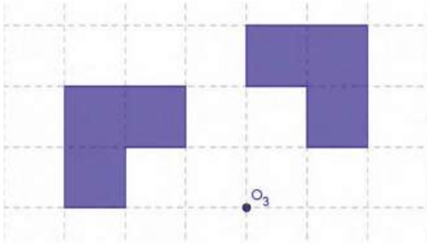
SOLUCIONES PÁG. 233

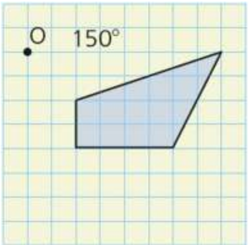
21 Actividad resuelta.

22 Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y aplícales el giro con centro en el punto O y el ángulo indicado:

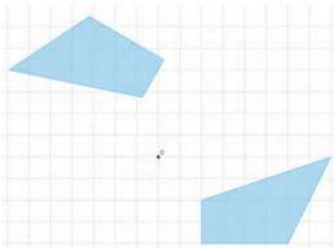


⇒

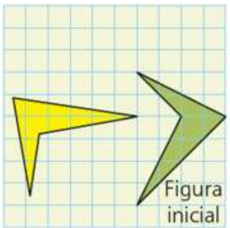




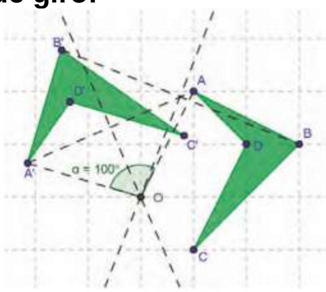
⇒

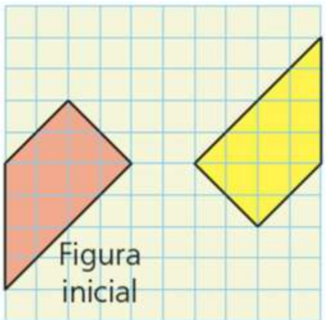


23 Copia las siguientes figuras en tu cuaderno y determina, en cada caso, el centro y el ángulo de giro:

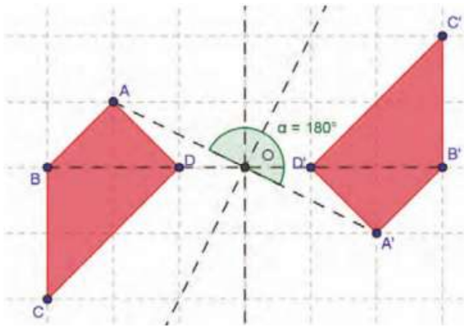


⇒

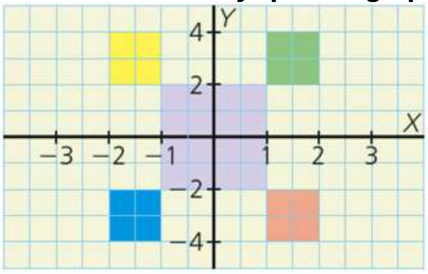


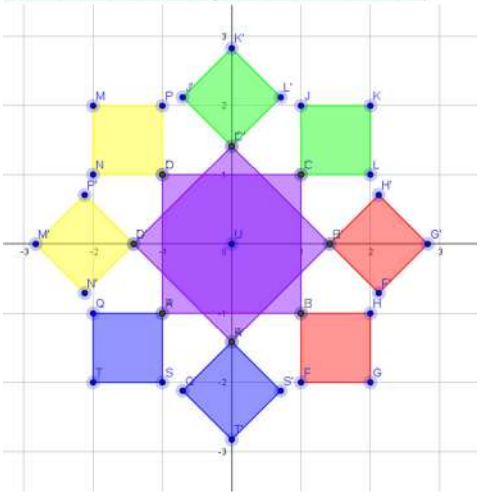


⇒



24 **Copia en tu cuaderno esta figura y aplícale un giro cuyo centro sea el origen de coordenadas y que tenga por ángulo 45°:**

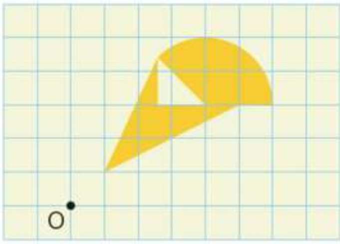




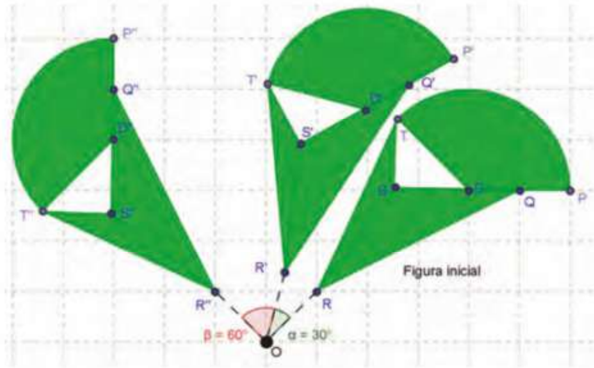
a. **¿Qué ángulo debe tener un giro para hacer coincidir el cuadrado verde con el amarillo?**
Un ángulo de 90º.

b. **¿Y para hacer coincidir el verde con el rojo?**
270º en sentido positivo, o bien –90º en sentido negativo.

25 Copia en tu cuaderno esta figura y aplícale dos giros sucesivos con centros en el punto O y ángulos de 30° y 60°. ¿Qué sucede si se aplica primero el giro de 60° y después el de 30°? ¿Por qué?



Se obtiene el mismo resultado porque la composición de dos giros del mismo centro es otro giro de igual centro y ángulo $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 90º$.



26 Razona e indica si existe algún giro, con $0 < \alpha < 360°$, que deje invariantes las siguientes figuras y determina, cuando corresponda, el centro y el ángulo de giro:

a. Un cuadrado.
El centro de giro es el punto de intersección de las diagonales. La figura queda invariante bajo un giro de 90º, 180º y 270º.

b. Un rectángulo.
El centro de giro es el punto de intersección de las diagonales. La figura queda invariante bajo un giro de 180º.

c. Un rombo.
El centro de giro es el punto de intersección de las diagonales. La figura queda invariante bajo un giro de 180º.

d. Un romboide.
El centro de giro es el punto de intersección de las diagonales. La figura queda invariante bajo un giro de 180º.

e. Un triángulo equilátero.
El centro de giro es el baricentro (que coincide con el resto de puntos notables). La figura queda invariante bajo un giro de 120º y 240º.

f. Un triángulo isósceles.
No hay ningún giro de ángulo menor que 360º que lo deje invariante.

g. Un pentágono regular.
El centro de giro es el punto de intersección de las mediatrices de los lados. La figura queda invariante bajo un giro de 72º, 144º, 216º y 288º.

h. Un hexágono regular.
El centro de giro es el punto de intersección de las diagonales que unen vértices opuestos. La figura queda invariante bajo un giro de 60º, 120º, 180º, 240º y 300º.

Extrae conclusiones sobre la posición del centro y el valor del ángulo del giro que deja invariante a un polígono regular de n lados.

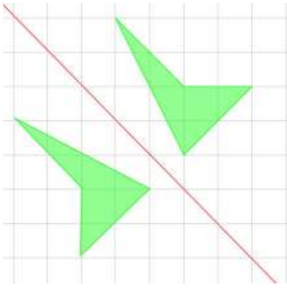
Cuando el polígono es regular, lo deja invariante un giro cuyo centro es el centro del polígono y cuyo ángulo de giro es $\frac{360^o}{n}k$, donde k = 1, 2, ..., n – 1 (siendo n el número de lados del polígono).

SOLUCIONES PÁG. 237

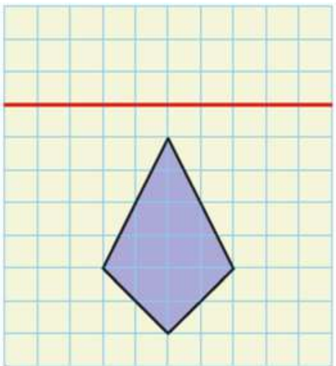
27 Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y aplícales una simetría axial cuyo eje sea el que se indica:

a.

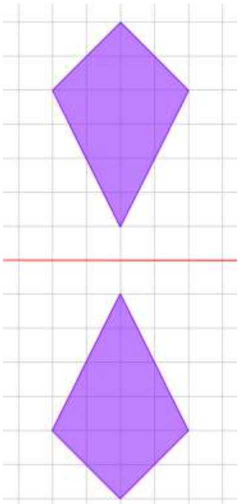
$\Rightarrow$



b.

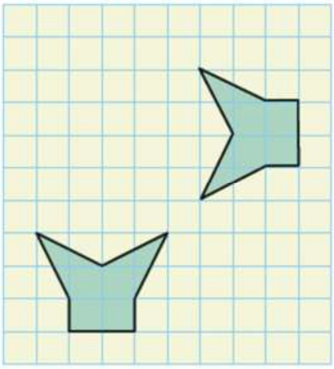


$\Rightarrow$

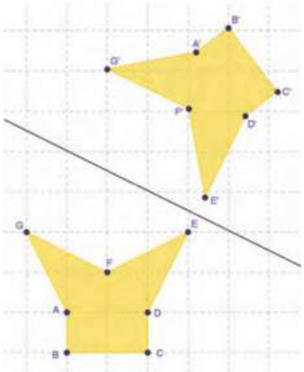


28 **Los siguientes pares de figuras resultan de aplicar simetrías axiales. Cópialas en tu cuaderno y traza, en cada caso, el eje de simetría.**

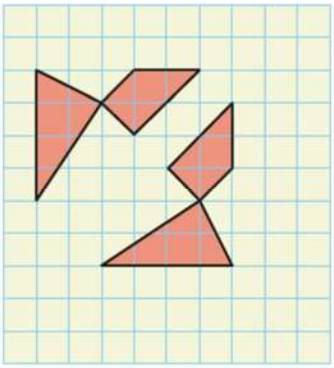
a.



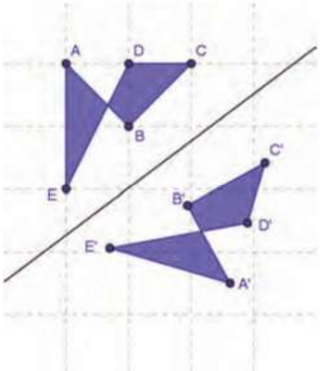
⇒



b.

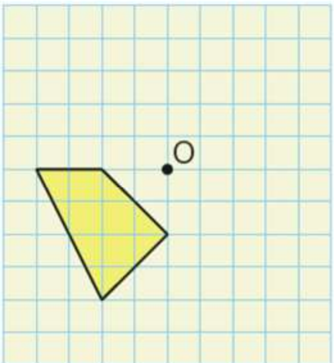


⇒

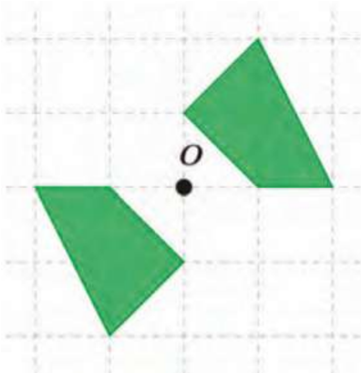


29 **Copia en tu cuaderno las figuras y aplícales la simetría central cuyo centro se indica:**

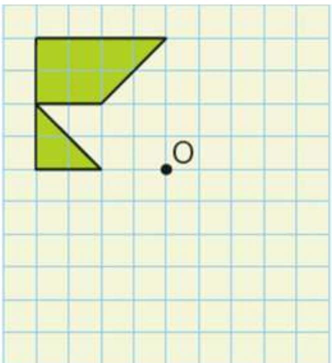
a.



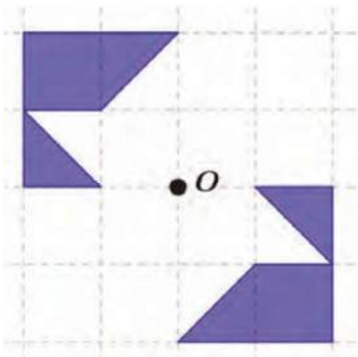
⇒



b.



⇒

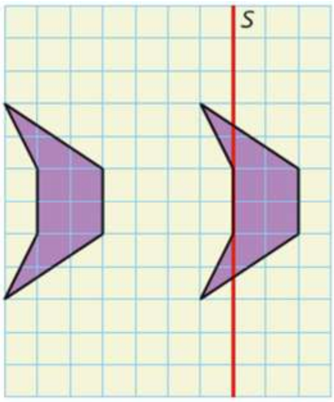


30 A las figuras del dibujo se les ha aplicado una simetría de eje *r* y posteriormente una simetría de eje paralelo *s.* Copia las figuras y dibuja en tu cuaderno, en cada caso, el eje *r.*

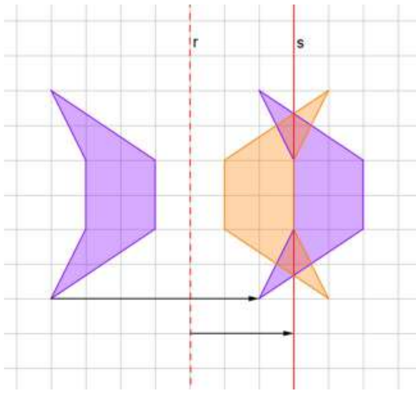
El resultado de aplicar dos simetrías sucesivas de ejes paralelos es una traslación de vector perpendicular a dichos ejes cuyo módulo es dos veces la distancia entre las rectas.

Se toman dos puntos homólogos y se traza el vector que los une, con origen en el punto homólogo de la primera figura. Se designa con *r* la recta paralela a *s* situada a una distancia que es justo la mitad del módulo de dicho vector.

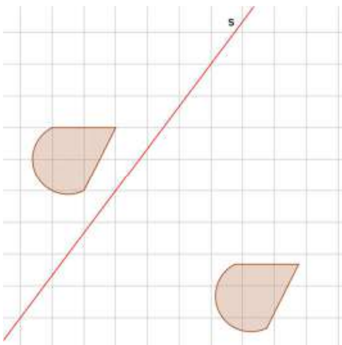
a.



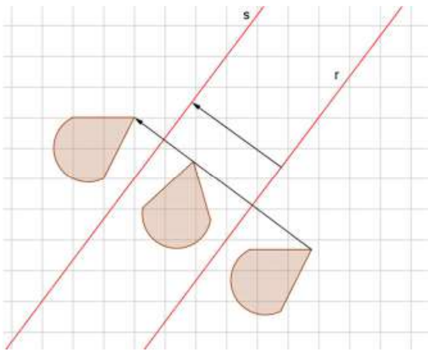
⇒



b. *(Nota: en la primera edición del libro del alumno la figura que aparece es incorrecta. Debe ser esta.)*

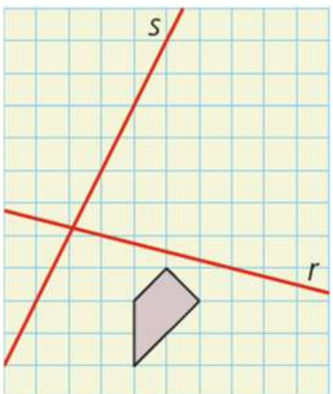


⇒

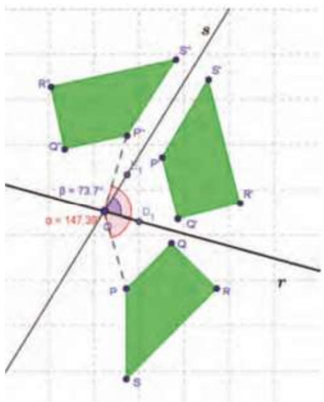


31 Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y aplícales dos simetrías axiales sucesivas de ejes *r* y *s,* respectivamente. ¿Mediante qué movimiento se puede pasar de la primera figura a la última figura transformada sin pasar por la intermedia?

a.

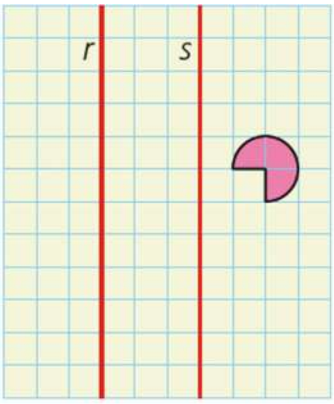


⇒

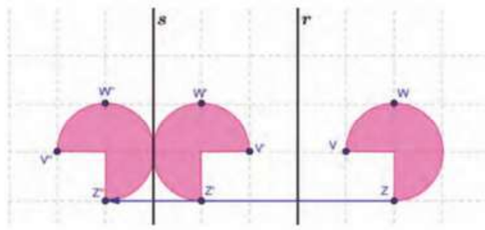


Se puede pasar de la primera a la última figura mediante un giro de centro el punto de intersección de las dos rectas, O, y de ángulo igual a 147,39º, ya que el ángulo que forma r con s es de 73,695º.

b.



⇒



Se puede pasar de la primera a la última figura mediante una traslación de vector $\overrightarrow{ZZ''}$ cuya dirección es perpendicular a los ejes y cuyo módulo es de 6 unidades, ya que la distancia entre los ejes es de 3 unidades.

32 Dibuja en tu cuaderno una figura y aplícale dos simetrías centrales sucesivas de centros diferentes, O y O´, respectivamente. ¿Mediante qué movimiento se puede pasar de la primera figura a la última figura transformada sin pasar por la intermedia?

Mediante una traslación de vector $2 \cdot \overrightarrow{OO'}$.

SOLUCIONES PÁG. 238

1 Inserta varias imágenes y compón una escena con traslaciones y giros.

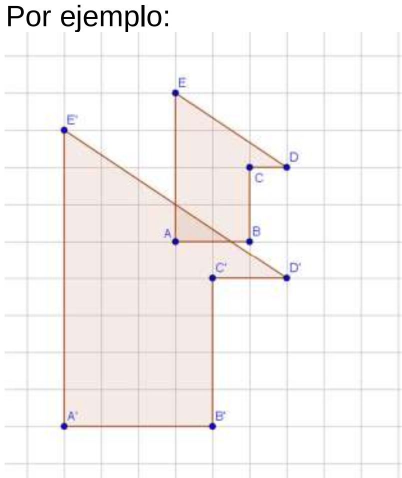
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 239

1 ¿Qué es una transformación en el plano? Pon un ejemplo.

Es una aplicación que hace corresponder a cada punto, A (*x* , *y*), del plano otro punto A' (*x'* , *y'*), denominado homólogo del punto A en la transformación.

Por ejemplo:



2 ¿Cómo se llama el punto transformado de otro punto? ¿Qué son los puntos dobles? ¿Cuándo se puede afirmar que una figura es doble?

Se llama punto homólogo. Los puntos dobles en una transformación geométrica son los que coinciden con su homólogo. Una figura es doble cuando coincide con su homóloga.

3 ¿Cuándo se puede afirmar que una transformación es un movimiento? ¿Qué tipos de movimientos existen?

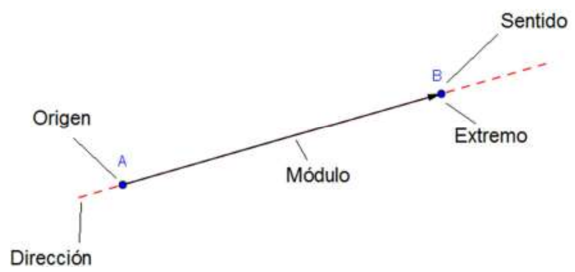
Una transformación es un movimiento cuando se conserva el tamaño y la forma de la figura original.

Existen dos tipos de movimientos, los directos, en los que se conserva la orientación de los ángulos, y los inversos, en los que se invierte la orientación de los ángulos.

4 ¿Qué es un vector? Comprueba que conoces todos sus elementos y que sabes calcular las coordenadas de un vector a partir del origen y el extremo.

Un vector es un segmento orientado del que se conoce su origen, A, y su extremo, B. Se denota como $\overrightarrow{AB}$.

Los elementos de un vector son:



Sean, por ejemplo, los puntos A (5 , 4) y B (–8 , 8), las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ viene determinado por la diferencia entre el punto extremo, B, y el punto origen, A:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-8 , 8) - (5 , 4) = (-13 , 4)$

5 ¿Cuándo decimos que dos vectores son equipolentes? ¿Cómo son las coordenadas de dos vectores equipolentes? Comprueba que sabes sumar vectores tanto analítica como gráficamente.

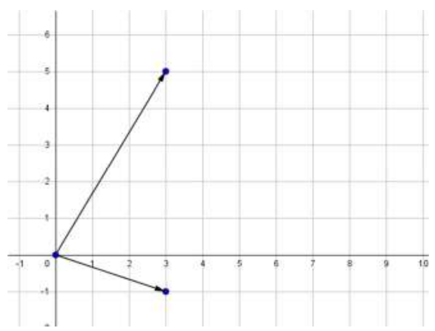
Dos vectores son equipolentes cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Tienen por tanto las mismas coordenadas.

Sean, por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{AB} = (3 , 5)$ y $\overrightarrow{CD} = (3 , -1)$, la suma analítica de los vectores es:

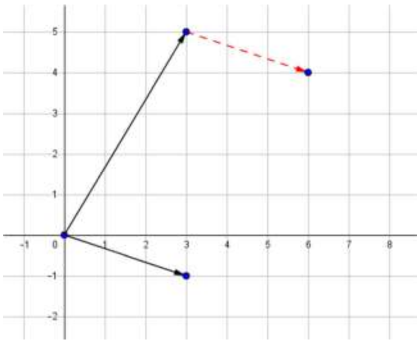
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (3 , 5) + (3 , -1) = (6 , 4)$

La suma gráfica es:

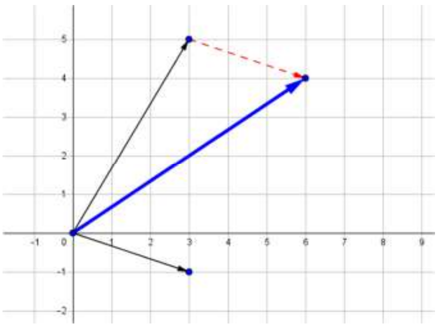
1. Se representan los dos vectores haciendo coincidir su origen.



2. Se traza un vector equipolente a $\overrightarrow{CD}$ con origen en el extremo del vector $\overrightarrow{AB}$.



3. El vector suma viene determinado por el vector que tiene como origen el origen del vector $\overrightarrow{AB}$ y como extremo el extremo del vector equipolente de $\overrightarrow{CD}$



6 ¿En qué consiste trasladar una figura mediante un vector? Asegúrate de que sabes trasladar una figura analítica y gráficamente.

Consiste en un movimiento que transforma cada punto, A, de la figura en otro punto, A', de manera que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

Para trasladar una figura analíticamente se suma a cada punto las coordenadas del vector, $\vec{v}$: A' = A + $\vec{v}$.

Sea, por ejemplo, la figura de vértices A (5 , –2), B (9 , –3), C (11 , –1) y D (5 , 2). Dicha figura se quiere trasladar mediante un vector $\vec{v}$ = (4 , 1). La traslación analítica sería:

A' = A + $\vec{v}$ $\Rightarrow$ A' = (5 , –2) + (4 , 1) $\Rightarrow$ A' = (9 , –1)

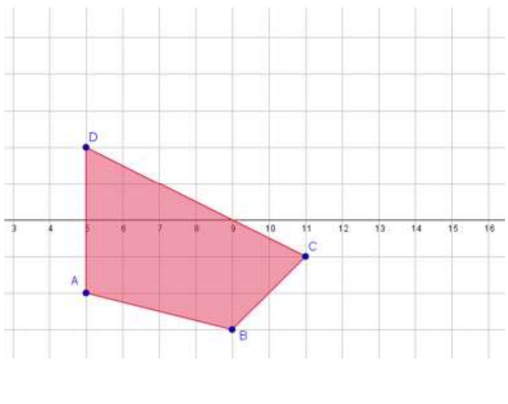
B' = B + $\vec{v}$ $\Rightarrow$ B' = (9 , –3) + (4 , 1) $\Rightarrow$ B' = (13 , –2)

C' = C + $\vec{v}$ $\Rightarrow$ C' = (11 , –1) + (4 , 1) $\Rightarrow$ C' = (15 , 0)

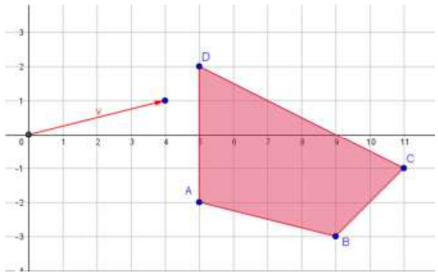
D' = D + $\vec{v}$ $\Rightarrow$ D' = (5 , 2) + (4 , 1) $\Rightarrow$ D' = (9 , 3)

Para realizar la traslación gráfica se siguen estos pasos:

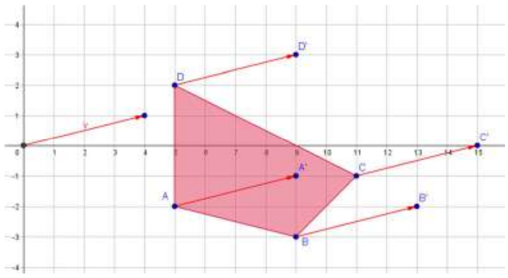
1. Se representan los vértices de la figura inicial en los ejes de coordenadas y se unen los segmentos:



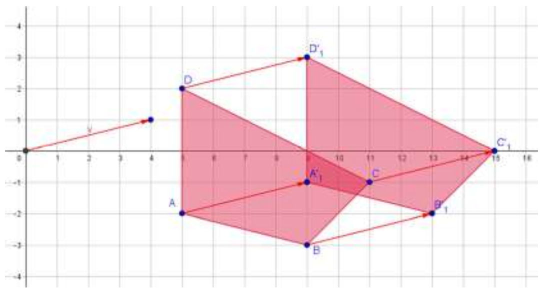
2. Se dibuja el vector $\vec{v}$:



3. Se dibujan los vectores equipolentes a $\vec{v}$ con origen en cada uno de los vértices de la figura. Los extremos de dichos vectores corresponden a los vértices homólogos de la figura trasladada:



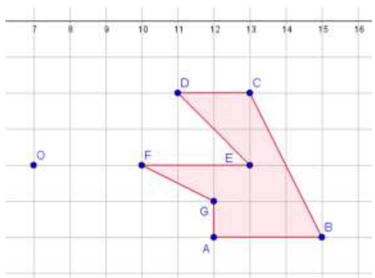
4. Se unen los vértices homólogos con segmentos, con lo que se obtiene la figura trasladada:



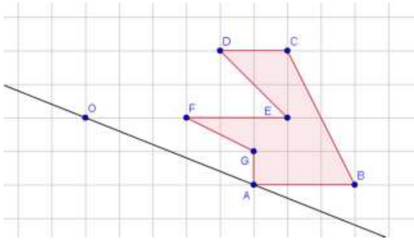
7 **¿En qué consiste un giro de centro O y ángulo α? Asegúrate de que sabes realizar un giro gráficamente, así como encontrar el centro y el ángulo de giro, dada una figura original y su homóloga. ¿Qué sucede si se aplican dos giros sucesivos de igual centro?**

Consiste en un movimiento que transforma cada punto A del plano en otro punto A' de manera que $\overline{OA} = \overline{OA'}$ y $\widehat{AOA'} = \alpha$.

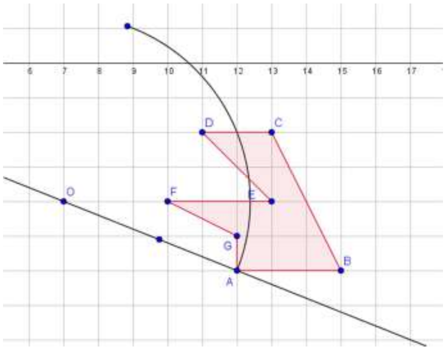
Si se quiere girar la siguiente figura con centro en O y un ángulo de 75º, se siguen estos pasos:



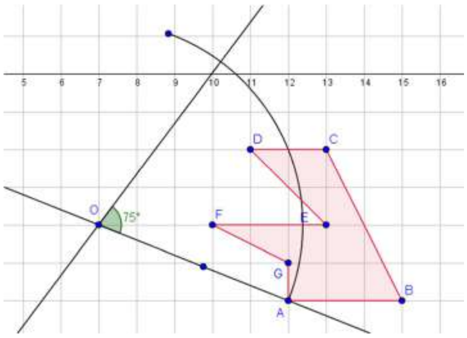
1. Se traza una recta, *r,* que pases por el vértice A y el centro de giro O:



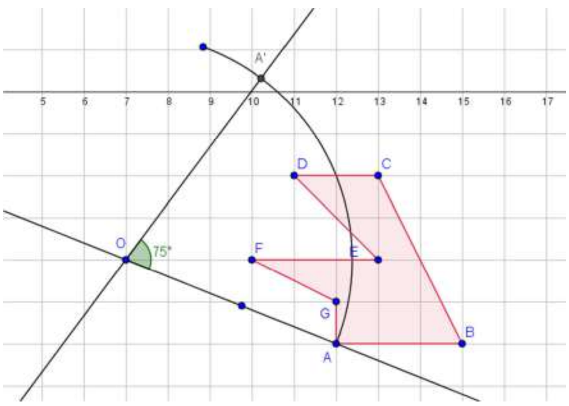
2. Se traza un arco de circunferencia centrado el O y de radio OA:



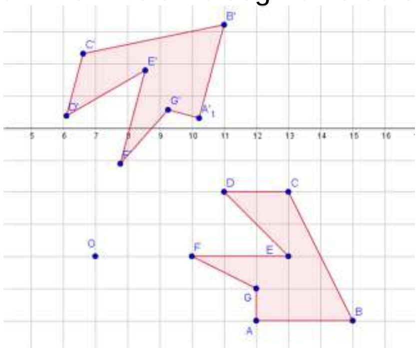
3. Se traza una recta, *r’*, que pase por el centro O y forme un ángulo de 75º con *r:*



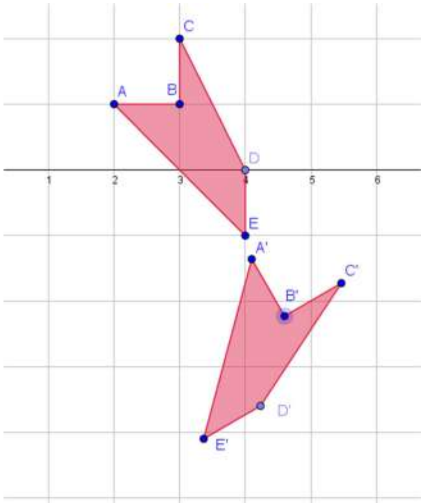
4. El punto de intersección del arco de circunferencia con la recta *r*’ es el vértice homólogo, A’, de la figura girada:



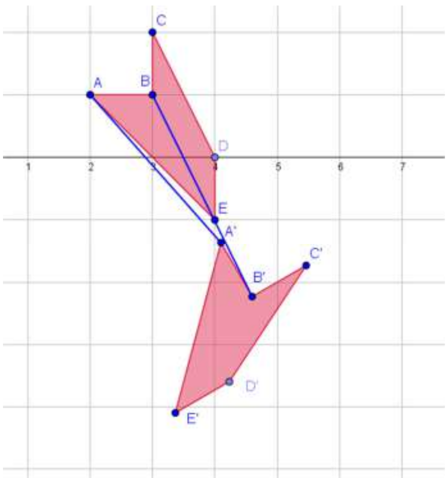
5. Procediendo de igual forma con el resto de vértices de la figura, se hallan los vértices homólogos; al unirlos mediante segmento se obtiene la figura girada:



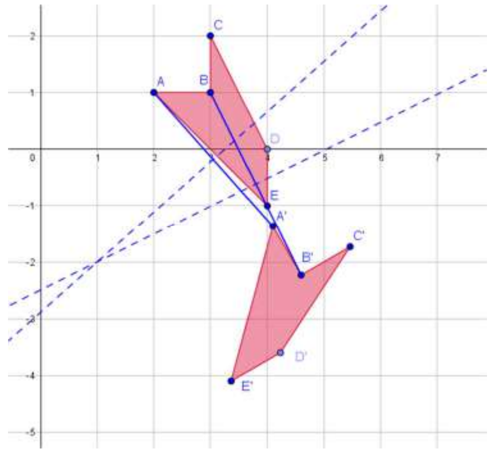
Para encontrar el centro y el ángulo de giro dadas una figura y su homóloga se siguen estos pasos:



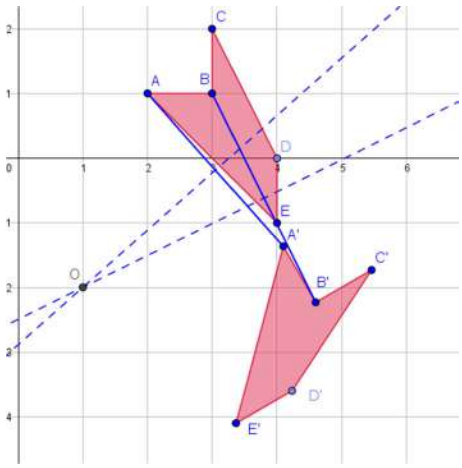
1. Se unen dos parejas de puntos homólogos mediante segmentos:



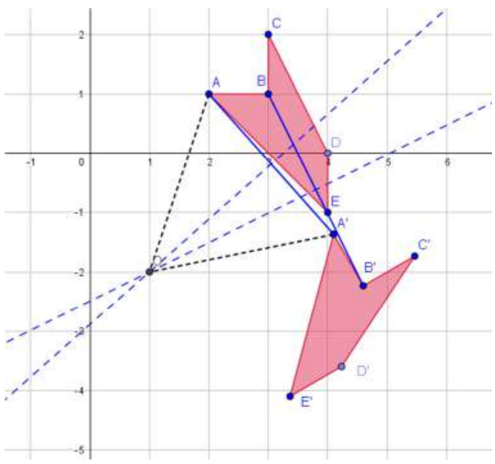
2. Se trazan las rectas mediatrices de ambos segmentos:



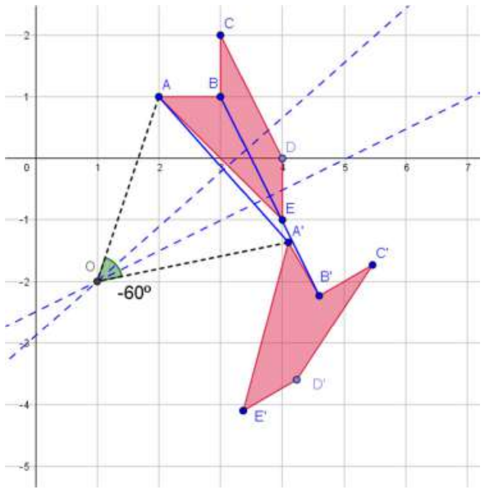
3. El punto de corte de las dos mediatrices es el centro de giro O:



4. Se traza el segmento OA y el segmento OA':



5. Se mide el ángulo $\widehat{AOA'}$ que corresponde al ángulo de giro α. Su signo es, en este caso, negativo, por ir en el mismo sentido de las agujas del reloj:



8 ¿Qué es una simetría central? ¿A qué equivale? ¿Qué efecto tiene sobre las coordenadas de un punto una simetría cuyo centro es el origen de coordenadas?

Una simetría central de centro O es un movimiento que asocia a cada punto del plano, A, otro punto, A', llamado simétrico, de manera que el punto O es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$. Equivale a un giro de 180º. El simétrico de un punto (*x* , *y*) mediante una simetría central de centro el origen de coordenadas es el punto A (*x'* , *y'*).

9 ¿Qué es una simetría axial? Comprueba que sabes trazar gráficamente la figura simétrica de una figura dada, así como el eje de simetría, dada una figura y su simétrica.

Una simetría axial o respecto de una recta, *r,* es un movimiento que transforma cada punto A del plano en otro punto, A', llamado simétrico, de manera que la recta *r* es la mediatriz del segmento $\overline{AA'}$.

10 Explica cómo varían las coordenadas de un punto según se aplique una simetría respecto del eje *X* o respecto del eje *Y.* ¿Qué sucede si se aplican dos simetrías axiales sucesivas? Responde según sean los ejes paralelos o secantes.

El simétrico de un punto A (*x* , *y*) mediante una simetría respecto del eje de abscisas o eje *X* es el punto A' (*x* , –*y*). El simétrico de un punto A (*x* , *y*) mediante una simetría respecto del eje de ordenadas o eje *Y* es el punto A' (–*x* , *y*).

Si se aplica a un punto A una simetría axial cuyo eje sea una recta *r,* se obtiene otro punto, A'. Si posteriormente se aplica al punto A' una nueva simetría axial que tenga por eje la recta *s,* se obtiene un tercer punto, A''. Las coordenadas de este punto A'' dependen de la posición relativa de las rectas *r* y *s*:

- Si las rectas *r* y *s* son paralelas el resultado es una traslación de vector perpendicular a los ejes cuyo módulo es igual a dos veces la distancia entre los ejes y cuyo sentido es el de la primera recta hacia la segunda.
- Si las rectas *r* y *s* son secantes el resultado es un giro con centro en el punto de intersección de las dos rectas, cuyo ángulo es dos veces el ángulo que forman las rectas y suyo sentido es el de la primera recta hacia la segunda.

11 Estudia qué puntos o figuras son dobles en una traslación, un giro y una simetría, tanto central como axial.

En una traslación no existen puntos dobles.

En un giro, el único punto que permanece invariante es el centro de giro.

En una simetría axial, los únicos puntos invariantes son los situados en el eje de simetría.

En una simetría central, el único punto invariante es el centro de simetría.

SOLUCIONES PÁG. 240 – REPASO FINAL

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1 Calcula los puntos dobles en las siguientes transformaciones:

a. $(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 2)$

$x - 2 = x \Rightarrow 0x = 2$

$y + 2 = y \Rightarrow 0y = -2$

No hay puntos dobles.

b. $(x, y) \rightarrow (y, x)$

$x = y$

$y = x$

La recta y = x es doble punto a punto.

c. $(x, y) \rightarrow (-y, x - 1)$

$x = -y$

$y = x - 1 \Rightarrow y = -y - 1 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

El punto doble es $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

2 Muchas empresas tienen un logotipo que las identifica y que generalmente está compuesto por movimientos simples de objetos básicos.

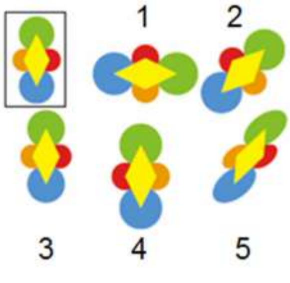
a. Busca alguno de estos logotipos e identifica el movimiento empleado en su construcción.

Respuesta abierta.

b. Crea tu propio logotipo en el que intervengan diferentes movimientos.

Respuesta abierta.

3 Indica cuáles de las transformaciones que permiten pasar de la primera figura a las demás son movimientos y cuáles no. Indica también qué movimientos son directos y cuáles son inversos.



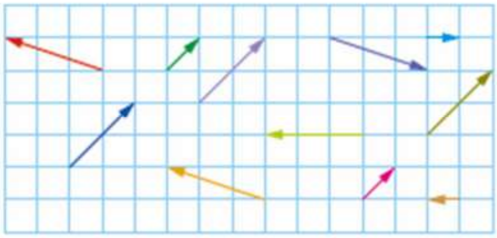
Movimientos directos: figura 1

Movimientos inversos: figuras 2 y 3

No son movimientos: figuras 4 y 5

VECTORES

4 Indica cuáles de los siguientes vectores son equipolentes entre sí:



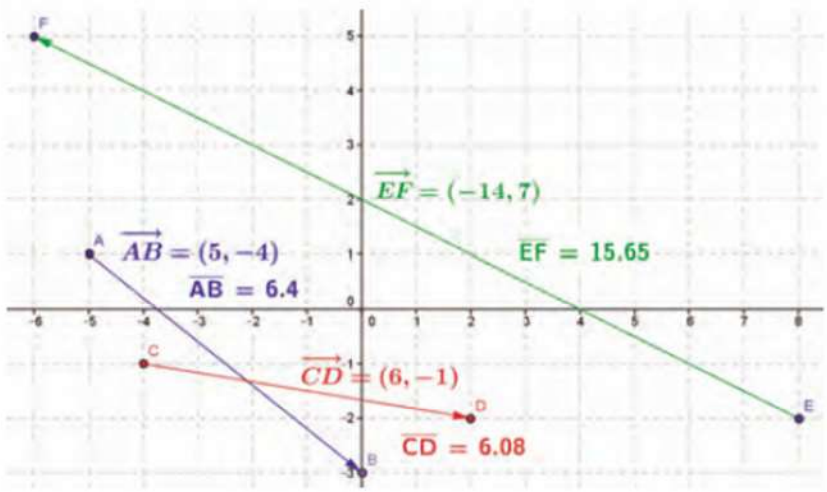
Son equipolentes: vector rojo y vector naranja; vector azul, vector lila y vector color pistacho; vector verde y vector rosa.
No son equipolentes: vector verde, vector marrón, vector azul claro.

5 Representa en unos ejes de coordenadas cartesianas los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$, teniendo en cuenta que A (–5 , 1), B (0 , –3), C (–4 , –1), D (2 , –2), E (8 , –2) y F (–6 , 5). Después, determina sus coordenadas y sus módulos.

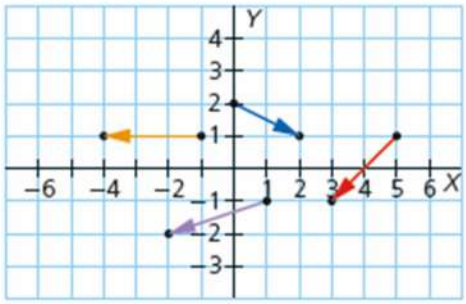
$\overrightarrow{AB}$ = (0 , –3) – (–5 , 1) = (5 , –4); $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2+(-4)^2} = 6,4$

$\overrightarrow{CD}$ = (2 , –2) – (–4 , –1) = (6 , –1); $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6^2+(-1)^2} = 6,08$

$\overrightarrow{EF}$ = (–6 , 5) – (8 , –2) = (–14 , 7); $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{(-14)^2+7^2} = 15,65$



6 Calcula las coordenadas y los módulos de los siguientes vectores:



$\overrightarrow{\text{naranja}}$ = (–4 , 1) – (–1 , 1) = (–3 , 0); $\left|\overrightarrow{\text{naranja}}\right| = \sqrt{(-3)^2+0^2}=3$

$\overrightarrow{\text{morado}}$ = (–2 , –2) – (1 , –1) = (–3 , –1); $\left|\overrightarrow{\text{morado}}\right| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=3{,}16$

$\overrightarrow{\text{rojo}}$ = (3 , –1) – (5 , 1) = (–2 , –2); $\left|\overrightarrow{\text{rojo}}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2{,}83$

$\overrightarrow{\text{azul}}$ = (2 , 1) – (0 , 2) = (2 , –1); $\left|\overrightarrow{\text{azul}}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2}=2{,}24$

7 Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ = (–4 , 6), cuyo extremo es B (5 , –1), ¿cuáles son las coordenadas del punto A?

$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow A = B - \overrightarrow{AB} \Rightarrow A = (5,-1)-(-4,6) \Rightarrow A = (9,-7)$

8 ¿Cuál debe ser el valor de *a* para que el módulo del vector $\vec{v}$ = (a , –3) sea 5 unidades?

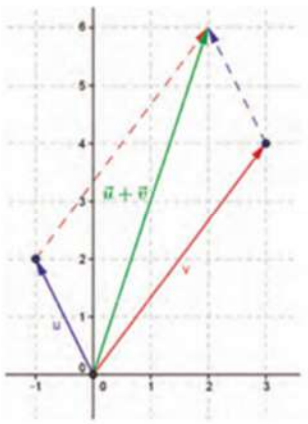
$$\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = \sqrt{a^2+(-3)^2} \\ |\vec{v}| = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{a^2+(-3)^2}=5 \Rightarrow a^2+(-3)^2=25 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-4 \end{cases}$$

9 Considera los vectores $\vec{u}$ = (–1 , 2) y $\vec{v}$ = (3 , 4).

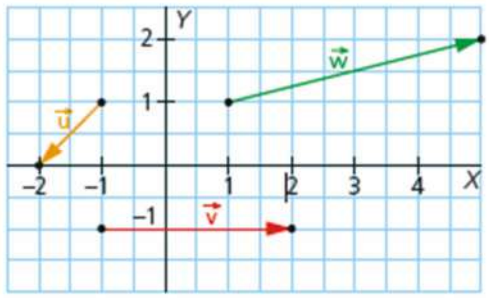
a. Calcula las coordenadas del vector $\vec{u}+\vec{v}$

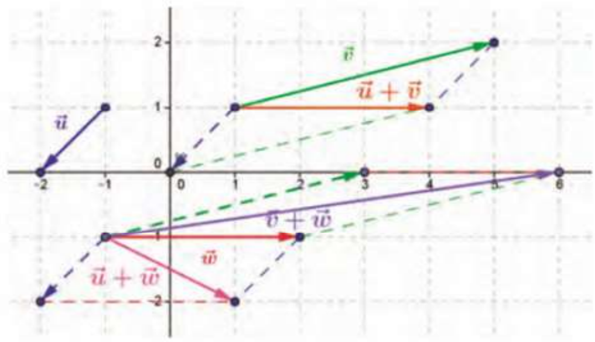
$\vec{u}+\vec{v}$ = (–1 , 2) + (3 , 4) = (2 , 6)

b. Realiza la suma gráficamente y comprueba que el resultado concuerda con el obtenido en el apartado a.

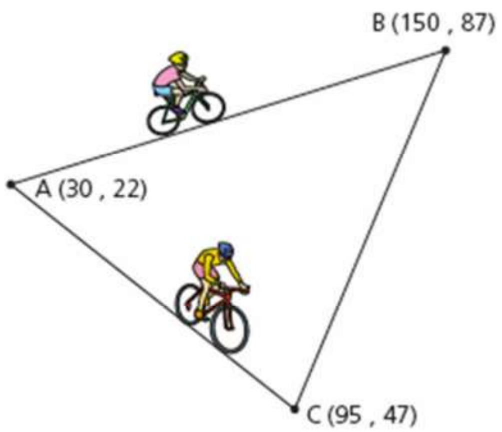


10 Copia en tu cuaderno estos vectores y realiza gráficamente las sumas: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{v} + \vec{w}$





11 Dos ciclistas parten de una misma localidad, A, y desean llegar a la localidad B. Uno de los ciclistas toma el camino recto, y el otro decide desviarse y hace una parada en C. Calcula los kilómetros que recorre cada uno.



$\overrightarrow{AB}$ = (150 , 87) – (30 , 22) = (120 , 65); $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{120^2 + 65^2} = 136,47$

$\overrightarrow{AC}$ = (95 , 47) – (30 , 22) = (65 , 25); $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{65^2 + 25^2} = 69,64$

$\overrightarrow{CB}$ = (150 , 87) – (95 , 47) = (55 , 40); $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{55^2 + 40^2} = 68$

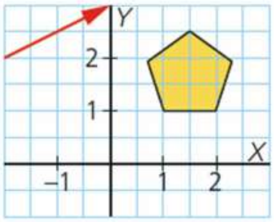
El primer ciclista recorre 136,47 km, y el segundo, 69,64 km + 68 km = 137,64 km.

SOLUCIONES PÁG. 241

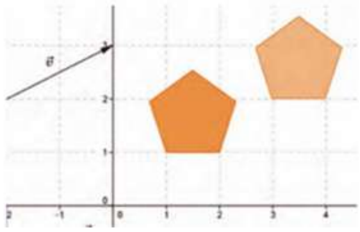
TRASLACIONES

12 Copia estas figuras en tu cuaderno y trasládalas según el vector que se indica. Después, comprueba con GeoGebra los resultados que has obtenido.

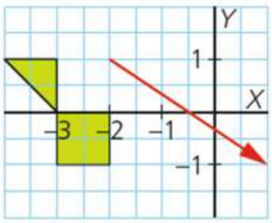
a.



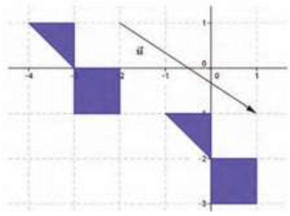
$\Rightarrow$



b.

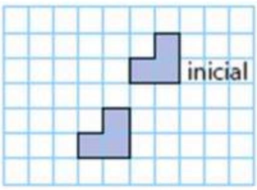


$\Rightarrow$



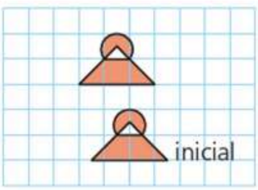
13 Las siguientes figuras son trasladadas la una respecto de la otra. Encuentra, en cada caso, el vector de traslación.

a.



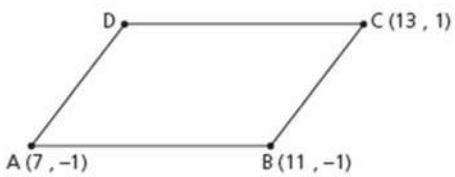
$\vec{u} = (–2 , –3)$

b.



$\vec{v} = (–0{,}5 , 3)$

14 Considera el siguiente paralelogramo:



a. Halla las coordenadas del punto D.

$\overrightarrow{BC} = (13 , 1) – (11 , –1) = (2 , 2)$

$D = A + \overrightarrow{BC} = (7 , –1) + (2 , 2) = (9 , 1)$

b. ¿Cuánto vale su perímetro?

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83$

$\overrightarrow{DC}$ = (13 , 1) – (9 , 1) = (4 , 0) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

Perímetro = $2\left|\overrightarrow{AD}\right| + 2\left|\overrightarrow{DC}\right| = 2 \cdot (2,83) + 2 \cdot 4 = 13,66$ u

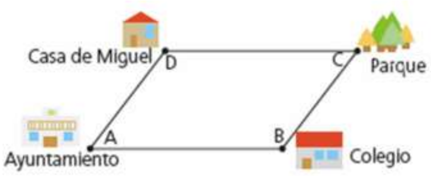
c. Determina la longitud de las dos diagonales.

$\overrightarrow{AC}$ = (13 , 1) – (7 , –1) = (6 , 2) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,32$

$\overrightarrow{BD}$ = (9 , 1) – (11 , –1) = (–2 , 2) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2,83$

Diagonal AC = 6,32 u; diagonal BD = 2,83 u

15 La plaza del pueblo en el que vive Miguel tiene forma de paralelogramo. En uno de los vértices, de coordenadas A (–20 , –80), se encuentra el ayuntamiento; en el vértice opuesto, de coordenadas C (500 , 100), el parque, y en otro vértice, de coordenadas B (300 , 5), el colegio. La casa de Miguel está situada en el vértice D, tal y como muestra la figura.



a. Halla las coordenadas del vértice D.

$\overrightarrow{BC}$ = (500 , 100) – (300 , 5) = (200 , 95)

D = A + $\overrightarrow{BC}$ = (–20 , –80) + (200 , 95)= (180 , 15)

b. Calcula la distancia en línea recta, expresada en metros, que separa la casa de Miguel del colegio, el ayuntamiento y el parque.

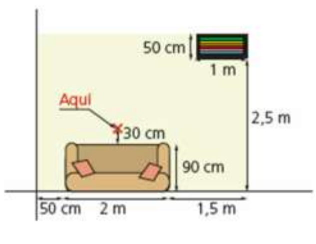
$\overrightarrow{BD}$ = (180 , 15) – (300 , 5) = (–120 , 10) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-120)^2 + 10^2} = 120,42$

$\overrightarrow{AD}$ = (180 , 15) – (–20 , –80) = (200 , 95) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{200^2 + 95^2} = 221,42$

$\overrightarrow{CD}$ = (180 , 15) – (500 , 100) = (–320 , –85) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-320)^2 + (-85)^2} = 331,1$

La distancia de casa al colegio es de 120,42 m; de casa al ayuntamiento, 221,42 m, y de casa al parque, 331,1 m.

16 El siguiente dibujo muestra una pared del salón de la casa de Vicki. Tras una remodelación del salón, el cuadro ha quedado descentrado. ¿Mediante qué vector tiene que trasladar el cuadro para que quede centrado sobre el sofá, a 30 cm de este? (Nota: toma como punto de referencia, (0 , 0), la esquina inferior izquierda de la pared).

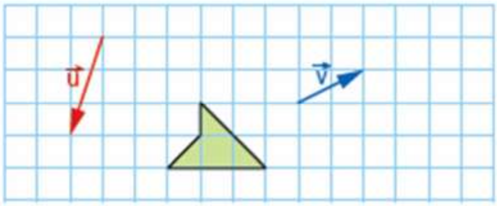


Centro cuadro = (350 , 275) = A

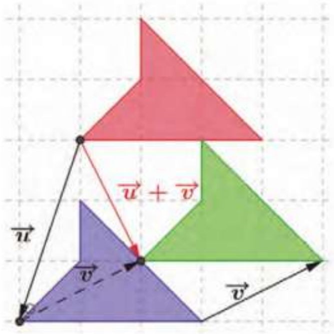
Posición = (150 , 145) = B

$\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ = (150 , 145) – (350 , 275) = (–200 , –130) = (–2 , –1,30)

17 Copia la figura en tu cuaderno y aplícale dos traslaciones sucesivas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. que se indican. ¿Qué sucedería si se aplicase primero la traslación de vector $\vec{v}$ y después la de vector $\vec{u}$? ¿Por qué?



Es equivalente, ya que la composición de dos traslaciones es otra traslación de vector igual a la suma de los dos vectores (y la suma de vectores es una operación conmutativa).



18 ¿Qué coordenadas debe tener un punto A para que al aplicarle dos traslaciones sucesivas de vectores $\vec{v}$ = (2 , 1) y $\vec{u}$ = (–3 , 5) se obtenga el punto A''(1 , –2)?

(1 , –2) = (x , y) + (2 , 1) + (–3 , 5) ⇒ (1 , –2) – (2 , 1) – (–3 , 5) = (x , y) ⇒

⇒ (2 , –8) = (x , y)

El punto A tiene coordenadas (2 , –8)

19 Calcula las coordenadas del vector $\vec{v}$ para que al aplicar dos traslaciones sucesivas de dicho vector al punto A (–1 , –2) se obtenga el punto A'' (1 , 5).

(1 , 5) = (–1 , –2) + 2 · (x , y) ⇒ $\frac{(1,5)-(-1,\ -2)}{2}=(x,\ y) \Rightarrow \frac{(2,\ 7)}{2}=(x,\ y) \Rightarrow$

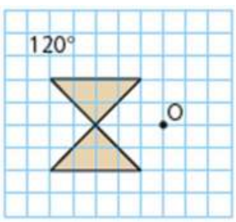
$\Rightarrow\left(1,\ \frac{7}{2}\right)=(x,\ y)$

El vector es $\vec{v}=\left(1,\frac{7}{2}\right)$

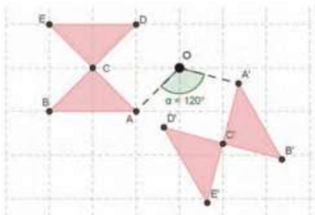
GIROS

20 Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y aplícales un giro cuyo centro sea el punto O y cuyo ángulo sea el que se indica en cada caso. Después, comprueba el resultado obtenido con GeoGebra.

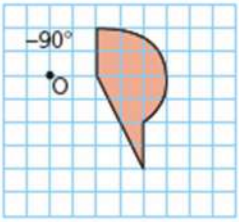
a.



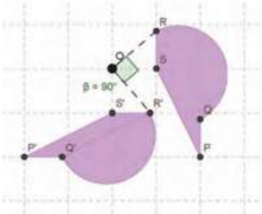
⇒



b.



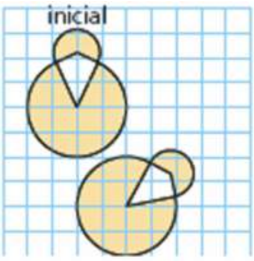
⇒



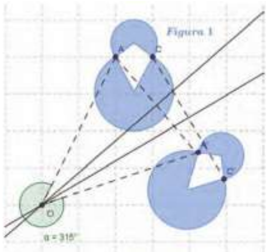
SOLUCIONES PÁG. 241

21 **Las siguientes figuras son transformadas la una de la otra mediante un giro. Determina el centro y ángulo de dicho giro en cada caso.**

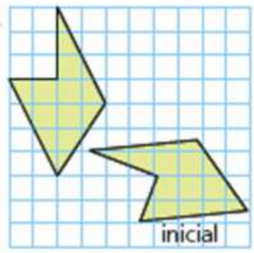
a.



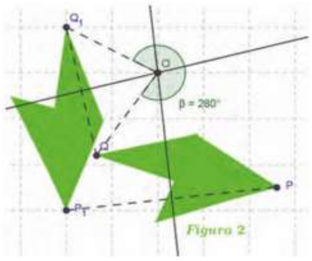
⇒



b.

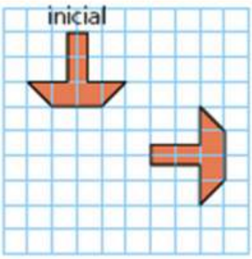


⇒

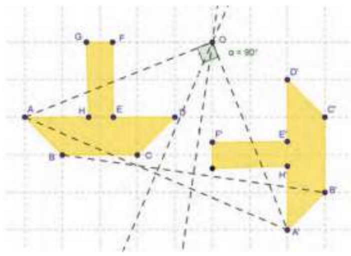


22 **Copia las siguientes figuras en tu cuaderno y determina, en cada caso, el centro y el ángulo de giro.**

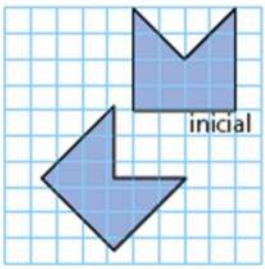
a.



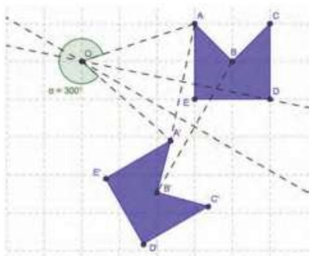
⇒



b.

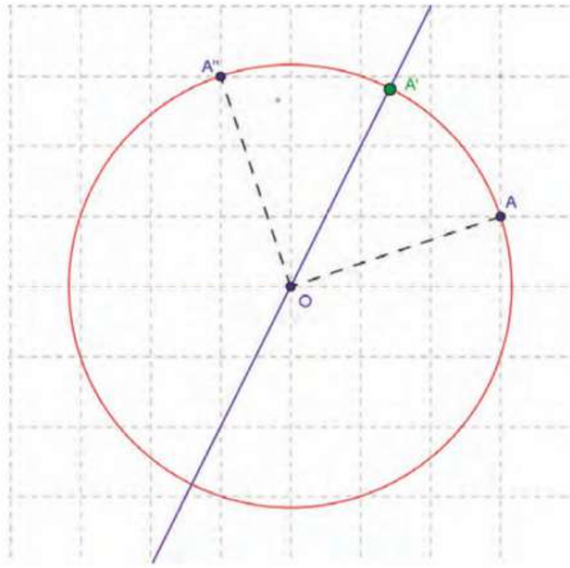


⇒



23 Al aplicar a un punto A dos giros sucesivos iguales de centro O y ángulo α, se obtiene el punto A''. Indica razonadamente cómo se puede determinar geométricamente el punto A' que resulta de aplicar el primer giro.

El punto A' se encuentra en la circunferencia de centro O y radio r = $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA''}$. Además, ángulo , $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}\right)$ = 2α; por tanto, el punto A' se puede obtener como intersección de la bisectriz del ángulo , $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}\right)$ con la circunferencia de centro O y radio r = $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA''}$.

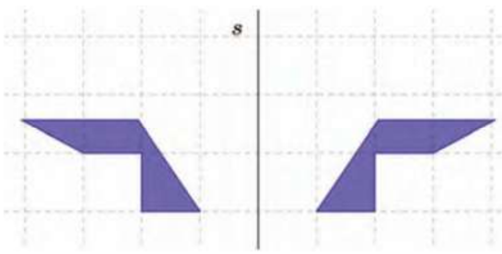


SIMETRÍAS

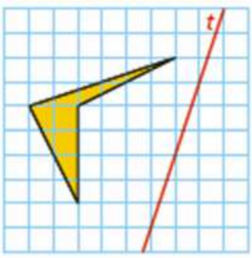
24 Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y aplícales una simetría axial cuyo eje sea el que se indica:

a.

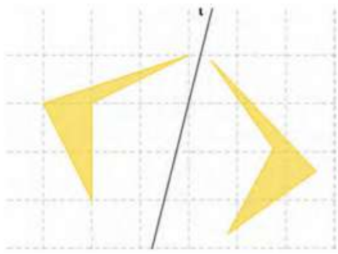
⇒



b.

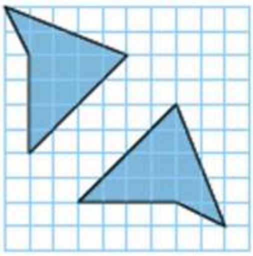


⇒

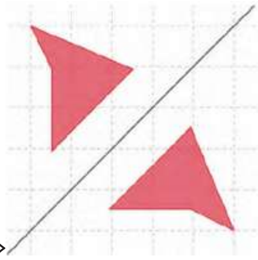


25 **Las siguientes figuras son transformadas la una de la otra mediante una simetría axial. Cópialas en tu cuaderno y traza geométricamente el eje de simetría.**

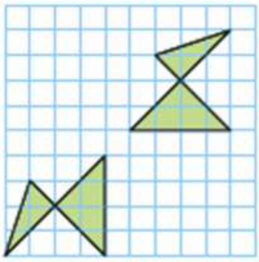
a.



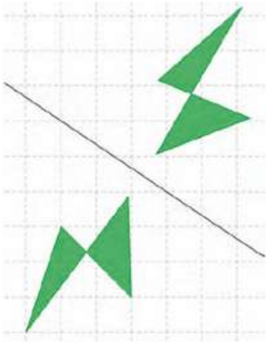
⇒



b.

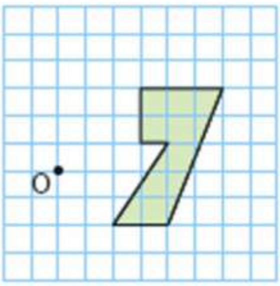


⇒

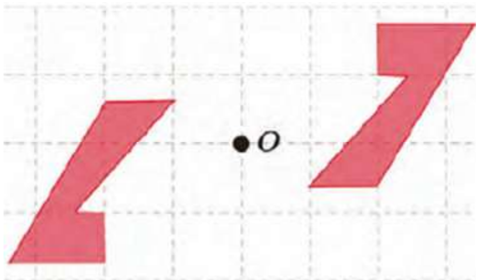


26 **Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y aplícales una simetría central de centro el que se indica en cada caso.**

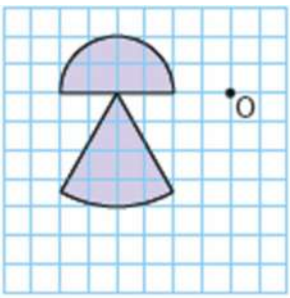
a.



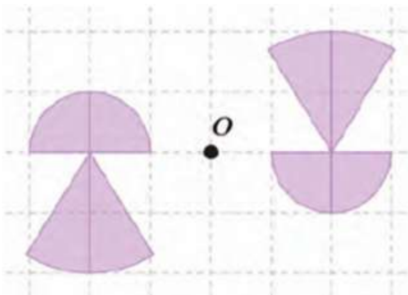
⇒



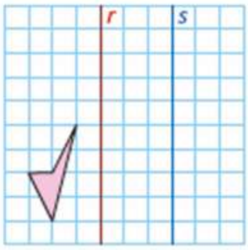
b.

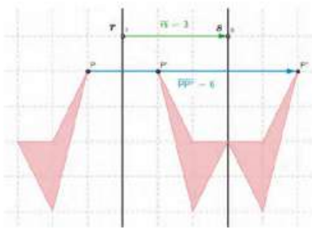


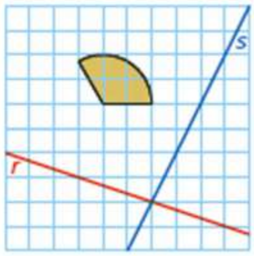
⇒

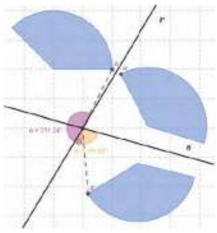


27 Copia en tu cuaderno las figuras y aplícales dos simetrías axiales sucesivas de ejes *r* y *s,* respectivamente. Después responde razonadamente a las preguntas que se plantean.



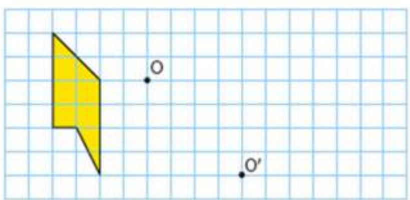
⇒


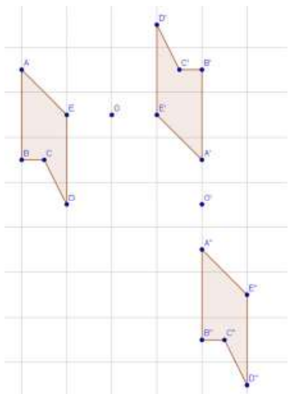


⇒


a. **¿Mediante qué movimiento se puede pasar directamente de la primera a la última figura sin pasar por la figura intermedia?**
   En el primer apartado, mediante una traslación de vector $\overrightarrow{PP''}$ de dirección perpendicular a los ejes y módulo de 6 unidades, ya que la distancia entre los ejes es de 3 unidades.
   En el segundo apartado, mediante un giro cuyo centro es el punto de intersección de las dos rectas, O, y con ángulo de 211,24º, ya que el ángulo que forma *r* con *s* es de 105,62º.
b. **¿Se hubiera obtenido el mismo resultado si se hubiese aplicado primero la simetría de eje *s* y después la de eje *r*?**
   No. En la primera figura se podría pasar de la primera a la última mediante una traslación de vector $\overrightarrow{PP''}$, que sigue teniendo dirección perpendicular a los ejes y módulo de 6 unidades, pero con sentido contrario al anterior. En la segunda figura, se puede pasar de la primera a la última mediante un giro cuyo centro es el punto de intersección de las dos rectas, O, pero esta vez el ángulo es de 148,76º, ya que el ángulo que forma s con r es de 74,38º.
c. **A la vista de los resultados, ¿dirías que se cumple la propiedad conmutativa?**
   No es conmutativo.

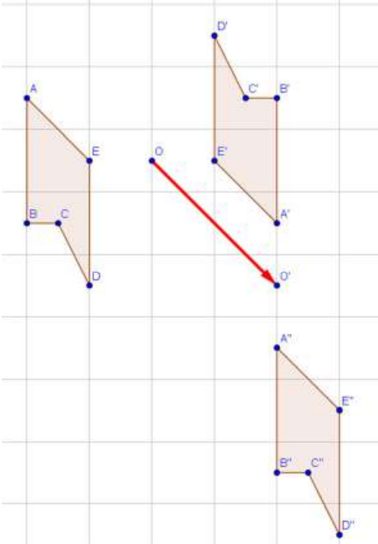
28 Copia en tu cuaderno la figura y aplícale dos simetrías centrales sucesivas de centros O y O´, respectivamente:



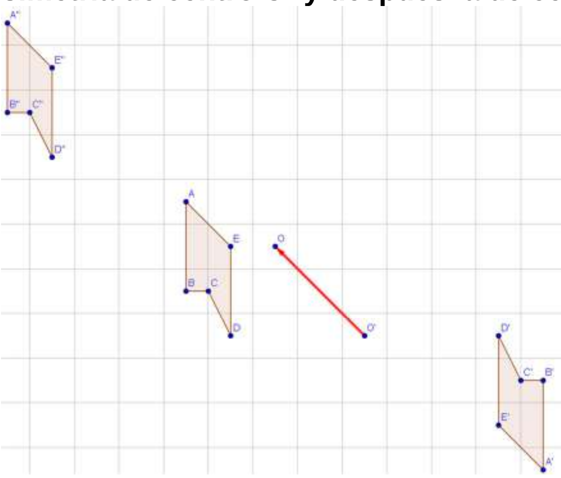
⇒


a. **¿Mediante qué movimiento podemos pasar directamente de la primera a la última figura sin pasar por la figura intermedia?**

Mediante una traslación de vector doble al vector $\overrightarrow{OO'}$



b. **¿Se hubiera obtenido el mismo resultado si se hubiera aplicado primero la simetría de centro O´ y después la de centro O?**



No, ya que ahora la traslación es de vector doble a $\overrightarrow{O'O}$, que tiene igual modulo y dirección que el vector anterior pero sentido contrario.

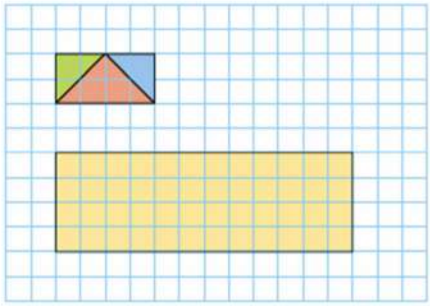
c. **A la vista de los resultados, ¿dirías que se cumple la propiedad conmutativa?**

No es conmutativo.

SOLUCIONES PÁG. 243

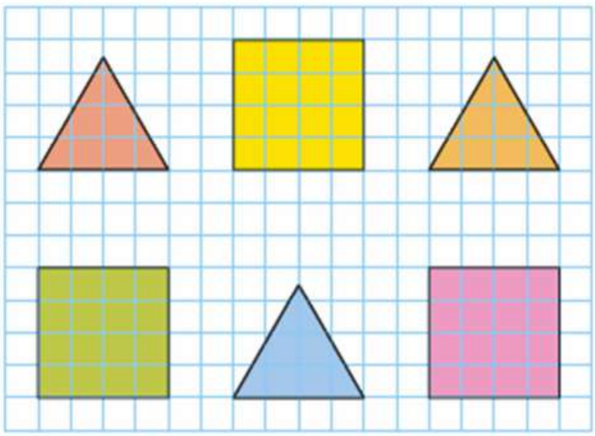
29 **Un teselado se crea partiendo de una figura inicial (motivo base) sobre la que se aplican diversas transformaciones isométricas, de forma que se recubra totalmente una superficie plana sin que queden huecos ni se superpongan las figuras. Esta técnica se ha utilizado a lo largo de la historia para formar mosaicos que adornan construcciones emblemáticas.**

Dado el siguiente motivo base, construye un teselado de cuatro formas diferentes que ocupe la región del plano que se propone. Asegúrate de aplicar el mayor número de movimientos posibles.



Respuesta abierta.

30 **Para realizar esta actividad, podéis organizaros en grupos de tres alumnos. Se trata de dibujar en cartulinas de colores y recortar un número de piezas base como las que se proponen para formar un mosaico. Tenéis que describir los movimientos que permiten pasar de un motivo base a otro.**



Respuesta abierta.

31 **Visita esta página web y analiza las reglas que se detallan para c mosaico de Escher. Después, confecciona tu propio mosaico a motivo diseñado por ti mismo.**

http://juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/moviemientos/mosaicos/mosaicos.

Respuesta abierta.

EVALUACIÓN

1 Dados los puntos A (1 , 2), B (3 , 5), C (–1 , 1) y D (–2 , –3), las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{CD}$ + son:

a. (–1 , 1) **b. (3 , 7)** c. (1 , –1) **d. (–3 , –7)**

$\overrightarrow{AB}$ = (3 , 5) – (1 , 2) = (2 , 3)

$\overrightarrow{CD}$ = (–2 , –3) – (–1 , 1) = (–1 , –4)

$\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{CD}$ = (2 , 3) + (–1 , –4) = (1 , –1)

2 Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ = (3 , –2), si el punto A tiene por coordenadas A (–6 , 4), las coordenadas del punto B son:

a. B (–3 , 2) **b. B (–3 , –6)** **c. B (9 , –6)** **d. B (–9 , –6)**

(3 , –2) = (x , y) – (–6 , 4) $\Rightarrow$ (x , y) = (–3 , 2)

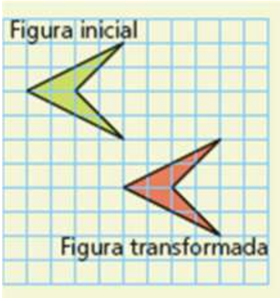
3 Para que el módulo del vector $\vec{v}$ = (*x* , –9) sea de 15 unidades, *x* debe valer:

a. 4 b. 12 **c. – 4** d. –12

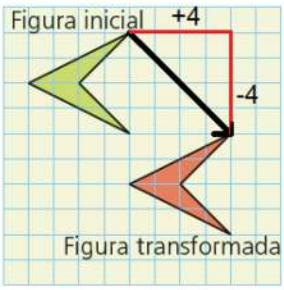
(Nota: en la primera edición del libro del alumno dice que el módulo del vector $\vec{v}$ sea de 13 unidades. No es correcto, debe ser de 15 unidades.)

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + (-9)^2} = 15 \Rightarrow x^2 + 81 = 225 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12$$

4 El vector de la traslación que transforma la figura verde en la figura roja es:

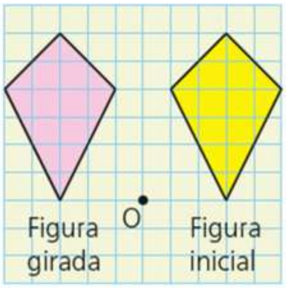


a. $\vec{v}$ = (4 , 4) b. $\vec{v}$ = (4 , –4) **c. $\vec{v}$ = (–4 , 4)** **d. $\vec{v}$ = (–4 , –4)**

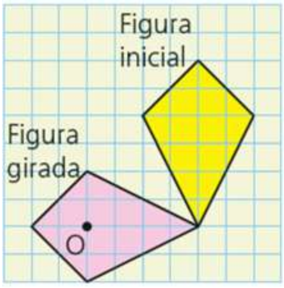


5 Si se aplica a la figura inicial un giro de centro O y ángulo de 90°, se obtiene la figura:

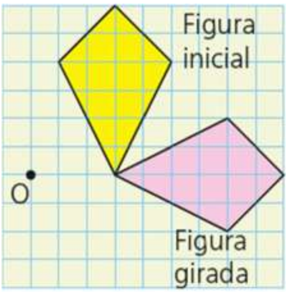
a.



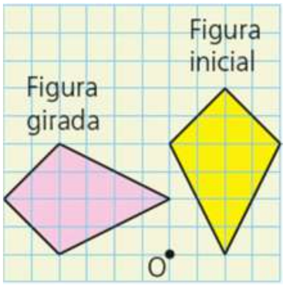
c.



b.



d.



6 Un ejemplo de movimiento que invierte la orientación de los ángulos es:

a. La traslación.
b. El giro.
c. La simetría central.
d. La simetría axial.