UNIDAD 11: Introducción a las derivadas y sus aplicaciones

ACTIVIDADES-PÁG. 236

1. Las soluciones aparecen en la tabla.

	[0, 3]	[3, 6]
a) $f_1(x) = 2x$	2	2
b) $f_2(x) = 2x + 3$	2	2
c) $f_3(x) = x^2$	3	9
d) $f_4(x) = 2^x$	$\frac{7}{3} = 2{,}33$	$\frac{56}{3} = 18{,}67$

2. El valor del límite es: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 16$

3. La función y = f (x) es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en (1, 3). Tiene un máximo relativo en el punto (1, 4) y un mínimo relativo en (0, 3).

La función y = g (x) es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en (0, 1). Tiene un mínimo relativo en el punto (1, e).

ACTIVIDADES-PÁG. 257

1. Organizamos los datos en una tabla:

	Recibe	**Marca**
Lunes	X	M
Martes	X – M	12
Miércoles	X + 14	2 M
Jueves	4M	10
Viernes	4	X + 14 – 14
Sábado		20

Los discos que recibe menos los que marca son los 20 discos que le quedaron para el sábado:

$$X + X - M + X + 14 + 4M + 4 - (M + 12 + 2M + 10 + X) = 20 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 3X + 3M + 18 - 3M - X - 22 = 20 \quad \Rightarrow \quad 2X = 24 \quad \Rightarrow X = 12$$

El lunes recibió 12 discos.

2. Sea v la velocidad del camión y w la velocidad del tractor.

La expresión queda: v + w = 2 (v – w), es decir, v = 3w.

La velocidad del camión es el triple que la velocidad del tractor.

3. Llamamos R_4 al reloj que mide 4 minutos y R_9 al que mide 9 minutos.

● *Para medir 1 minuto*: ponemos ambos relojes a cero. Cuando pasan 4 minutos, damos la vuelta a R_4 y al pasar otros 4 minutos, lo que queda de R_9 es 1 minuto.

● *Para medir 2 minutos*: conseguimos 1 minuto por el procedimiento anterior. A la vez que logramos 1 minuto, el reloj R_4 lo ponemos y quedan en él 3 minutos. En este momento ponemos a funcionar R_9y al terminar, quedan en éste 6 minutos; ponemos a funcionar R_4 y al terminar éste último, quedan en el anterior 2 minutos.

● *Para medir 3 minutos*: está explicado en el procedimiento anterior.

● *Para medir 4 minutos*: con el reloj R_4.

● *Para medir 5 minutos*: ponemos R_4 y R_9; al terminar R_4, quedan en R_9 5 minutos.

● *Para medir 6 minutos*: esta situación se explica en el procedimiento para medir 2 minutos.

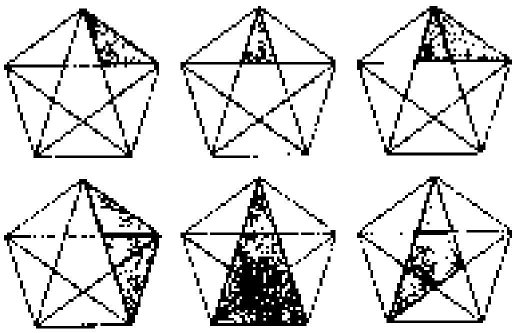
● *Para medir 7 minutos*: conseguimos 2 minutos por el procedimiento dado anteriormente. Los 2 minutos los tenemos en R_9. Ponemos a funcionar R_4 y al pasar 2 minutos en R_9 quedan otros 2 minutos en R_4. Ponemos a funcionar R_9 y, al pasar los dos minutos en R_4 quedarán 7 minutos en R_9.

● *Para medir 8 minutos*: ponemos dos veces R_4.

● *Para medir 9 minutos*: ponemos a funcionar R_9.

● *Para medir 2 minutos*: conseguimos que queden 6 minutos en R_9 por los procedimientos descritos ya vistos anteriormente y, cuando pasan esos 6 minutos, ponemos a funcionar R_4 obteniendo así los 10 minutos.

4. En esta figura podemos encontrar los siguientes tipos de triángulos:



En cada figura podemos encontrar 5 triángulos iguales al rayado en la misma; por tanto, en total hay 5 x 6 = 30 triángulos.

ACTIVIDADES-PÁG. 258

1. Las derivadas de estas funciones podemos verlas en la imagen.

$$\frac{d\left(\frac{3}{2}\cdot x^4-\frac{4}{3}\cdot x^3-7\cdot x^2+\frac{x}{2}\right)}{dx} \rightarrow 6\cdot x^3-4\cdot x^2-14\cdot x+\frac{1}{2}$$

$$f(x):=3^{2x^2}\cdot\left(4x-\frac{7}{3}\right) \rightarrow x\mapsto 3^{2\cdot x^2}\cdot\left(4\cdot x-\frac{7}{3}\right)$$

$$f' \rightarrow x\mapsto (17.578\cdot x^{2.}-10.254\cdot x+4.)\cdot 3.^{2.\cdot x^2}$$

2. El valor de las derivadas de estas funciones en los puntos indicados podemos verlas en la imagen

$$f(x):=\frac{3x}{x^2+5} \rightarrow x\mapsto \frac{3\cdot x}{x^2+5}$$

$$f'(2) \rightarrow \frac{1}{27}$$

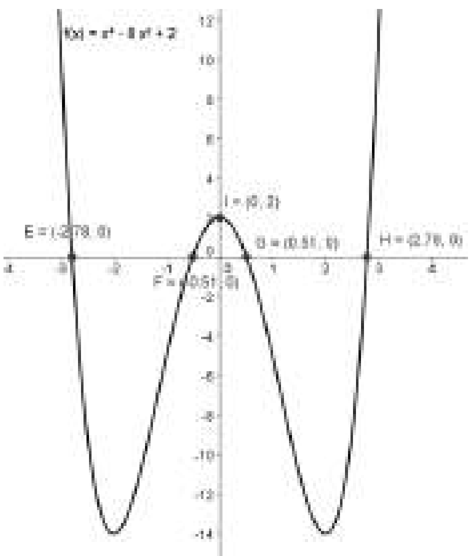
$$g(x):=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{8+4\cdot x^3} \rightarrow x\mapsto \frac{3}{5}\cdot\sqrt{8+4\cdot x^3}$$

$$g'(-1) \rightarrow \frac{9}{5}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 259

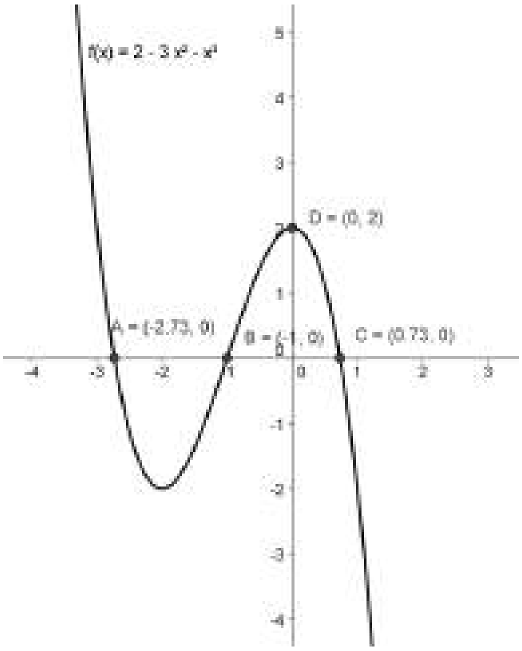
1. a) En la imagen vemos la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$.

Los puntos de corte con los ejes son: E (- 2,78; 0); F (- 0,51; 0); G (0,51; 0); H (2,78; 0) e I (0, 2).



b) En la imagen vemos la gráfica de la función $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$

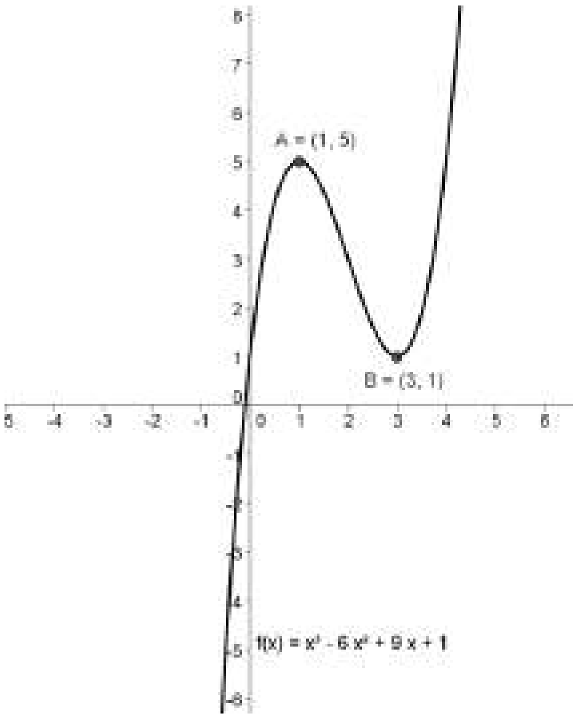
Los puntos de corte con los ejes son: A (- 2,73; 0); B (- 1; 0); C (0,73; 0) y D (0, 2).



2. a) En la imagen vemos la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Los extremos son: máximo A (1, 5) y mínimo B (3, 1).

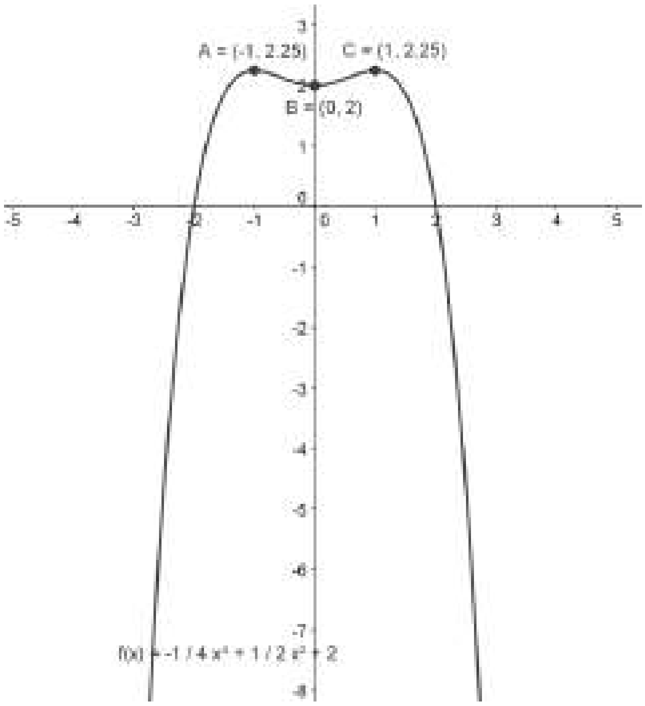
Es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en (1, 3).



b) En la imagen vemos la gráfica de la función $f\,(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2$

Los extremos son: máximos en A (- 1; 2,25) y C (1; 2,25) y mínimo en B (0, 2).

Es creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

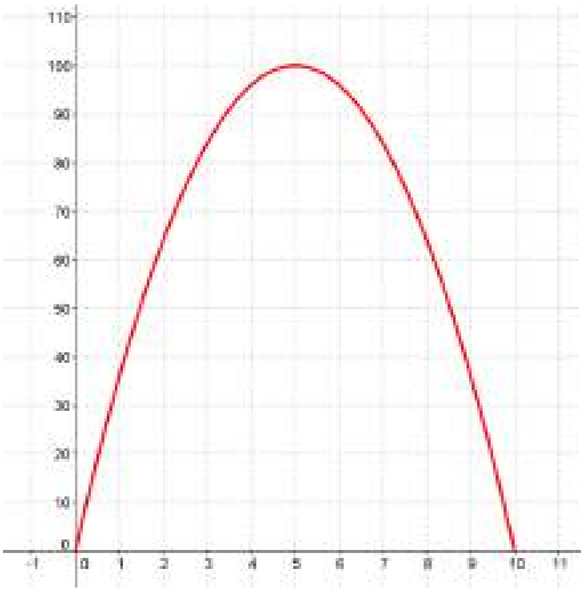


ACTIVIDADES-PÁG. 260

1. La tabla queda del siguiente modo:

	[- 2, 3]	[0, 4]	[2, 5]
a) f (x) = 2x + 4	2	2	2
b) g (x) = 7x – x^3	0	- 9	- 32
c) $h\,(x) = \sqrt{x+6}$	$\dfrac{1}{5} = 0{,}2$	$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{4} = 0{,}18$	$\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{8}}{3} = 0{,}16$
d) $t\,(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$	$-\dfrac{1}{12} = -0{,}083$	$\dfrac{8}{15} = 0{,}53$	$-\dfrac{7}{36} = -0{,}19$

2. Las soluciones son:



a) La gráfica la podemos ver en el dibujo.

b) Las tasas de variación medias son:

TVM [1; 1,5] = 30 m/s

TVM [1; 3 = 24 m/s

TVM [1; 5] = 16 m/s

c) Los valores anteriores son las velocidades medias que alcanza el balón en cada uno de los intervalos citados.

3. Los resultados son:

a) $t_{vm}\ [1,\ 2] = \dfrac{f\,(2) - f\,(1)}{2-1} = 6\cdot 1{,}2^2 - 1\cdot 1{,}2 = 1{,}44\ {m^3}/{año}$

Indica la velocidad de crecimiento de la cantidad de madera del bosque.

b) $t_{vi}\ (1{,}5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f\,(1{,}5+h) - f\,(1{,}5)}{f} = D\,[\,f\ (1{,}5)] = 6\cdot 1{,}2^{1{,}5}\cdot \ln 1{,}2 = 1{,}44\ {m^3}/{año}$

Indica la velocidad de crecimiento de la cantidad de madera en ese momento del bosque.

4. La velocidad media entre los instantes 2,5 y 6 vale 13 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 2,5 vale 6 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 6 vale 20 m/s.

5. El valor de las derivadas es:

a) f ´ (-1) = - 6 b) f ´ (2) = $\dfrac{1}{4}$ c) f ´ (7) = $\dfrac{2}{5}$

6. Los resultados podemos verlos en la tabla siguiente:

Función	**Tangente**	**Pendiente**
a) f(x) = 8 + x	y = x + 8	1
b) g (x) = 2 – x^2	y = 2	0
c) t (x) = $\dfrac{1}{x+1}$	y = - x + 1	- 1

7. La ecuación de la recta tangente en el punto (0, 5) es $y = 5 – 2x$.

8. Los puntos son (1,5) y (5,5).

Las rectas tangente y normal en el punto (1, 5) son: $8x + y = 13$ e $x - 8y = - 39$.

Las rectas tangente y normal en el punto (5, 5) son: $8x – y = 35$ e $x + 8y = 45$.

9. La pendiente es tg 45º = 1. El punto es (1, 2)

10. Si es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante su pendiente es -1. El punto es (- 1, - 3/4)

Si es paralela al eje de abscisas su pendiente es 0. El punto es (0, - 1)

ACTIVIDADES-PÁG. 261

11. En la gráfica observamos que $f\,'(2) = 0$ y $f\,'(-1/2) = -3{,}75$.

12. Quedan:

a) $D[x^8] = 8x^7$

b) $D[3x^2 - 4] = 6x$

c) $D[5x^2 + 4x - 1] = 10x + 4$

d) $D\left[\frac{x^3}{6}\right] = \frac{x^2}{2}$

e) $D[3\sqrt[5]{x}] = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

f) $D\left[\frac{7x^2+1}{4}\right] = \frac{7x}{2}$

g) $D\left[\frac{3}{x^4}\right] = \frac{-12}{x^5}$

h) $D[(x - 2x^2)^3] = (x - 2x^2)^2 \cdot (3 - 12x)$

i) $D\left[\sqrt{3x^4 - 2}\right] = \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4 - 2}}$

j) $D\left[2\sqrt[3]{4x^3 + 3x}\right] = \frac{8x^2 + 2}{\sqrt[3]{(4x^3 + 3x)^2}}$

k) $D\left[\frac{1}{\sqrt{3+2x^2}}\right] = \frac{-2x}{(3+2x^2)^{3/2}}$

l) $D\left[4x^3 \cdot (x^2 - 3)^2\right] = 28x^6 - 120x^4 + 108x^2$

13. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\dfrac{2x}{2x-5}\right] = \dfrac{-10}{(2x-5)^2}$

b) $D\left[\dfrac{7x^2-4}{7x^2+4}\right] = \dfrac{112x}{(7x^2+4)^2}$

c) $D\left[\dfrac{5x-2}{5x}\right] = \dfrac{2}{5x^2}$

d) $D\left[\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3}{2}x^3 + 5x\right]$ = $x^3 - (9/2)x^2 + 5$

e) $D\left[\dfrac{3x}{x^3+3}\right] = \dfrac{9-6x^3}{(x^3+3)^2}$

f) $D\left[\dfrac{2+5x^4}{2-5x^4}\right] = \dfrac{80x^3}{(2-5x^4)^2}$

g) $D\left[\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}\right] = \dfrac{15}{(4x^2+5)\sqrt{4x^2+5}}$

h) $D\left[\dfrac{(5x^2-1)^2}{x}\right] = \dfrac{75x^4-10x^2-1}{x^2}$

i) $D\left[\dfrac{4}{(x^4-3x)^3}\right] = \dfrac{36-48x^3}{(x^4-3x)^4}$

14. Las derivadas quedan:

a) $D\left[5^{\frac{x}{4}}\right] = 5^{\frac{x}{4}} \cdot \ln 5 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)$

b) $D[2 \cdot 3^{2x}] = 4 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$

c) $D\left[e^x - e^{-x}\right] = e^x + e^{-x}$

d) $D\left[5^{3x} \cdot 3^{5x}\right] = 5^{3x} \cdot \ln 5 \cdot 3^{5x+1} + 3^{5x} \cdot \ln 3 \cdot 5^{3x+1}$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right] = \dfrac{-e^{-2x}}{2}$

f) $D[(e^{2x}+1)^4] = 8 \cdot e^{2x} \cdot (e^{2x}+1)^3$

ACTIVIDADES-PÁG. 262

15. Las derivadas quedan:

a) $D[\ln(7x^2 - 1)] = \dfrac{14x}{7x^2-1}$

b) $D[\ln(2+x^3)^2] = \dfrac{6x^2}{2+x^3}$

c) $D\left[\ln\sqrt{4x^3-9}\right] = \dfrac{6x^2}{4x^3-9}$

d) $D[\log_3 (x^2 - 1)] = \dfrac{2x}{(x^2-1)\cdot \ln 3}$

e) $D[\ln (e^x \cdot 2x)] = D[x + \ln(2x)] = 1 + 1/x$

h) $D\left[\ln\left(\dfrac{2-5x}{2+5x}\right)\right] = D\left[\ln(2-5x) - \ln(2+5x)\right] = \dfrac{-5}{2-5x} - \dfrac{5}{2+5x} = \dfrac{-20}{4-25x^2}$

16. Las derivadas quedan:

a) $D[\text{sen } 3x] = 3 \cdot \cos 3x$

b) $D[3 \text{ sen } x] = 3 \cdot \cos x$

c) $D\left[sen\ x^3\right] = 3x^2 \cos x^3$

d) $D[\text{sen}^3 x] = 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

e) $D[\cos x^{-4}] = 4x^{-5} \cdot \text{sen } x^{-4}$

f) $D[4 \cos x] = -4 \cdot \text{sen } x$

g) $D[\cos^2 4x] = -8 \cos 4x \cdot \text{sen } 4x$

h) $D\left[\sqrt{\cos 2x^2}\right] = \dfrac{-2x \cdot sen\,(2x^2)}{\sqrt{\cos 2x^2}}$

i) $D[\text{tg } (2x-4)] = 2\,(1 + \text{tg}^2 (2x-4))$

j) $D\left[tg\ \sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\ \cos^2 \sqrt{x}}$

k) $D[\text{tg}^3 (3^x)] = \text{tg}^2 (3^x) \cdot [1 + \text{tg}^2 (3^x)] \cdot 3^{x+1} \cdot \ln 3$

l) $D[x \cdot \text{tg } x] = \text{tg } x + x \cdot (1 + \text{tg}^2 x)$

17. a) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x}\right] = \dfrac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

b) $D\left[\sqrt[3]{3x^5+4}\right] = \dfrac{5x^4}{\sqrt[3]{(3x^5+4)^2}}$

c) $D\left[\dfrac{2x^2+1}{2x^2-1}\right] = -\dfrac{8x}{(2x^2-1)^2}$

d) $D[(7x^2 - 3).(5x - 4)^5] = (245x^2 - 96x - 15) \cdot (5x - 4)^4$

e) $D[(x^2 + 1)^2 \cdot e^{2x}] = 2(x^2 + 1) \cdot e^{2x} \cdot (x + 1)^2$

f) $D[\ln 6 \cdot 6^x] = \ln^2 6 \cdot 6^x$

g) $D\left[\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right] = \dfrac{8}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)^2}$

h) $D\left[\dfrac{x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1}\right] = \dfrac{2x^2 + 8x + 2}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

i) $D[x^a \cdot a^x \cdot e^{a\,x}] = x^{a-1} \cdot a^x \cdot e^{ax} \cdot [a + x \cdot \ln a + ax]$

j) $D[\text{sen } 7x \cdot 7^{2x}] = 7^{2x} \cdot [7 \cdot \cos(7x) + 2 \cdot \ln 7 \cdot \text{sen}(7x)]$

k) $D\left[\dfrac{x^2}{3^{2x}}\right] = \dfrac{2x - 2 \cdot \ln 3 \cdot x^2}{3^{2x}}$

l) $D\left[\dfrac{e^{x^2}}{x}\right] = \dfrac{e^{x^2} \cdot (2x^2 - 1)}{x^2}$

18. Las respuestas son:

a) $f'(x) = -4$; por tanto, f (x) es decreciente en todo R.

b) $f'(x) = -8 - 4x$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, -2)$ y decreciente en $(-2, +\infty)$.

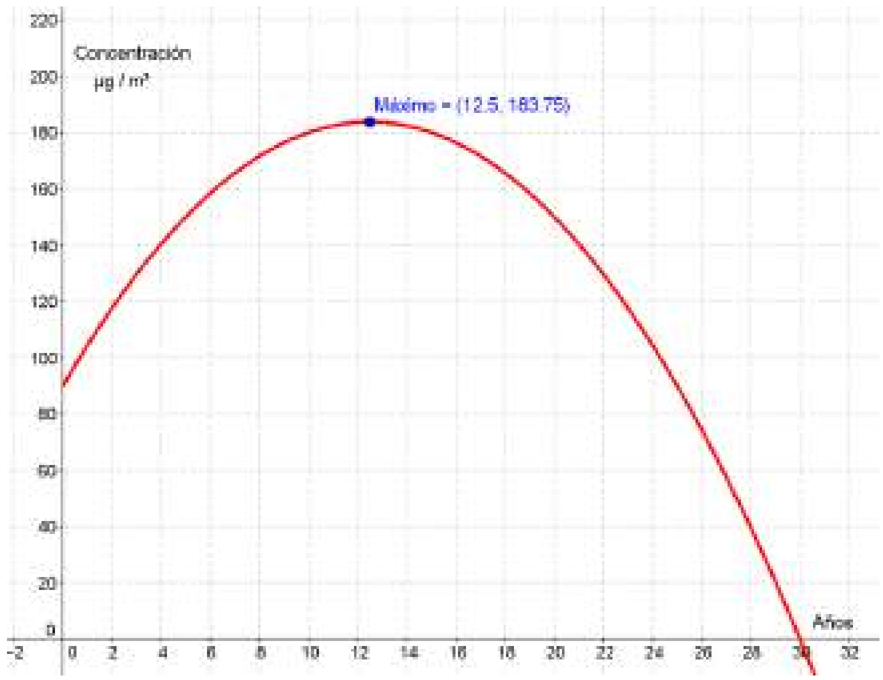
c) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(1, 3)$.

d) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$ por tanto, f (x) es decreciente en R- {0}

e) $f'(x) = 16x - 4x^3$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y decreciente en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

f) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 16x}{(x-4)^2}$; por tanto, f (x) es creciente en $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ y decreciente en $(0, 4) \cup (4, 8)$.

19. Al ser C ´ (t) = 15 – 1,2 t, el ozono aumenta desde el año 0 al 12,5. Disminuye del año 12,5 en adelante. Todo puede verse en la gráfica adjunta.



20. El beneficio es nulo para los valores de x que satisfagan la ecuación $0 = 32x - 4x^2 - 60$, es decir x = 5 o x = 3 millones de euros.

La empresa tiene pérdidas para B ´(x) = 32 – 8x < 0 es decir para x > 4 millones de euros. El beneficio aumenta para valores de x en el intervalo (0, 4)

21. N ´ (h) = $3h^2$ – 96 h + 756. El número de visitantes aumenta cuando N ´ (h) > 0, es decir desde las 10 a las 14 horas y desde las 18 a las 22 horas. El número de visitantes disminuye de 14 a 18 horas.

ACTIVIDADES-PÁG. 263

22. Los extremos son:

a) f ´(x) = -12 - 6x = 0 en x = -2. f ´´ (-2) = -6 < 0, por tanto, f (x) tiene un máximo en (- 2, 32).

b) f ´ (x) = $20x^3$ – 20x = 0 en x = 0 , x = 1 y x = -1.

$$f\,''(x) = 60x^2 - 20 \quad \begin{cases} f\,''(0) < 0 \\ f\,''(1) > 0 \\ f\,''(-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow f\ (x)\ tiene\ un \begin{cases} máximo\ en\ (0,\ 3) \\ mínimo\ en\ (1,\ -2) \\ mínimo\ en\ (-1, -2) \end{cases}$$

c) f ´ (x) = $6x^2$ – 12x – 18 = 0 en x = -1 y x = 3.

$$f\,''(x) = 12x - 12 \quad \begin{cases} f\,''(-1) < 0 \\ f\,''(3) > 0 \end{cases} \Rightarrow f\,(x) \text{ tiene un } \begin{cases} \text{máximo en } (-1,\ 11) \\ \text{mínimo en } (3,\ -53) \end{cases}$$

23. Los números son 3 y 3

24. La solución queda:

a) Función beneficio: B (t) = I (t) – G (t), es decir:

B (t) = (42 t - 3t²) – (2t² – 8t + 105) = - 5t² + 50 t - 105

b) La derivada B ´ (t) = - 10x + 50 se anula en t = 5.

B ´´ (5) = - 10 < 0. El beneficio es máximo al vender 5 unidades de producto.

c) Para t = 5, el beneficio máximo es:

B (5) = 20 000 euros.

25. Los lados del recinto medirán x y (55 – x) metros. El área es A(x) = 55x – x².

A´(x) = 55 – 2x = 0 ; x = 27,5 m.

A´´ (27,5) = -2 < 0. Por tanto el área es máxima cuando los lados midan 27,5 m cada uno, es decir es un cuadrado y su área es 756,25 m².

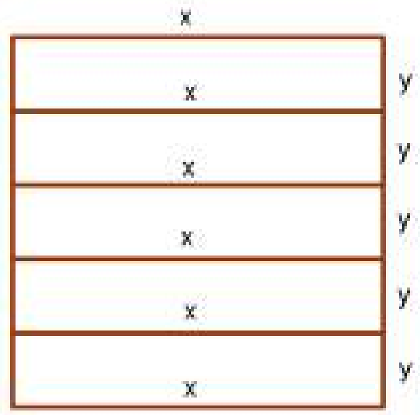
26. La anulación de la primera derivada:

$$C\,'(x) = \frac{-200}{x^2} + \frac{1}{2} = 0;\ x = 20 \text{ trabajadores.}$$

En la segunda obtenemos: $C\,''(x) = \dfrac{400}{x^3}$; C´´ (20) > 0. El coste es mínimo para 20 trabajadores

El coste mínimo es: C (20) = 420 000 euros.

27. Observando el dibujo adjunto tenemos:



6x + 10 y = 3660 $\Rightarrow \quad y = 366 - \dfrac{3}{5}x$

El área será $A(x) = x \cdot \left(366 - \dfrac{3}{5}x\right)$.

Esta función alcanza un mínimo para x = 305.

Las dimensiones de las pistas serán 305 metros por 183 metros.

28. Las dimensiones serán $\frac{40}{3}$ cm y $\frac{20}{3}$ cm.

29. f ´(x) = $3x^2 + 2Kx - 3$; f ´(3) = 0 ; K = - 4.

30. Llamamos x al lado de la base del prisma e y a la altura. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

V = $x^2 \cdot y = 42\,750$

Coste : C (x) = $95x^2 + \frac{5130000}{x}$; C´(x) = $190x - \frac{5130000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 30\,dm$

C ´´ (30) > 0. Luego las dimensiones que hacen mínimo el coste son: base 30 dm y altura 47,5 dm

31. La solución es:

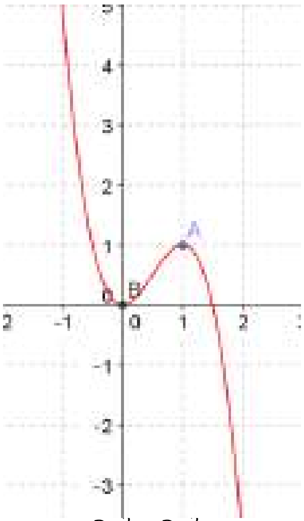
N ´(t) = - 480 + 144 t – $6t^2$ = 0 ; x = 4 ; x = 20

N ´´ (t) = 144 – 12t ; N ´´ (4) > 0 y N ´´ (20)< 0. Por tanto:

El máximo número de personas conectadas a Internet se produce a las 20 horas y es de 8200 personas. El mínimo número se produce a las 4 de la mañana y es de 4104 personas.

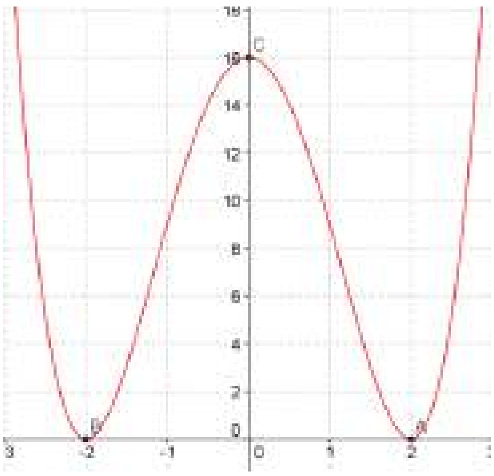
32. Las gráficas son:

a)



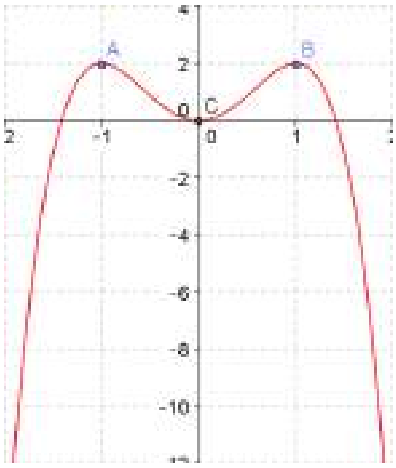
$y = 3x^2 - 2x^3$
Máximo (1, 1)
Mínimo (0, 0)
Cortes (0, 0) y (1, 5; 0)

b)



$y = x^4 - 8x^2 + 16$
Máximo (0, 16)
Mínimos (- 2, 0) y (2, 0)
Cortes (- 2, 0); (2, 0) y (0, 16)
Simétrica respecto de OY

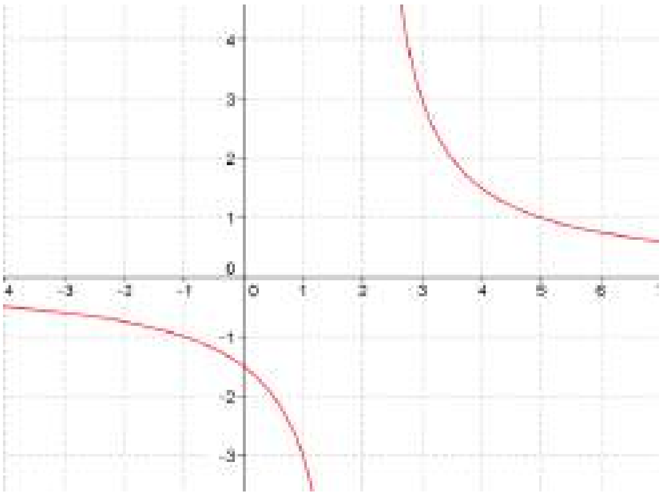
c)



$y = 4x^2 – 2x^4$

Máximo (- 1, 2) y (1, 2)
Mínimo (0, 0)
Cortes (- 1, 4; 0) (1, 4; 0) y (0; 0)
Simétrica respecto de OY

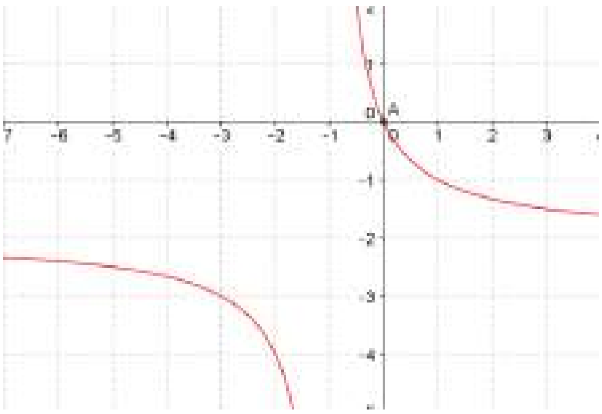
d)



$$y = \frac{3}{x - 2}$$

Asíntotas x = 2 e y = 0

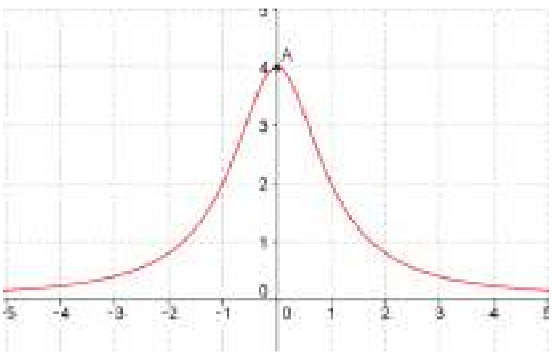
e)



$$y = \frac{-2x}{x + 1}$$

Asíntotas x = - 1 e y = - 2
Cortes (0; 0)

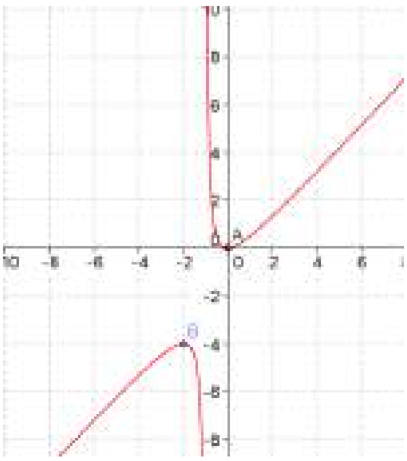
f)



$$y = \frac{4}{x^2 + 1}$$

Asíntota y = 0
Cortes (0, 4)
Máximo (0, 4)
Simétrica respecto de OY

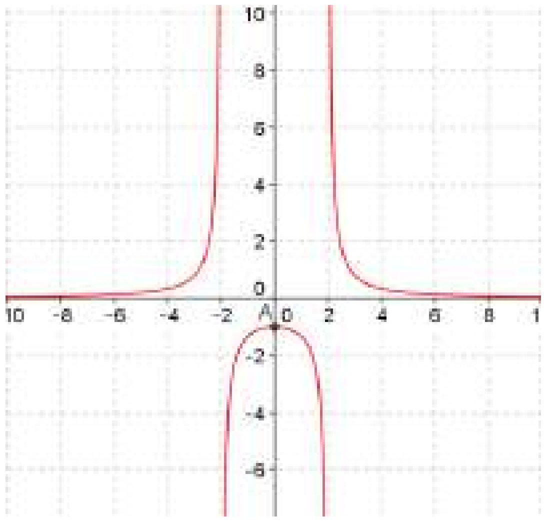
g)



$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

Asíntotas x = - 1 e y = x - 1
Cortes (0, 0)

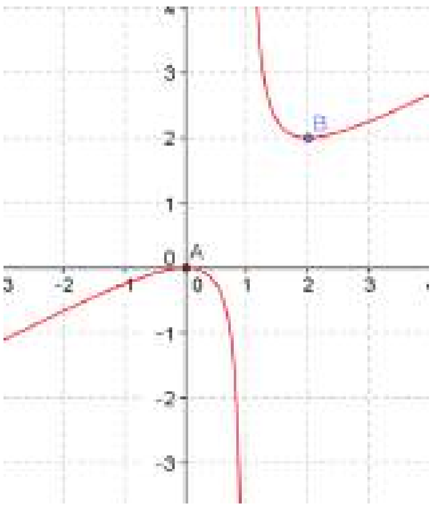
h)



$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

Asíntotas x = 2, x = - 2 e y = 0
Cortes (0, -1)
Simétrica respecto al eje OY

i)



$$y = \frac{x^2}{2\,(x-1)}$$

Asíntotas x = 1 e y = 1/2
Cortes (0, 0)

ACTIVIDADES-PÁG. 264

33. La producción aumenta cuando $P'(T) = 120 + 54T - 3T^2 > 0$.

$P'(T) = 120 + 54T - 3T^2 = 0$; $T = 20^\circ$; $T = -2^\circ$. Aumenta la producción cuando $T \in \left(-2^\circ,\ 20^\circ\right)$

El máximo número de kilos se consigue para $T = 20^\circ$

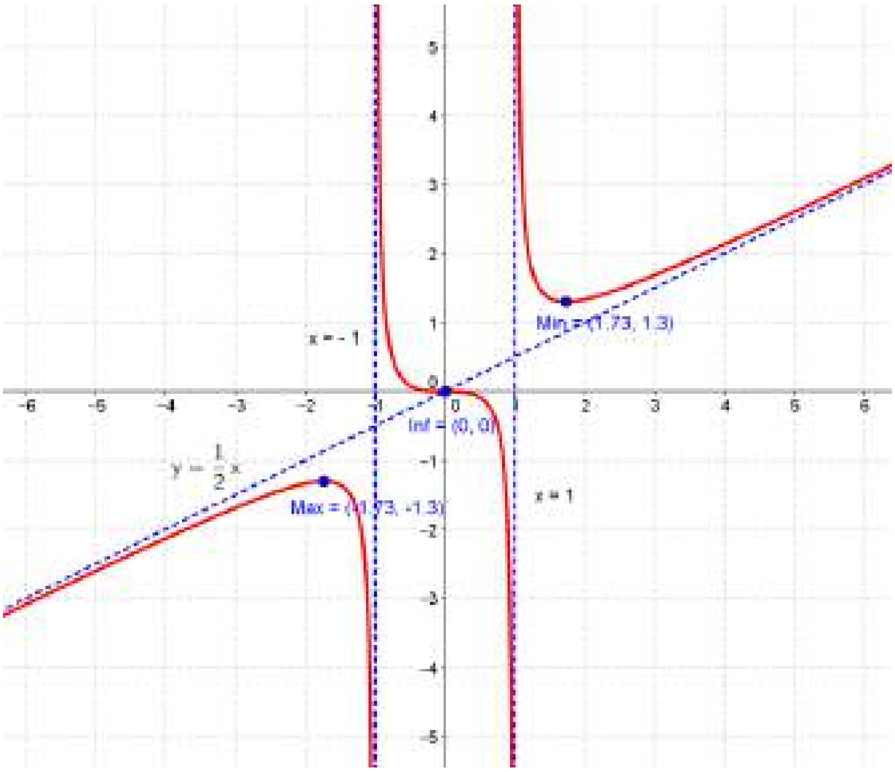
34. Las asíntotas de la función son las rectas $x = -1$, $x = 1$ e $y = \frac{1}{2}x$.

La función es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

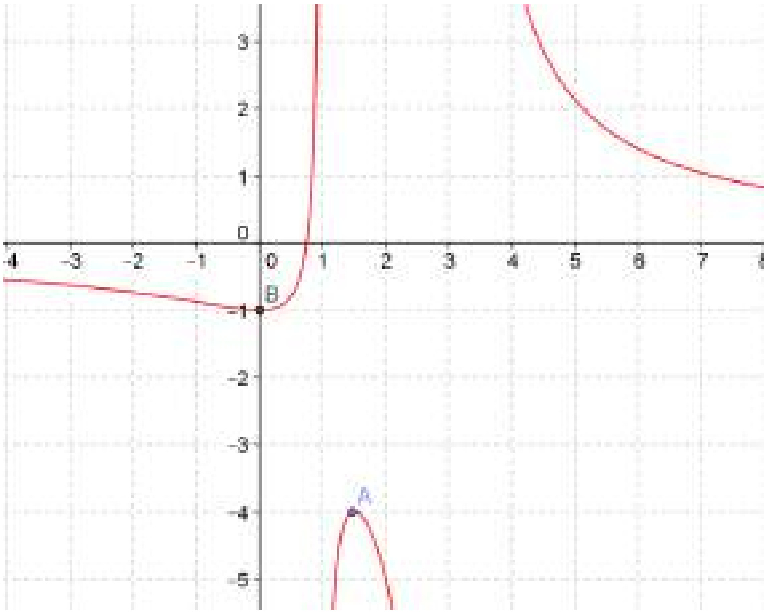
Es cóncava hacia las y positivas en $\left(-1, 0\right) \cup \left(1, +\infty\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(-\infty, -1\right) \cup \left(0, 1\right)$. Tiene un punto de inflexión en (0, 0).

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.

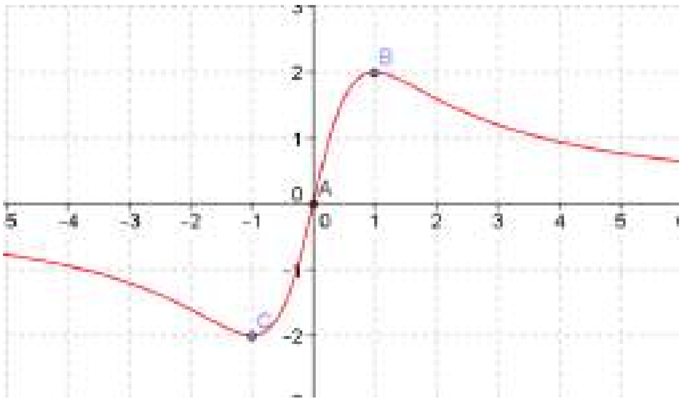


35. Las gráficas son:

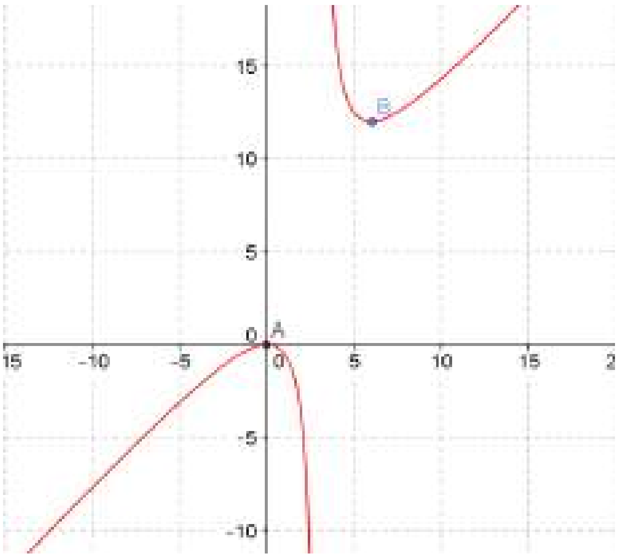
a)
Máximo (1,5; - 4)
Mínimo (0, - 1)
Cortes (3/4; 0) y (0, -1)
Asíntotas x = 3; x = 1; y = 0



b)
Máximo (1, 2)
Mínimo (- 1, - 2)
Cortes (0, 0)
Asíntotas y = 0
Simétrica respecto al origen de coordenadas



c)
Máximo (0, 0)
Mínimo (6, 12)
Cortes (0, 0)
Asíntotas x = 3; y = x + 3



36. La función que muestra el ingreso es:

$$I(x) = (60\,000 - 6x) \cdot x = 60\,000\,x - 6x^2$$

Para que este ingreso sea máximo ha de vender a 5000 € la pieza.

37. Llamaos x e y a las dimensiones del cartel. La función a minimizar es A (x, y) = x · y.

La relación entre las variables x e y es:

$$(x-8)\cdot(y-5) = 100 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{5x+60}{x-8}$$

Sustituyendo en la función anterior, obtenemos: $A(x) = \dfrac{5x^2 + 60x}{x-8}$.

La primera derivada, $A'(x) = \dfrac{5x^2 - 80x - 480}{(x-8)^2}$, se anula para x = 20,65.

Por tanto las dimensiones del cartel serán x = 20,65 cm e y = 12,91 cm.

38. a) El radio inicial es R (0) = 0,5 cm. Para que el radio sea de 2,5 cm han de pasar 2,13 minutos.

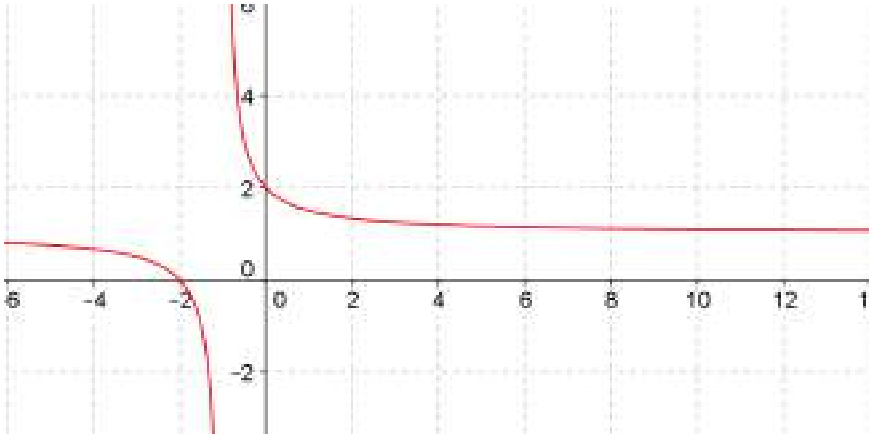
b) La tasa de variación del radio respecto al tiempo viene dada por $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{162 \cdot t^2}{(t^3+12)^2}$.

c) El área de la mancha es A (t) = π · R^2 y $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi \cdot \dfrac{6+5t^3}{t^3+12} \cdot \dfrac{162 \cdot t^2}{(t^3+12)^2}$ y para R = 4; t = 4,48 minutos y la tasa de variación del área de la mancha es 8,79 m^2/min.

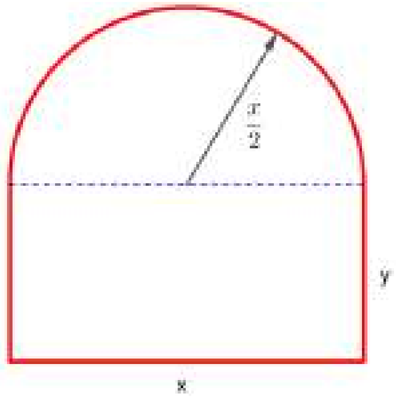
39. En el dibujo está representada gráficamente la función dada.

Sólo consideramos la parte positiva de la gráfica (desde t = 0), ya que el resto no tiene sentido en el contexto.

En el año 1980 (t = 0) había 2000 ejemplares de lince ibérico, éstos van disminuyendo con los años tendiendo hacia 1000 ejemplares.



40. Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo y $\frac{x}{2}$ al radio de la semicircunferencia como puede verse en la imagen.



El perímetro de la ventana mide:

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16 - 2x - \pi x}{4}$$

La superficie de la ventana, en función de la variable x, es:

$$A\,(x) = \frac{-4x^2 - \pi x^2 + 32x}{8} \quad \Rightarrow \quad A\,(x) = -\frac{(4+\pi)x^2}{8} + 4x$$

El valor que hace máxima a la función anterior es $x = \frac{16}{4+\pi} = 2{,}24$.

Por tanto, las dimensiones de la ventana serán x = 2,24 m e y = 1,12 m.

ACTIVIDADES-PÁG. 265

Las propiedades de esta gráfica son:

No está definida en el origen.

No tiene simetrías ni es periódica.

No tiene cortes con los ejes coordenadas.

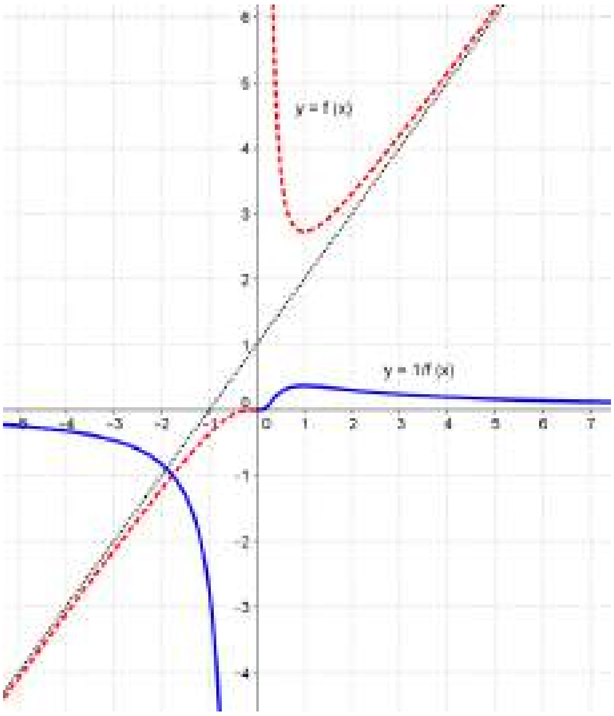
Las asíntotas son las rectas x = 0 (eje OY) e y = x + 1.

Tiene un mínimo relativo y no tiene máximos relativos ni puntos de inflexión.

Las gráficas de las funciones pedidas son las que están dibujadas en trazo continuo de color azul. Van acompañadas de la gráfica de la función y = f (x) en trazo discontinuo de color rojo

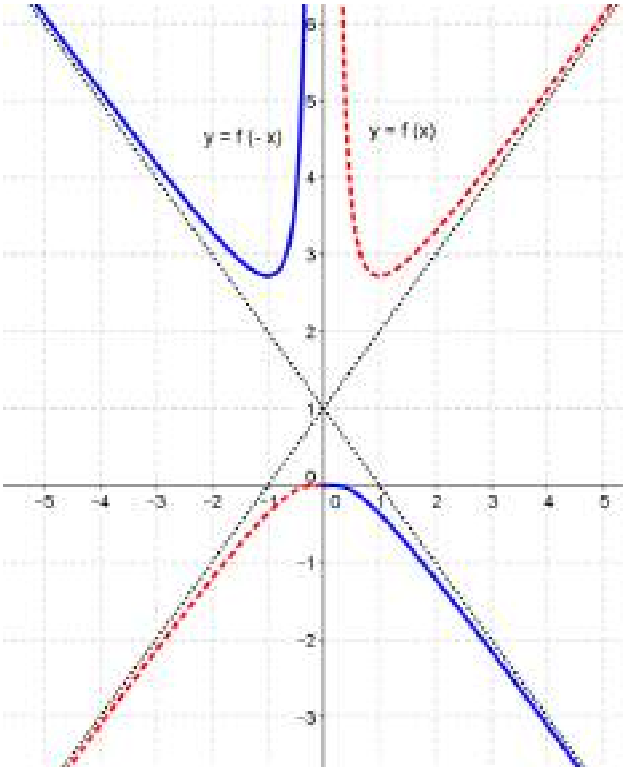
a) y = 1/f (x)

Se dibuja teniendo en cuenta que donde la f(x) crece esta decrece y donde decrece esta crece. Además los cortes con OX de f(x) son asíntotas verticales de esta otra.



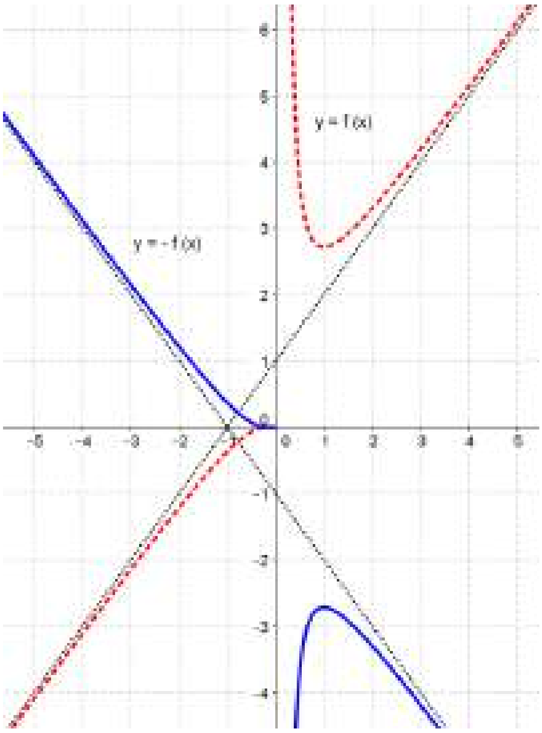
b) y = f (- x)

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica es la simétrica de f(x) respecto al eje de ordenadas.



c) y = - f (x)

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica es la simétrica de f(x) respecto al eje de abscisas.



d) y = |f(x)|

Se dibuja teniendo en cuenta que esta gráfica se obtiene de f(x) manteniendo la parte de ordenadas positivas y las ramas de ordenadas negativas se hace su simétrica respecto al eje de abscisas.