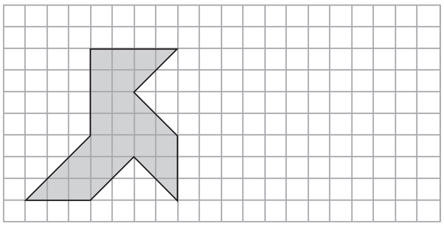
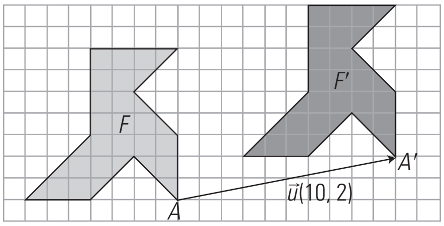
11. Movimientos

1. Vectores y traslaciones

PIENSA Y CALCULA

Copia en tu cuaderno y dibuja la pajarita 10 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.





CARNÉ CALCULISTA

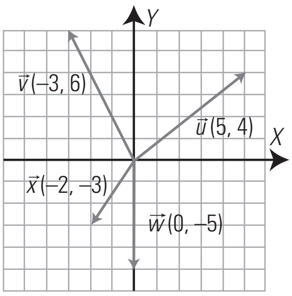
Desarrolla: $(3x^2 - 5)^2 = 9x^4 - 30x^2 + 25$

Factoriza: $x^3 + 12x^2 + 36x = x(x + 6)^2$

APLICA LA TEORÍA

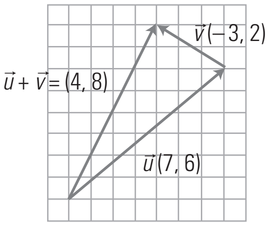
1. Dibuja unos ejes coordenados y representa en ellos los siguientes vectores de forma que el origen de cada vector sea el origen de coordenadas:

a) $\vec{u}(5, 4)$ **b)** $\vec{v}(-3, 6)$ **c)** $\vec{w}(0, -5)$ **d)** $\vec{x}(-2, -3)$



2. Suma de forma analítica y geométrica los vectores $\vec{u}(7, 6)$ **y** $\vec{v}(-3, 2)$

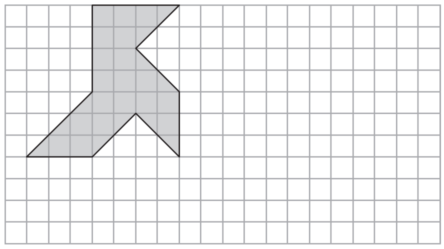
$\vec{u} + \vec{v} = (4, 8)$

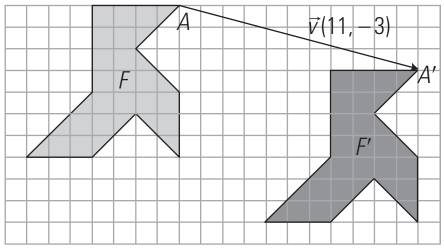


3. Pon tres ejemplos de la vida real en los que se utilice una traslación.

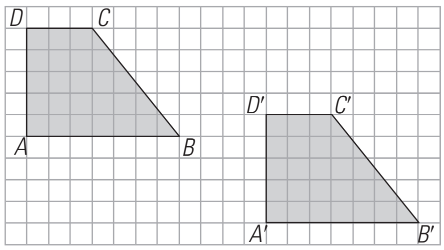
a) Una ventanilla de un coche cuando se sube y se baja.
b) Una puerta corredera cuando se abre y se cierra.
c) Un ascensor cuando sube y baja.

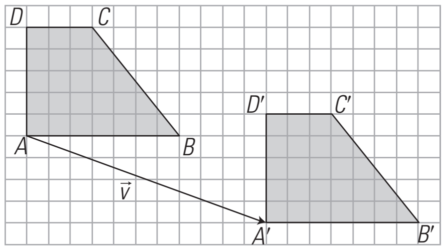
4. Dada la pajarita del dibujo, cópiala en tu cuaderno y trasládala según el vector $\vec{v}(11, -3)$





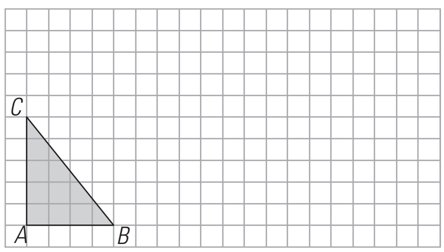
5. Calcula el vector que transforma el trapecio *ABCD* en el trapecio *A′B′C′D′*



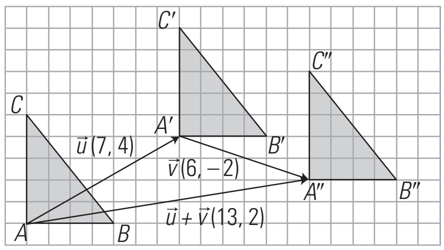


$\vec{v}(11, -4)$

6. Halla la composición de las traslaciones de vectores $\vec{u}(7, 4)$ **y** $\vec{v}(6, -2)$ **y escribe el vector correspondiente. Después aplica la traslación resultante al triángulo del dibujo.**



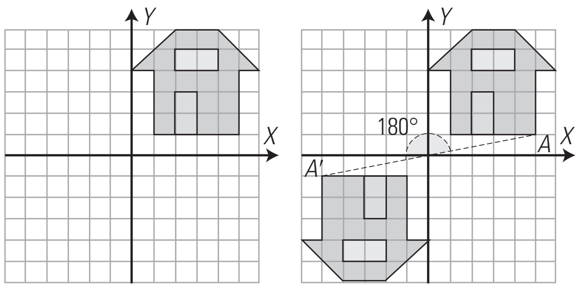
$\vec{u} + \vec{v} = (13, 2)$



2. GIROS Y SIMETRÍA CENTRAL

PIENSA Y CALCULA

Dibuja en tu cuaderno la casa simétrica del dibujo respecto del origen de coordenadas. Marca el homólogo de un punto cualquiera y halla el ángulo que ha girado respecto del origen de coordenadas.



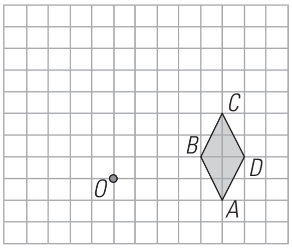
CARNÉ CALCULISTA

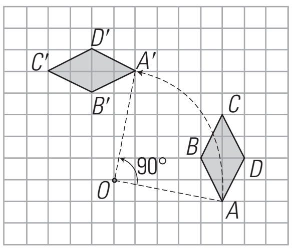
Resuelve la ecuación:

$$\frac{x}{3} - 5 + \frac{x-1}{4} = x - \frac{3x+1}{6} \Rightarrow x = 61$$

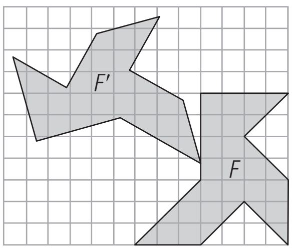
APLICA LA TEORÍA

7. Aplica al rombo de la figura un giro de 90° respecto del centro *O*

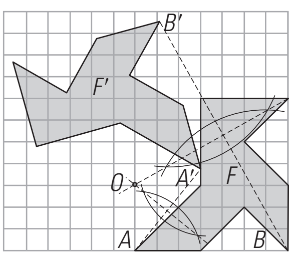




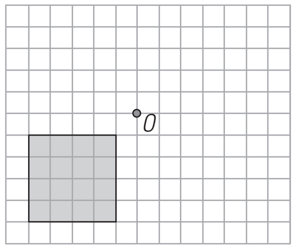
8. Calcula el centro de giro que transforma la pajarita *F* en la pajarita *F'*

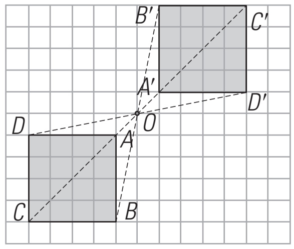


El centro de giro es el punto de corte de las mediatrices de los segmentos *AA'* y *BB'*



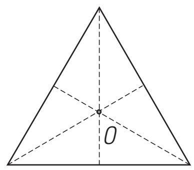
9. Aplica al cuadrado de la figura una simetría central de centro el punto *O*



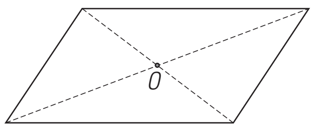


10. Dibuja un triángulo equilátero y halla su centro de giro. ¿Cuánto tiene que girar para que coincida consigo mismo?

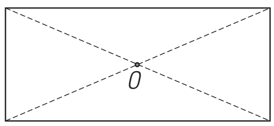
120°, o bien 240°



11. Dibuja un romboide y su centro de simetría.



12. Dibuja un rectángulo. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



El argumento deber ser 180°

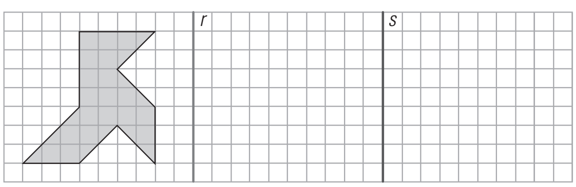
13. Pon tres ejemplos de la vida real en los que se utilice un giro.

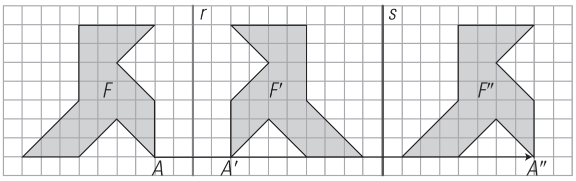
a) Al abrir una puerta de bisagras.
b) Al pasar las hojas de un libro.
c) Las aspas de un molino de energía eólica.

3. SIMETRÍA AXIAL. FRISOS Y MOSAICOS

PIENSA Y CALCULA

Dibuja la simétrica de la pajarita respecto de la recta *r*, y luego de la obtenida respecto de la recta *s*. Define el movimiento que transforma la pajarita de la izquierda en la de la derecha.





La composición corresponde a una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes, la dirección es perpendicular a los ejes y el sentido va desde el primer eje al segundo.

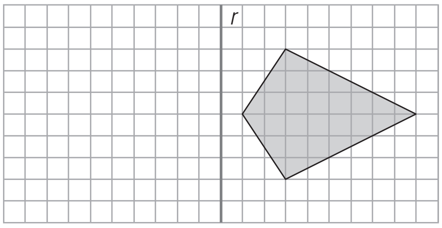
CARNÉ CALCULISTA

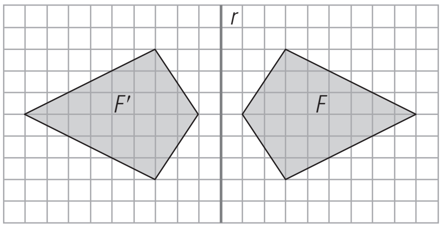
Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1 \\ 2x - 3y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2;\ y = 0$$

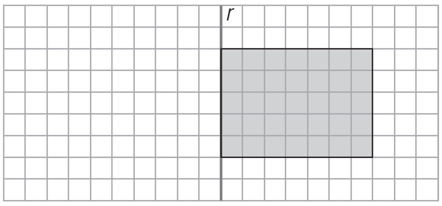
APLICA LA TEORÍA

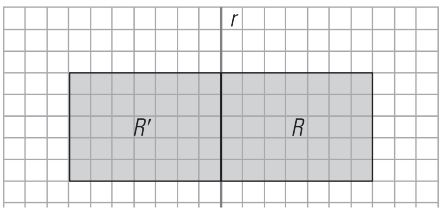
14. Dibuja en tu cuaderno la cometa simétrica de la del dibujo respecto del eje *r*



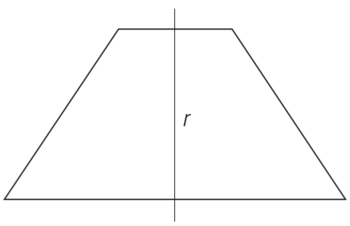


15. Dibuja en tu cuaderno el simétrico del rectángulo siguiente respecto del eje *r*

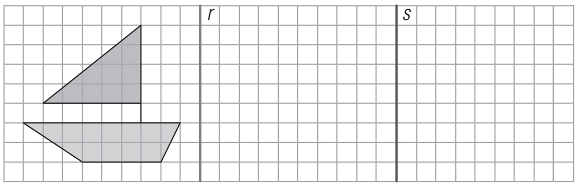


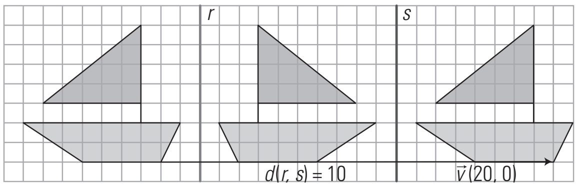


16. Dibuja un trapecio isósceles y su eje de simetría.



17. Dibuja en tu cuaderno el simétrico del barco respecto de la recta *r*, y después el simétrico del obtenido respecto de la recta *s*. ¿A qué movimiento corresponde la composición de las dos simetrías?

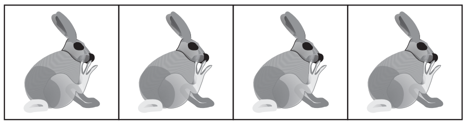




La composición corresponde a una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes, la dirección es perpendicular a los ejes y el sentido va desde el primer eje al segundo.

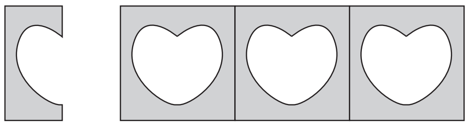
18. Dibuja un friso.

Solución abierta, por ejemplo:



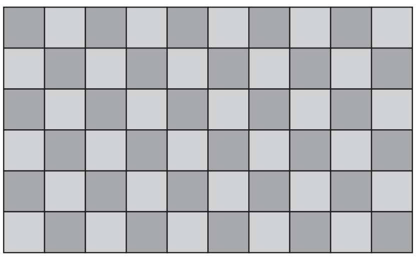
19. Haz un friso recortando una tira de papel doblada varias veces.

Solución abierta, por ejemplo:



20. Dibuja un mosaico regular.

Solución abierta, por ejemplo:



4. PLANOS Y EJES DE SIMETRÍA

PIENSA Y CALCULA

Observa la flor de la fotografía y dibuja en tu cuaderno un plano que divida a la flor en dos partes iguales o simétricas.

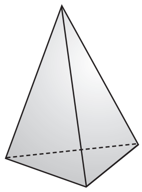
CARNÉ CALCULISTA

Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 24 m y 10 m

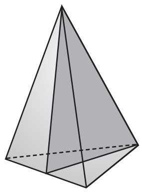
$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

APLICA LA TEORÍA

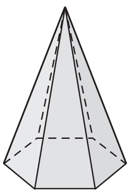
21. Dibuja en tu cuaderno el siguiente tetraedro. ¿Cuántos planos de simetría tiene?



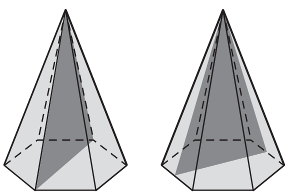
Tiene seis planos de simetría que pasan por una arista y el punto medio de otra arista, como el dibujo siguiente:



22. Dibuja en tu cuaderno una pirámide hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene?



Tiene tantos planos como ejes de simetría tiene la base. Como la base tiene 6 ejes de simetría, la pirámide tiene 6 planos que contiene a un eje de simetría que va de la base al vértice de la pirámide.

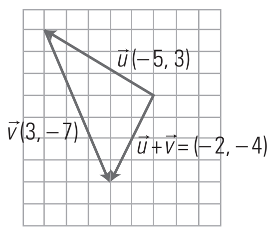


EJERCICIOS Y PROBLEMAS

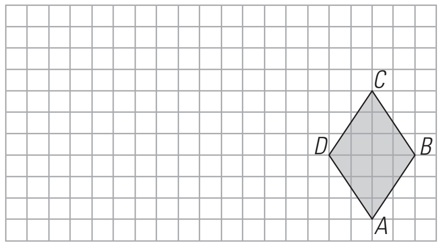
1. VECTORES Y TRASLACIONES

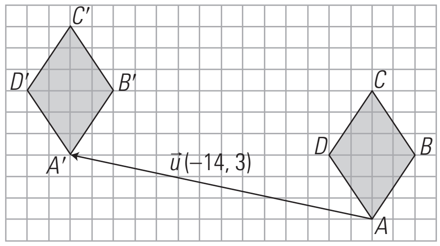
23. Suma de forma analítica y geométrica los vectores $\vec{u}(-5, 3)$ y $\vec{v}(3, -7)$

$\vec{u} + \vec{v} = (-2, -4)$

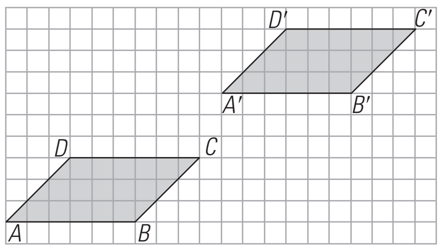


24. Dado el rombo de la figura, trasládalo según el vector $\vec{v}(-14, 3)$

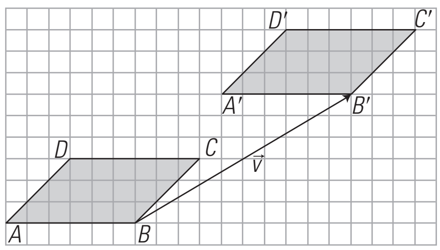




25. Calcula el vector que transforma el romboide *ABCD* en el romboide *A′B′C′D′*

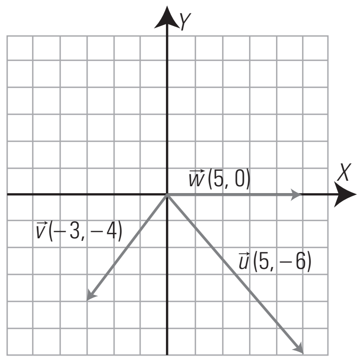


$\vec{v}(10, 6)$

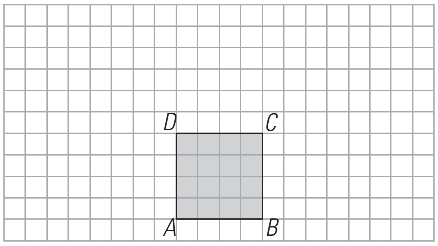


26. Dibuja unos ejes coordenados y representa en ellos los siguientes vectores de forma que su origen sea el origen de coordenadas:

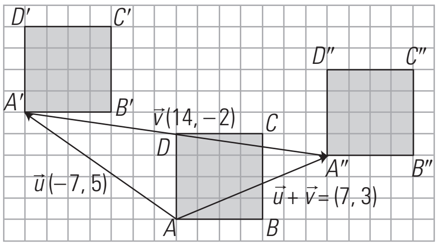
a) $\vec{u}(5, -6)$ b) $\vec{v}(-3, -4)$ c) $\vec{w}(5, 0)$



27. Halla la composición de las traslaciones de vectores $\vec{u}(-7, 5)$ y $\vec{v}(14, -2)$ y escribe el vector correspondiente. Aplica la traslación resultante al cuadrado del dibujo.

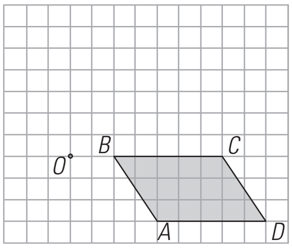


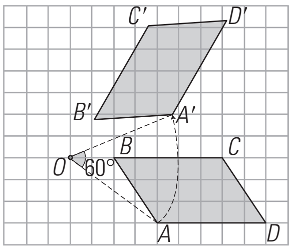
$\vec{u} + \vec{v} = (7, 3)$



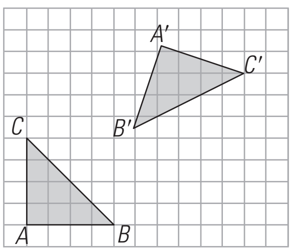
2. GIROS Y SIMETRÍA CENTRAL

28. Aplica un giro de 60° al romboide de la figura respecto del centro *O*

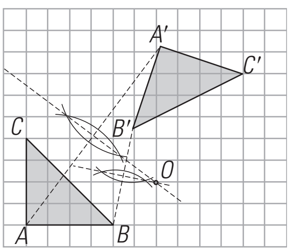




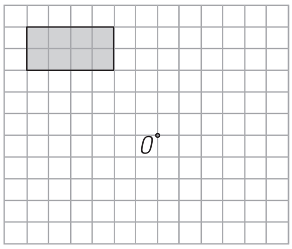
29. Calcula el centro de giro que transforma el triángulo rectángulo *ABC* en el *A′B′C′*

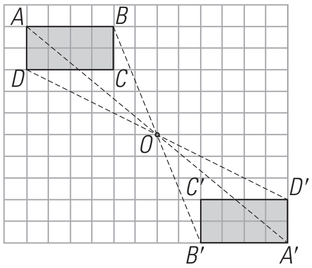


El centro de giro es el punto de corte de las mediatrices *AA′* y *BB′*

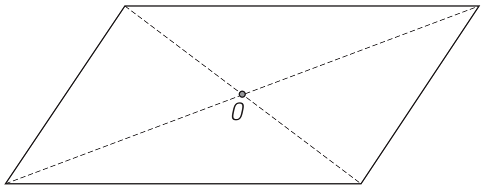


30. Aplica al rectángulo de la figura siguiente una simetría central de centro el punto *O*:



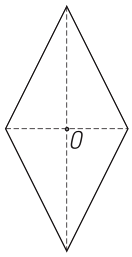


31. Dibuja un romboide y halla su centro de giro. ¿Cuánto tiene que girar para que coincida consigo mismo?

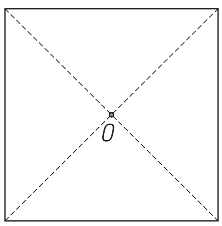


180°

32. Dibuja un rombo y su centro de simetría.



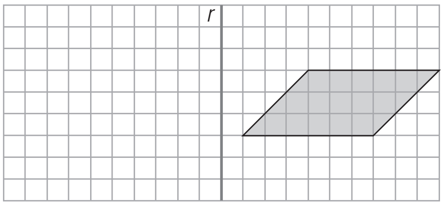
33. Dibuja un cuadrado. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.

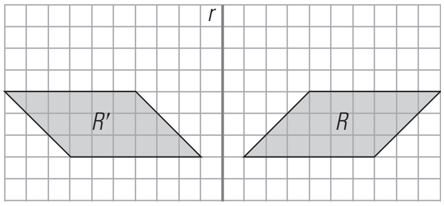


Los argumentos pueden ser: 90°, 180° y 270°

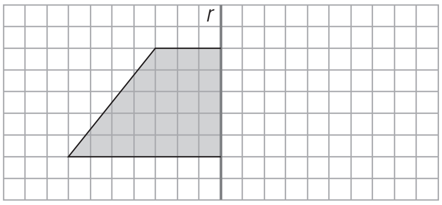
3. SIMETRÍA AXIAL. FRISOS Y MOSAICOS

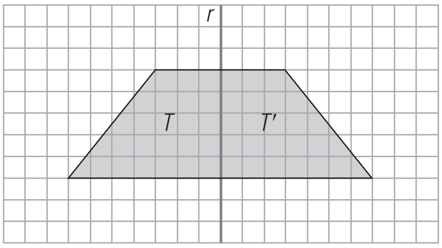
34. Copia en tu cuaderno y dibuja el simétrico del romboide del dibujo siguiente respecto del eje *r*



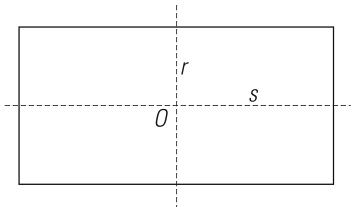


35. Copia en tu cuaderno y dibuja el simétrico del trapecio rectángulo del dibujo respecto del eje *r*



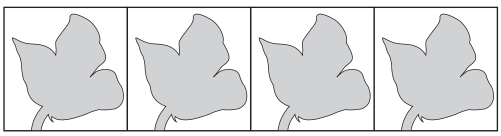


36. Dibuja un rectángulo y sus ejes de simetría.



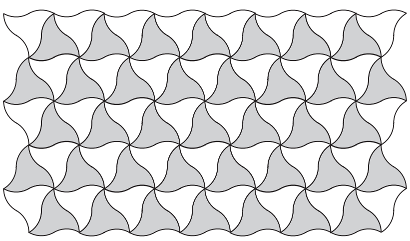
37. Dibuja un friso.

Solución abierta, por ejemplo:

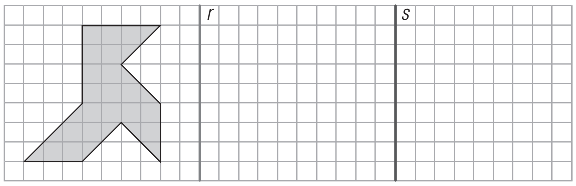


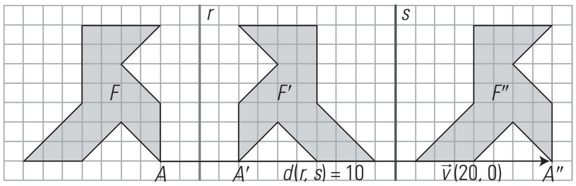
38. Dibuja un mosaico que no sea regular ni semirregular.

Solución abierta, por ejemplo:



39. Dibuja la pajarita simétrica del dibujo respecto de la recta *r* y después la simétrica de la obtenida respecto de la recta *s*. ¿A qué movimiento corresponde la composición de ambas simetrías?

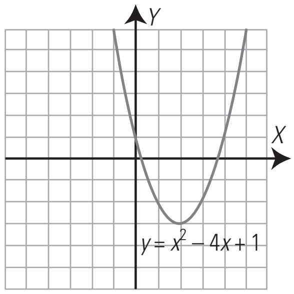




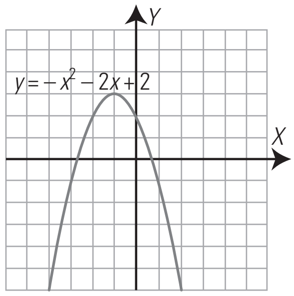
La composición corresponde a una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes, la dirección es perpendicular a los ejes y el sentido va desde el primer eje al segundo.

40. Dibuja el eje de simetría de las siguientes parábolas y halla su fórmula o ecuación.

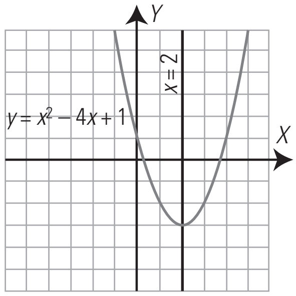
a)



b)

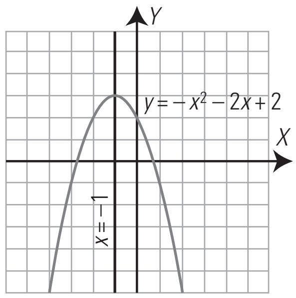


a)



El eje de simetría es $x = 2$

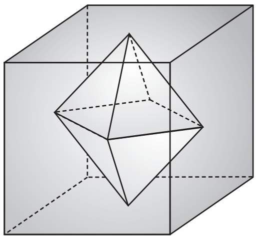
b)



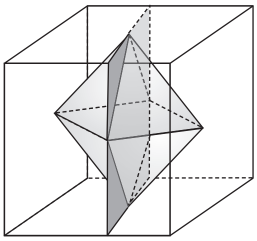
El eje de simetría es $x = -1$

4. PLANOS Y EJES DE SIMETRÍA

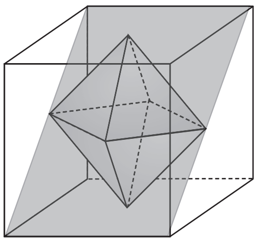
41. El cubo y el octoedro son dos poliedros duales. Teniendo esto en cuenta, ¿cuántos planos de simetría tiene el octoedro?



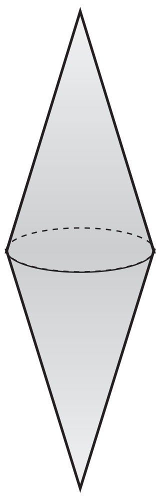
Como el octoedro y cubo son duales, ambos tienen el mismo número de planos. Hay tres planos que son paralelos a dos caras opuestas del cubo y que pasan por las aristas del octoedro.



Hay seis planos que pasan por las diagonales de dos caras opuestas del cubo y por el punto medio de una arista del octaedro y contiene a otra.



42. Copia la siguiente figura y encuentra los planos y los ejes de simetría.



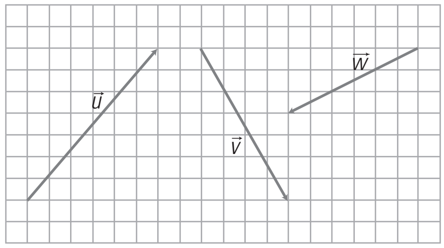
La figura está compuesta por dos conos unidos por su base.

Los planos de simetría serán todos los que pasan por un eje de simetría de la circunferencia y por los vértices de los conos.

El eje de simetría es la recta que pasa por los vértices.

PARA AMPLIAR

43. Escribe las coordenadas de los vectores del siguiente dibujo y calcula sus módulos:

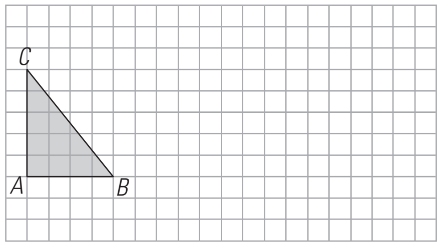


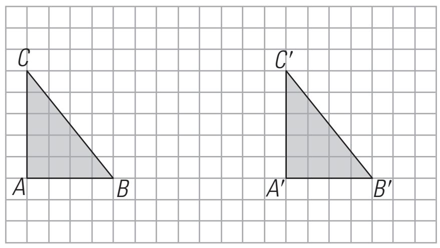
$\vec{u}(6, 7) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85} = 9{,}22$

$\vec{v}(4, -7) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{65} = 8{,}06$

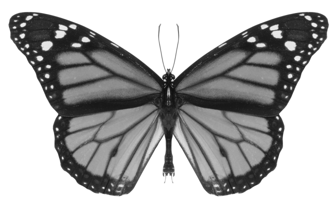
$\vec{w}(-6, -3) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$

44. Dado el triángulo rectángulo de la figura, trasládalo según el vector $\vec{v}$(12, 0)

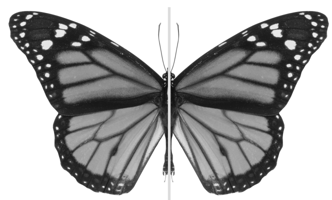




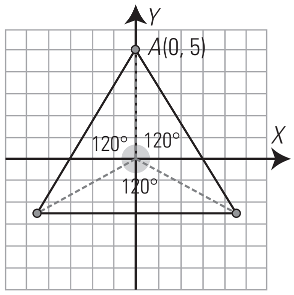
45. Dibuja en tu cuaderno el contorno de una mariposa y explica si posee simetría especular.



La mariposa tiene simetría especular con respecto a un plano que pase por el centro del cuerpo.

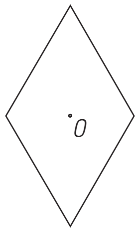


46. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto *A*(0, 5) un giro de centro el origen de coordenadas *O*(0, 0) y argumento 120°. Une mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



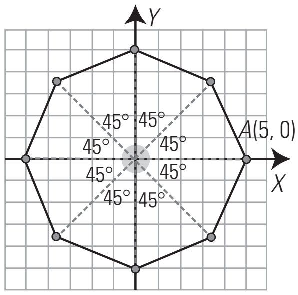
Se ha generado un triángulo equilátero.

47. Dibuja un rombo. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



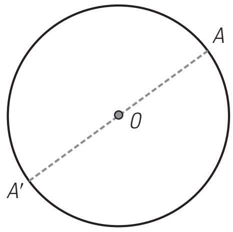
El argumento es 180°

48. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto *A*(5, 0) un giro de centro el origen de coordenadas *O*(0, 0) y argumento 45°. Une mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



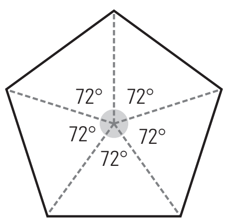
Se ha generado un octógono regular.

49. Dibuja una circunferencia y su centro de simetría.



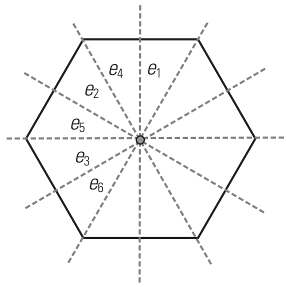
El centro de simetría es el centro de la circunferencia.

50. Dibuja un pentágono regular y halla su centro de giro. ¿Cuánto tiene que girar para que coincida consigo mismo?



Uno de los siguientes argumentos: 72°, 144°, 216° y 288°

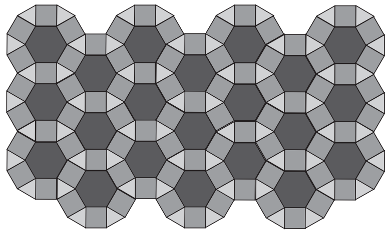
51. Dibuja un hexágono regular y sus ejes de simetría.



Tiene 6 ejes de simetría.

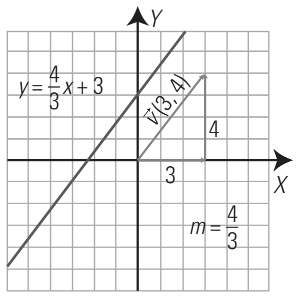
52. Dibuja un mosaico semirregular.

Solución abierta, por ejemplo:



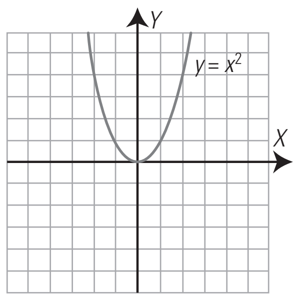
PROBLEMAS

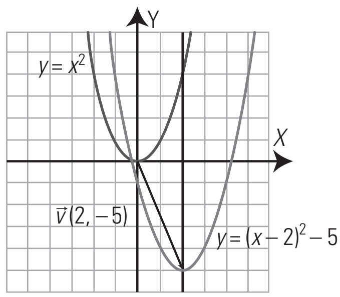
53. Dibuja en unos ejes coordenados una recta que sea doble o invariante por la traslación del vector $\vec{v}(3, 4)$. ¿Qué pendiente tiene?



La pendiente es $m = \dfrac{4}{3}$

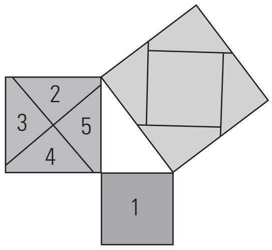
54. Traslada la parábola del dibujo según el vector $\vec{v}(2, -5)$ y halla la ecuación de la nueva parábola.

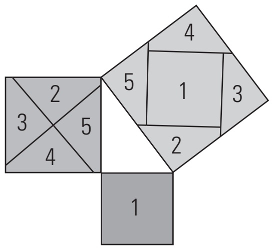




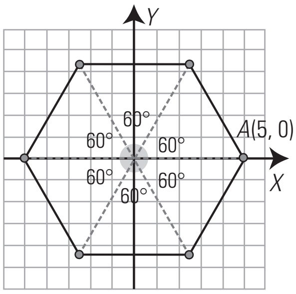
La nueva ecuación es: $y = x^2 - 4x - 1$

55. Demuestra el teorema de Pitágoras aplicando traslaciones a las superficies numeradas como 1, 2, 3, 4 y 5



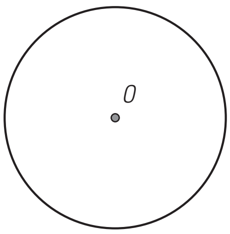


56. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto *A*(5, 0) un giro de centro el origen de coordenadas *O*(0, 0) y argumento 60°. Une mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



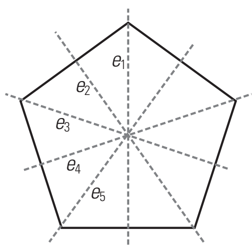
Un hexágono regular.

57. Dibuja una circunferencia. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



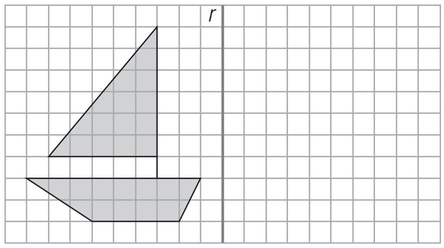
El centro de giro es el centro de la circunferencia y como argumento sirve cualquiera.

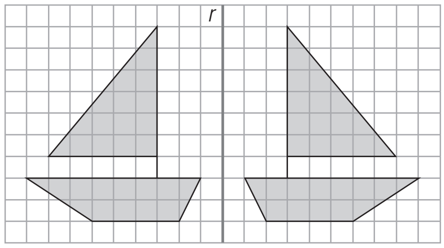
58. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene?



Tiene cinco ejes de simetría.

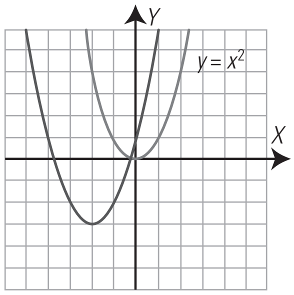
59. Halla el simétrico del barco respecto del eje *r*

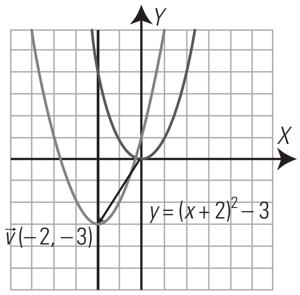




PARA PROFUNDIZAR

60. Calcula el vector que transforma la parábola roja en la parábola azul del siguiente dibujo y halla la ecuación de la nueva parábola.

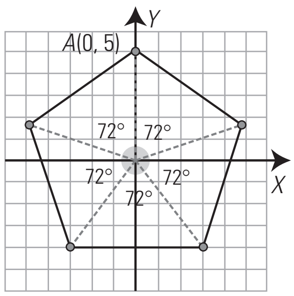




$\vec{v}(-2, -3)$

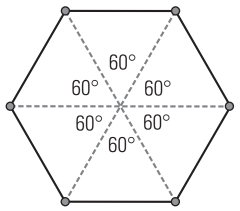
$y = x^2 + 4x + 1$

61. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto *A*(0, 5) un giro de centro el origen de coordenadas *O*(0, 0) y argumento 72°. Une mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



Un pentágono regular.

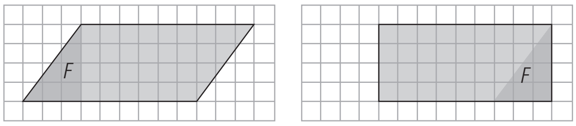
62. Dibuja un hexágono. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



El centro de giro es el centro del hexágono y el argumento puede ser: 60°, 120°, 180°, 240° y 300°

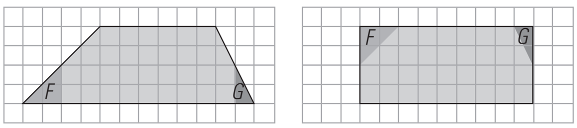
APLICA TUS COMPETENCIAS

63. ¿Qué movimientos hay que aplicar a la figura *F* para transformar un romboide en un rectángulo que tiene la misma base y la misma altura?



Una traslación de vector: $\vec{v}(9, 0)$

64. ¿Qué movimientos hay que aplicar a las figuras *F* y *G* para transformar un trapecio en un rectángulo que tiene por base la media de las dos bases del trapecio y por altura la misma del trapecio?



Una simetría central, de centro el vértice superior o un giro de 180°

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define qué es un vector y di cuáles son sus características. Pon un ejemplo.

Un **vector** es un segmento orientado.

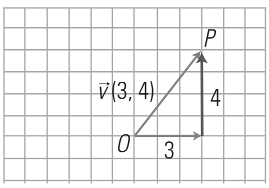
Las características de un vector son:

a) **Módulo:** es la longitud del vector. Se representa por $|\vec{v}|$

b) **Dirección:** es la definida por la recta que lo contiene.

c) **Sentido:** es el indicado por la punta de la flecha.

Ejemplo:



$\vec{v}(3, 4)$ es un vector que tiene una componente horizontal de 3 unidades y una componente vertical de 4 unidades.

O es el origen y *P* el extremo.

a) Módulo: se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

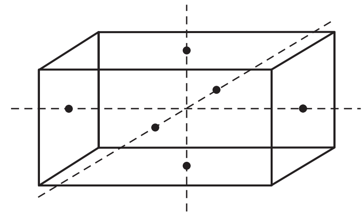
$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ unidades

b) Dirección: es la de la recta que pasa por *O* y *P*

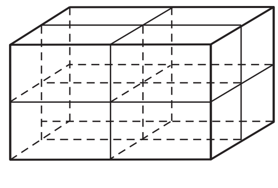
c) Sentido: es el que va de *O* hacia *P*

2. Dibuja un ortoedro y traza los ejes y los planos de simetría.

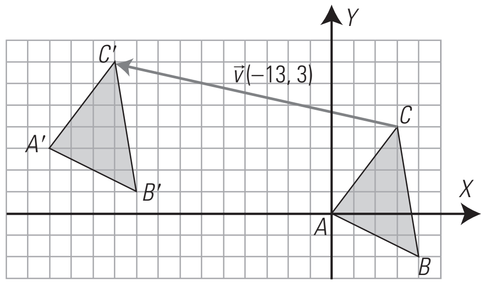
Tiene 3 ejes de simetría que son las rectas perpendiculares que pasan por el centro.



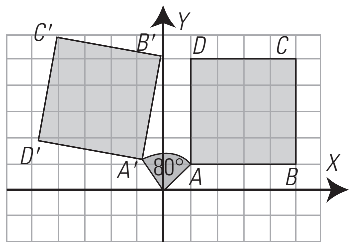
Tiene 3 planos de simetría que son los planos paralelos a las bases que pasan por el centro.



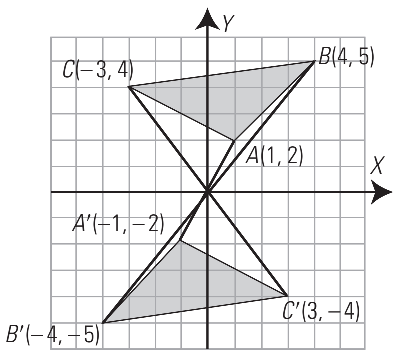
3. Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo que tiene los vértices en los puntos *A*(0, 0), *B*(4, –2) y *C*(3, 4) y trasládalo según el vector $\vec{v}$(–13, 3)



4. Dibuja en unos ejes coordenados el cuadrado que tiene los vértices en los puntos *A*(1, 1), *B*(5, 1), *C*(5, 5) y *D*(1, 5), y aplícale un giro de centro el origen *O*(0, 0) y amplitud 80°

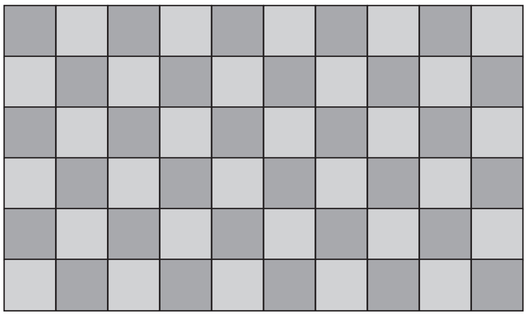


5. Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo que tiene los vértices en los puntos *A*(1, 2), *B*(4, 5) y *C*(–3, 4), y aplícale una simetría central de centro el origen *O*(0, 0)

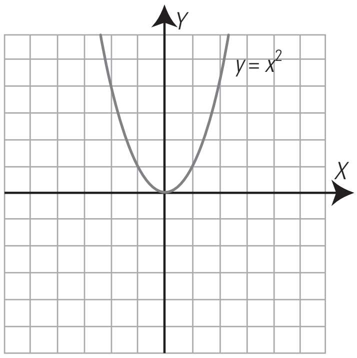


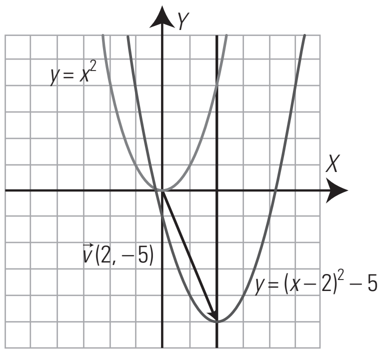
6. Dibuja un mosaico regular.

Solución abierta, por ejemplo:



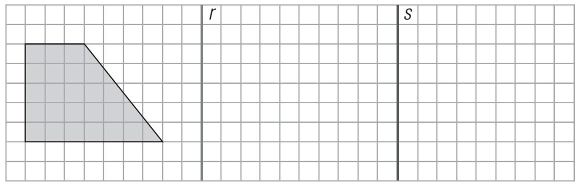
7. Dada la parábola del dibujo, trasládala según el vector $\vec{v}$(2, –5). Escribe la nueva ecuación de la parábola.

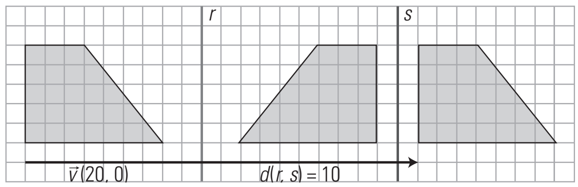




$y = x^2 - 4x + 1$

8. Dibuja el simétrico del trapecio respecto de la recta *r* y después el simétrico del obtenido respecto de la recta *s*. ¿A qué movimiento corresponde la composición de las dos simetrías?





La composición de las dos traslaciones corresponde a una traslación; el vector tiene de módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes; la dirección es perpendicular a los ejes, y el sentido va del primer eje al segundo.

WINDOWS/LINUX GEOGEBRA

PASO A PASO

65. Traslada un triángulo.

Resuelto en el libro del alumnado.

66. Gira un triángulo.

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

67. Dibuja un pentágono regular. Haz el simétrico del pentágono respecto del centro *O*

Resuelto en el libro del alumnado.

68. Dibuja un eje de simetría axial, *r*, y una pajarita y haz la simétrica respecto de la recta *r*

Resuelto en el libro del alumnado.

69. Genera un *applet* con GeoGebra del dibujo Traslación.ggb del ejercicio 65

Resuelto en el libro del alumnado.