MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
3.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

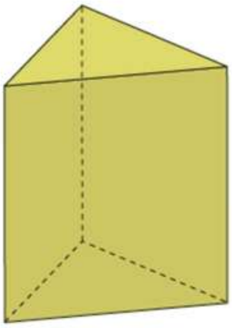
Unidad 12. Cuerpos geométricos

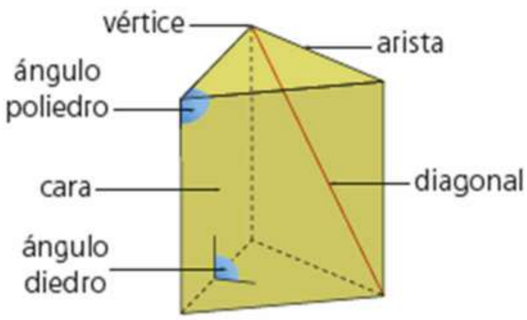
Unidad 12. Cuerpos geométricos

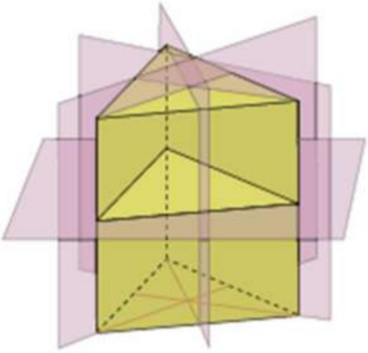
SOLUCIONES PÁG. 255

1 **Dibuja en tu cuaderno estos poliedros. Señala sus elementos y sus planos de simetría:**

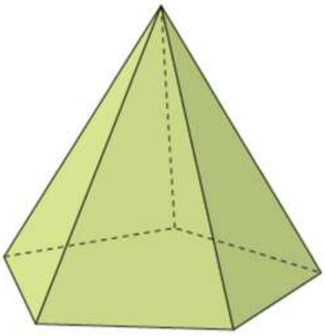
a.

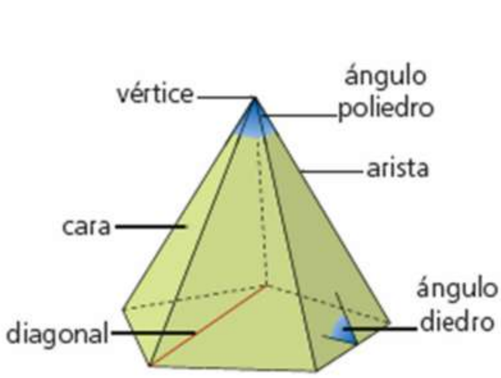


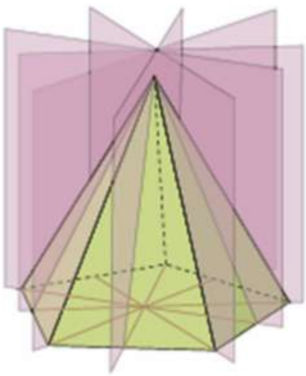




b.







2 Verifica que se cumple la fórmula de Euler en los sólidos platónicos.

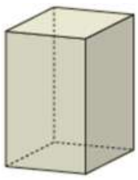
Tetraedro: 4 + 4 = 6 + 2
Cubo: 6 + 8 = 12 + 2
Octaedro: 8 + 6 = 12 + 2
Dodecaedro: 12 + 20 = 30 + 2
Icosaedro: 20 + 12 = 30 + 2

3 Indica tres objetos que sean poliedros convexos, otros tres que sean cóncavos y otros tres que sean poliedros regulares.

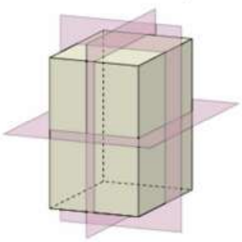
Respuesta abierta.

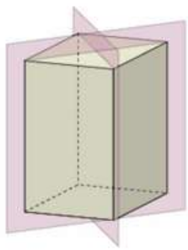
4 Indica cuál de estos poliedros es convexo y cuál cóncavo y comprueba si cumplen la fórmula de Euler. Dibújalos en tu cuaderno y señala sus planos de simetría.

a.

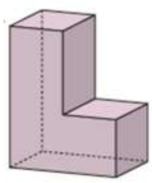


Convexo. 6 + 8 = 12 + 2

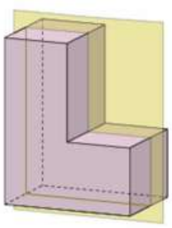




b.



Cóncavo. 8 + 12 = 18 + 2

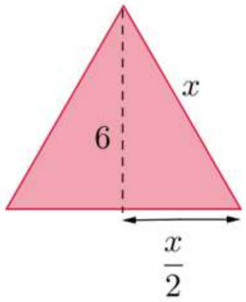


5 Halla el área y el volumen de un cubo de 5 cm de arista.

$A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{cubo} = 6 \cdot 5^2 = 150 \Rightarrow A_{cubo} = 150 \text{ cm}^2$
$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = 5^3 = 125 \Rightarrow V_{cubo} = 125 \text{ cm}^3$

6 Determina el área de un icosaedro una de cuyas caras mide 6 m de altura.

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de las aristas:



$$x^2 = 6^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2 = 144 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 144 \Rightarrow x = 6,93$$

La arista del icosaedro mide 6,93 m.

$$A_{\text{icosaedro}} = 5a^2\sqrt{3} \Rightarrow A_{\text{icosaedro}} = 5 \cdot 6,93^2 \cdot \sqrt{3} = 415,91 \Rightarrow A_{\text{icosaedro}} = 415,91 \text{ m}^2$$

7 Calcula el volumen de un octaedro de 10 dm de arista.

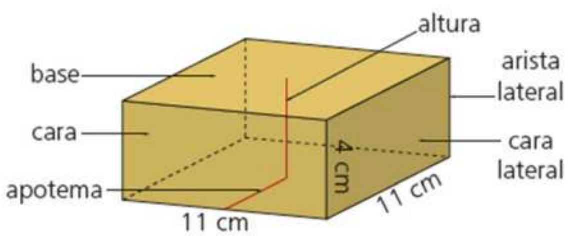
$$V_{\text{octaedro}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = \frac{10^3\sqrt{2}}{3} = 471,4 \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = 471,4 \text{ dm}^3$$

SOLUCIONES PÁG. 257

8 Mira a tu alrededor y busca tres objetos con forma de prisma.

Respuesta abierta.

9 Dibuja un prisma cuadrangular, señala sus elementos y calcula su área y su volumen, sabiendo que la arista de su base mide 11 cm y que tiene 4 cm de altura.

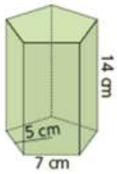


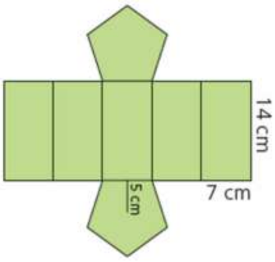
$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 11^2 + 4 \cdot 4 \cdot 11 = 418 \Rightarrow A_{\text{total}} = 418 \text{ cm}^2$
$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 11^2 \cdot 4 = 484 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 484 \text{ cm}^3$

10 Actividad resuelta.

11 Dibuja el desarrollo plano de los siguientes prismas y calcula su área total:

a.





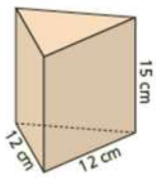
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

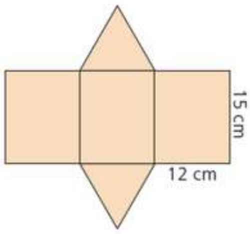
$A_{base} = \dfrac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{base} = \dfrac{5 \cdot 7 \cdot 5}{2} = 87{,}5 \Rightarrow A_{base} = 87{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{lateral} = 7 \cdot 5 \cdot 14 = 490 \text{ cm}^2$

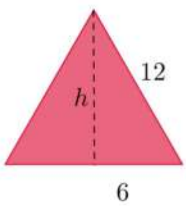
$A_{total} = 2 \cdot 87{,}5 + 490 = 665 \Rightarrow A_{total} = 665 \text{ cm}^2$

b.





Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la base que es un triángulo equilátero:



$12^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10{,}39 \Rightarrow h = 10{,}39 \text{ cm}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot \dfrac{12 \cdot 10{,}39}{2} + 3 \cdot 12 \cdot 15 = 664{,}68 \Rightarrow A_{total} = 664{,}68 \text{ cm}^2$

12 Un prisma hexagonal de 3 dm de altura tiene un área lateral de 90 dm². Si la apotema de su base mide 4 dm, ¿cuánto mide su área total?

El área lateral es el área de un rectángulo:

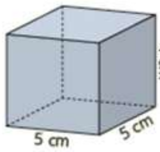
$A = b \cdot h = P \cdot h \Rightarrow 90 = 6 \cdot l \cdot 3 \Rightarrow l = \dfrac{90}{6 \cdot 3} = 5 \Rightarrow l = 5$ dm

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot \dfrac{P \cdot ap}{2} + 90 \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot 5 \cdot 4 + 90 = 210 \Rightarrow A_{total} = 210$ dm^2

13 Calcula mentalmente el área total y el volumen de los siguientes prismas:

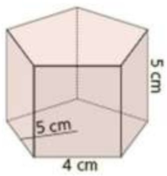
a.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 4 = 130 \Rightarrow A_{total} = 130$ cm^2

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{prisma} = 5^2 \cdot 4 = 100 \Rightarrow V_{prisma} = 100$ cm^3

b.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

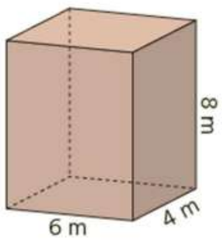
$A_{total} = 2 \cdot \dfrac{P \cdot ap}{2} + 5 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{total} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 5 = 200 \Rightarrow A_{total} = 200$ cm^2

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

$V_{prisma} = \dfrac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{prisma} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 5}{2} \cdot 5 = 250 \Rightarrow V_{prisma} = 250$ cm^3

14 ¿Cuál de estos dos prismas tiene mayor área?

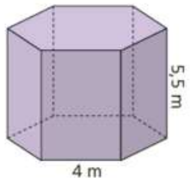
a.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 208$

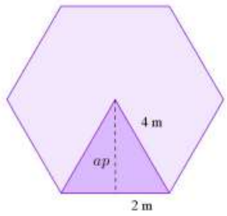
$A_{total} = 208$ m^2

b.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base que es un hexágono regular:



$$4^2 = 2^2 + ap^2 \Rightarrow ap = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,46 \Rightarrow ap = 3,46 \text{ m}$$

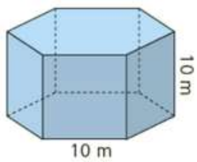
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 4 \cdot 3,46 + 6 \cdot 4 \cdot 5,5 = 215,04$$

$$A_{\text{total}} = 215,04 \text{ m}^2$$

Tiene mayor área el prisma **b.**

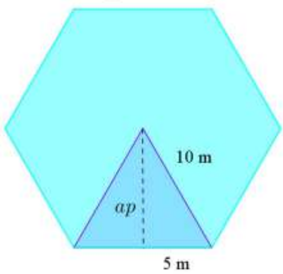
15 Halla el área total y el volumen de los siguientes prismas:

a.



$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la base que es un hexágono regular:



$$10^2 = 5^2 + ap^2 \Rightarrow ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8,66 \Rightarrow ap = 8,66 \text{ m}$$

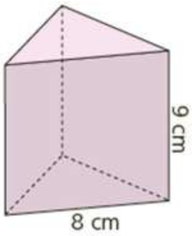
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 6 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 10 \cdot 8,66 + 6 \cdot 10 \cdot 10 = 1119,6$$

$$A_{\text{total}} = 1119,6 \text{ m}^2$$

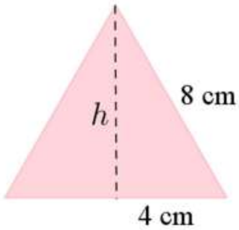
$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} \cdot 10 = 2598 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 2598 \text{ m}^3$$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la base que es un triángulo equilátero:



$8^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}93 \Rightarrow h = 6{,}93$ cm

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 9 = 271{,}44 \Rightarrow A_{total} = 271{,}44 \text{ cm}^2$

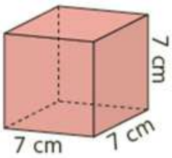
$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

$V_{prisma} = \frac{b \cdot h_{base}}{2} \cdot h_{prisma} \Rightarrow V_{prisma} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 9 = 249{,}48 \Rightarrow V_{prisma} = 249{,}48 \text{ cm}^3$

SOLUCIONES PÁG 259

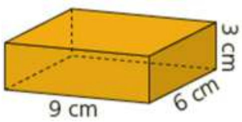
16 Halla el área total y el volumen de los paralelepípedos.

a.



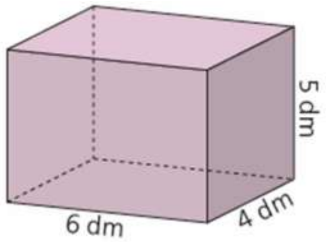
$A_{cubo} = 6a^2 \Rightarrow A_{cubo} = 6 \cdot 7^2 = 294 \Rightarrow A_{cubo} = 294 \text{ cm}^2$
$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = 7^3 = 343 \Rightarrow V_{cubo} = 343 \text{ cm}^3$

b.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot a \cdot b + P \cdot h$
$A_{total} = 2 \cdot 9 \cdot 6 + (2 \cdot 9 + 2 \cdot 6) \cdot 3 = 198 \text{ cm}^2$
$V_{paralelepípedo} = A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{paralelepípedo} = 9 \cdot 6 \cdot 3 = 162 \Rightarrow V_{paralelepípedo} = 162 \text{ cm}^3$

17 Dibuja un ortoedro con unas dimensiones de 4 y 6 dm de base y 5 dm de altura y calcula el área total y el volumen.



$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot a \cdot b + P \cdot h$
$A_{\text{total}} = 2 \cdot 6 \cdot 4 + (2 \cdot 6 + 2 \cdot 4) \cdot 5 = 148 \text{ dm}^2$
$V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 120 \text{ dm}^3$

18 Responde a las siguientes preguntas:

a. Si se duplica la arista de la base de un ortoedro de base cuadrada y se mantiene igual la altura, ¿se duplicará también su volumen?

Sea un ortoedro cuyas dimensiones son: $a \times a \times h$. Al duplicar la arista de la base se tiene otro ortoedro de dimensiones: $2a \times 2a \times h$.
Para el primer ortoedro:
$V_{\text{ortoedro 1}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot h$
Para el segundo ortoedro:
$V_{\text{ortoedro 2}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 2a \cdot 2a \cdot h = 4a^2 \cdot h$
La relación entre sus volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{a^2 \cdot h}{4 \cdot a^2 \cdot h} \Rightarrow \frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{\cancel{a^2} \cdot \cancel{h}}{4 \cdot \cancel{a^2} \cdot \cancel{h}} \Rightarrow V_{\text{ortoedro 2}} = 4 \cdot V_{\text{ortoedro 1}}$$

El volumen se cuadruplica.

b. ¿Y si lo que se duplica es la altura y la arista lo que se mantiene igual?

Sea un ortoedro cuyas dimensiones son: $a \times a \times h$. Al duplicar la altura se tiene otro ortoedro de dimensiones: $a \times a \times 2h$.
Para el primer ortoedro:
$V_{\text{ortoedro 1}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = a \cdot a \cdot h = a^2 \cdot h$
Para el segundo ortoedro:
$V_{\text{ortoedro 2}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = a \cdot a \cdot 2h = a^2 \cdot 2h$
La relación entre sus volúmenes es:

$$\frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{a^2 \cdot h}{a^2 \cdot 2h} \Rightarrow \frac{V_{\text{ortoedro 1}}}{V_{\text{ortoedro 2}}} = \frac{\cancel{a^2} \cdot \cancel{h}}{\cancel{a^2} \cdot 2 \cdot \cancel{h}} \Rightarrow V_{\text{ortoedro 2}} = 2 \cdot V_{\text{ortoedro 1}}$$

El volumen se duplica.

c. Comprueba tus respuestas a las dos preguntas anteriores inventando valores para los elementos del ortoedro y calculando el volumen.

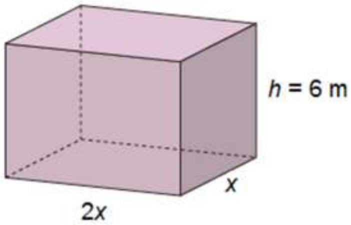
$V_{\text{ortoedro inicial}}$: $a^2 \cdot h$
$V_{\text{ortoedro arista doble}}$: $4a^2 \cdot h$
$V_{\text{ortoedro altura doble}}$: $2a^2 \cdot h$

d. ¿Duplicará un cubo su volumen al duplicar la arista?

Sea un cubo de arista a. Al duplicar la arista se tiene otro cubo con arista $2a$.
Para el primer cubo:
$V_{\text{cubo}} = a^3$

Para el segundo cubo:
$V_{\text{cubo}} = (2a)^3 = 8a^3$
La relación entre sus volúmenes es:
$$\frac{V_{\text{cubo 1}}}{V_{\text{cubo 2}}} = \frac{a^3}{(2a)^3} \Rightarrow \frac{V_{\text{cubo 1}}}{V_{\text{cubo 2}}} = \frac{\cancel{a^3}}{8\cancel{a^3}} \Rightarrow V_{\text{cubo 2}} = 8 \cdot V_{\text{cubo 1}}$$
El volumen es ocho veces mayor.

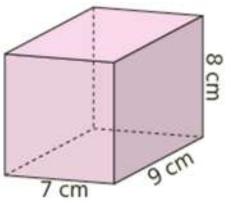
19 Un ortoedro de 6 m de altura tiene un área lateral de 180 m^2. Si su base mide el doble de largo que de ancho, ¿cuánto miden su área total y su volumen?



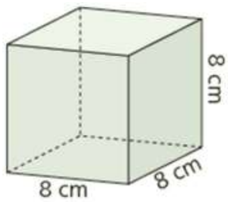
Se calcular el valor de x a partir del área lateral:
$A_{\text{lateral}} = P \cdot h \Rightarrow A_{\text{lateral}} = (2 \cdot 2x + 2 \cdot x) \cdot \text{h} \Rightarrow 180 = 6x \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{180}{36} = 5$
La base mide 10 m de largo y 5 m de ancho.
$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 10 \cdot 5 + 180 = 280 \Rightarrow A_{\text{total}} = 280 \text{ m}^2$
$V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 10 \cdot 5 \cdot 6 = 300 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 300 \text{ m}^3$

20 Fíjate en estas figuras:

I.



II.



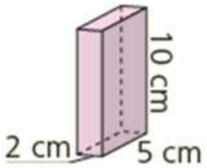
a. ¿Cuál de estos dos paralelepípedos tiene mayor área?
$A_{\text{I}} = A_{\text{ortoedro}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$
$A_{\text{ortoedro}} = 2 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \cdot 8 = 382 \Rightarrow A_{\text{ortoedro}} = 382 \text{ cm}^2$
$A_{\text{II}} = A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$
Tiene mayor área el cubo.

b. ¿Y mayor volumen?
$V_{\text{I}} = V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 7 \cdot 9 \cdot 8 = 504 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 504 \text{ cm}^3$
$V_{\text{II}} = V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 8^3 = 512 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 512 \text{ cm}^3$
Tiene mayor volumen el cubo.

c. ¿Qué dimensiones debería tener el cubo para que ambos paralelepípedos tuvieran el mismo volumen?
$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow 504 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{504} = 7{,}96 \Rightarrow a = 7{,}96 \text{ cm}$

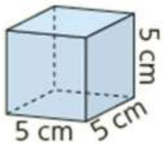
21 Calcula mentalmente el área y el volumen de los siguientes paralelepípedos:

a.



$A_{ortoedro} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{ortoedro} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 10 = 160 \Rightarrow A_{ortoedro} = 160\ cm^2$
$V_{ortoedro} = A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{ortoedro} = 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100 \Rightarrow V_{ortoedro} = 100\ cm^3$

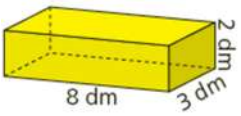
b.



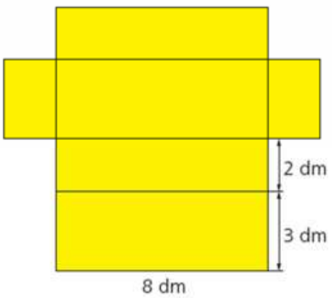
$A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{cubo} = 6 \cdot 5^2 = 150\ cm^2$
$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = 5^3 = 125 \Rightarrow V_{cubo} = 125\ cm^3$

22 Dibuja el desarrollo plano de estos paralelepípedos y calcula su área total:

a.

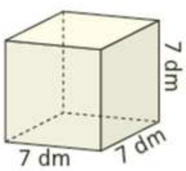


$\Rightarrow$

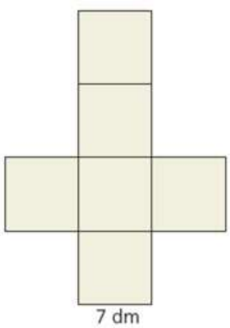


$A_{ortoedro} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{ortoedro} = 2 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 92 \Rightarrow A_{ortoedro} = 92\ dm^2$

b.



$\Rightarrow$



$A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{cubo} = 6 \cdot 7^2 = 294\ dm^2$

23 ¿Qué dimensiones debe tener un cubo para que su área total y su volumen coincidan?

Sea un cubo de arista *a*. Para que el área total y el volumen coincidan, deben ser iguales, esto es:

$A_{cubo} = V_{cubo} \Rightarrow 6 \cdot a^2 = a^3 \Rightarrow \frac{a^3}{a^2} = 6 \Rightarrow a = 6$ unidades

24 Halla la longitud de la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 y 7 dm de base y 11 dm de altura.

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow D = \sqrt{9^2 + 7^2 + 11^2} = \sqrt{251} = 15{,}84$

$D = 15{,}84$ dm

25 Calcula la máxima distancia que se puede trazar en línea recta en un cubo cuya área total son 384 cm².

Se calcula el valor de la arista del cubo:

$A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow 384 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{384}{6}} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow a = 8$ cm

La distancia máxima es la diagonal del cubo.

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = \sqrt{3 \cdot 8^2} = \sqrt{192} = 13{,}86 \Rightarrow D = 13{,}86$ cm

La distancia es de 13,86 cm.

26 Una comunidad de vecinos quiere recubrir con pintura protectora el vaso de una piscina que tiene forma de ortoedro y unas dimensiones, en metros, de 10 × 6 × 2.

a. ¿Qué superficie tiene que recubrir?

$A_{piscina} = A_{base} + A_{lateral}$

$A_{piscina} = 10 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 2 = 124 \Rightarrow A_{piscina} = 124\ m^2$

b. Si el rendimiento de la pintura es de 7 m² por cada litro y se vende en botes de 5 L cuyo precio es de 14 €, ¿cuánto costará pintar el vaso de la piscina?

$\left.\begin{array}{l} 1\ L \xrightarrow{\text{se pintan}} 7\ m^2 \\ x\ L \xrightarrow{\text{se pintan}} 124\ m^2 \end{array}\right\} x = \frac{124}{7} = 17{,}71\ L$

Se necesitan 4 botes de 5 L.

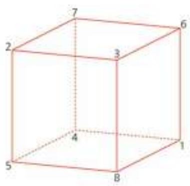
$4 \cdot 14 = 56 \Rightarrow$ Costará 56 €.

27 Visita esta página de Internet para repasar estos contenidos y realiza las actividades propuestas:

http://conteni2.educarex.es/mats/12000/contenido/

Respuesta abierta.

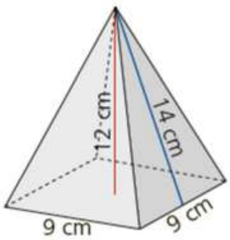
28 Coloca en cada uno de los ocho vértices de un cubo uno de los números de la serie del 1 al 8, de forma que, en cada cara, la suma de los números de sus cuatro vértices arroje siempre el mismo resultado.

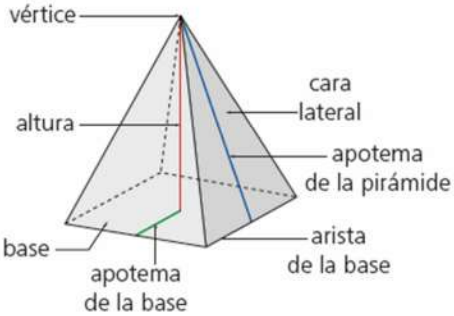


SOLUCIONES PÁG. 261

29 Señala los elementos de estas pirámides y halla el área total y el volumen de cada una de ellas:

a.





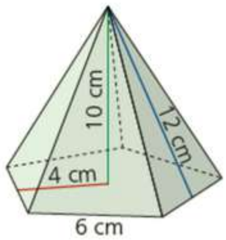
La base es un cuadrado, y la apotema de la base es la mitad del lado del cuadrado:

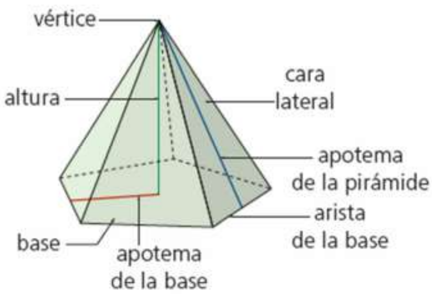
$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 9 \cdot 4 \cdot \frac{14 + 4,5}{2} = 333 \Rightarrow A_{\text{total}} = 333 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} 9^2 \cdot 12 = 324$$

$$V_{\text{pirámide}} = 324 \text{ cm}^3$$

b.





$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot 5 \cdot \frac{12 + 4}{2} = 240 \Rightarrow A_{\text{total}} = 240 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap'}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 200$$

$$V_{\text{pirámide}} = 200 \text{ cm}^3$$

30 Halla el área total y el volumen de una pirámide heptagonal de 9 dm de altura y cuya base tiene una arista de 7 dm y una apotema de 6 dm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide:

$$ap^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow ap = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 10,82 \Rightarrow ap = 10,82 \text{ dm}$$

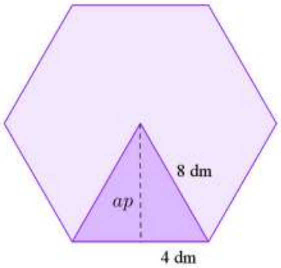
$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 7 \cdot 7 \cdot \frac{10,82 + 6}{2} = 412,09 \Rightarrow A_{\text{total}} = 412,09 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap'}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 7 \cdot 6}{2} \cdot 9 = 441$$

$$V_{\text{pirámide}} = 441 \text{ dm}^3$$

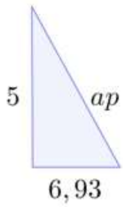
31 Halla el área total y el volumen de una pirámide hexagonal con una arista de la base de 8 dm y una altura de 5 dm.

Se aplica el teorema de Pitágoras a la base para hallar la apotema de la base:



$$8^2 = 4^2 + ap'^2 \Rightarrow ap' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,93 \Rightarrow ap' = 6,93 \text{ dm}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras a la pirámide para hallar la apotema de la pirámide:



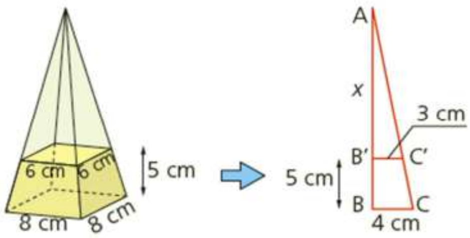
$$ap^2 = h^2 + ap'^2 \Rightarrow ap = \sqrt{5^2 + 6,93^2} = \sqrt{73,02} = 8,55 \Rightarrow ap = 8,55 \text{ dm}$$

$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 8 \cdot 6 \cdot \frac{8,55 + 6,93}{2} = 371,52 \Rightarrow A_{\text{total}} = 371,52 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap'}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 6,93}{2} \cdot 5 = 277,2$$

$$V_{\text{pirámide}} = 277,2 \text{ dm}^3$$

32 Calcula el volumen de este tronco de pirámide. Observa la relación de semejanza de triángulos en la pirámide original.



Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide:

$$\frac{x}{3} = \frac{x + 5}{4} \Rightarrow 4x = 3 \cdot (x + 5) \Rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

La altura de la pirámide original mide 20 cm.

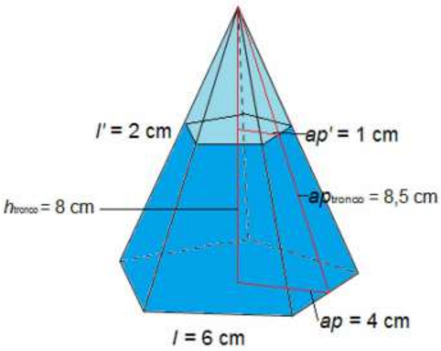
$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$

$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3}l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3}8^2 \cdot 20 = 426,67$$

$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3}l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3}6^2 \cdot 15 = 180$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 426,67 - 180 = 246,67 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 246,67 \text{ cm}^3$$

33 **Calcula el área total y el volumen de un tronco de pirámide pentagonal de 8,5 cm de apotema, 8 cm de altura, 6 cm y 2 cm de aristas de las bases, respectivamente, y 4 cm y 1 cm de apotemas, respectivamente.**

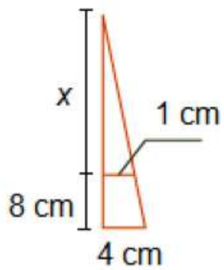


$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} + A_{\text{base'}} = \text{n} \cdot \frac{(l + l')\cdot ap_{\text{lateral}}}{2} + \frac{P \cdot ap}{2} + \frac{P' \cdot ap'}{2}$$

$$A_{\text{total}} = 5 \cdot \frac{(6+2)\cdot 8,5}{2} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2} + \frac{2\cdot 5\cdot 1}{2} = \frac{340 + 120 + 10}{2} = 235 \Rightarrow A_{\text{total}} = 235 \text{ cm}^2$$

$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$

Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide pequeña:



$$\frac{x}{1} = \frac{x+8}{4} \Rightarrow 4x = x + 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} = 2,67$$

$$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{P \cdot ap}{2}\cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{2}\cdot 10,67 = 213,4$$

$$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{P' \cdot ap'}{2}\cdot h' \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 5\cdot 1}{2}\cdot 2,67 = 4,45$$

$$V_{\text{tronco de pirámide}} = 213,4 - 4,45 = 208,95 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 208,95 \text{ cm}^3$$

34 Realizad un concurso fotográfico. Cada uno deberéis presentar una fotografía matemática que gire en torno a motivos relacionados con los poliedros.

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 263

1 Las caras de los sólidos platónicos son triángulos, cuadrados o pentágonos. ¿Por qué no pueden existir poliedros regulares con caras hexagonales?
Si las caras fueran hexágonos, en cada vértice solo podrían concurrir dos hexágonos, porque al ser 120º su ángulo interior, si concurrieran tres hexágonos, sumarían 360º, que no puede ser. Y dos caras solamente no pueden concurrir en un vértice de un poliedro.

2 Realiza en tu cuaderno el dibujo de los siguientes prismas y señala en cada uno de ellos sus elementos:

a. Base triangular, recto y regular.
Respuesta abierta.

b. Base cuadrangular, recto e irregular.
Respuesta abierta.

c. Base pentagonal, oblicuo y regular.
Respuesta abierta.

d. Base hexagonal, oblicuo e irregular.
Respuesta abierta.

3 Indica el nombre de tres paralelepípedos.
Ortoedro, cubo y romboedro.

4 ¿Cuál es la diferencia entre la apotema de una pirámide y la de su base?
La apotema de una pirámide es la altura de los triángulos laterales.

5 Explica cómo se genera un tronco de pirámide.
El tronco de pirámide se forma al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base y despreciar la pirámide correspondiente al vértice.

6 ¿Existe alguna relación entre el volumen del prisma y el de la pirámide? Indica cuántas veces es mayor uno respecto del otro.
Sí. El volumen del prisma es el triple que el de la pirámide, siempre y cuando ambos tengan las mismas dimensiones, igual altura y base.

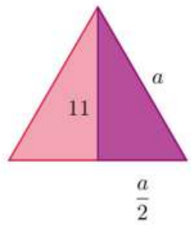
7 Realiza una presentación a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, utilizar Glogster…
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 264 - REPASO FINAL

POLIEDROS

1 Calcula el área y el volumen de un octaedro una de cuyas caras tiene una altura de 11 cm. Dibújalo en tu cuaderno y señala alguno de sus planos de simetría.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la arista del octaedro:



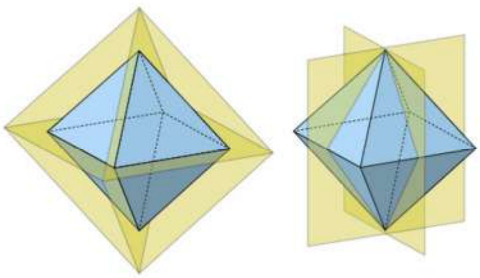
$$a^2 = 11^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 11^2 + \frac{a}{4} \Rightarrow 4a^2 = 484 + a \Rightarrow 4a^2 - a - 484 = 0$$

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-484)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 7744}}{8} = \frac{1 \pm 88}{8} = \begin{cases} a = 11,13 \\ a = -10,88 \end{cases}$$

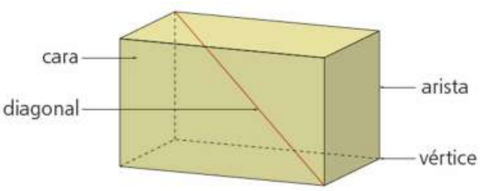
La solución negativa no es válida.

$$A_{\text{octaedro}} = 2 \cdot a^2 \sqrt{3} \Rightarrow A_{\text{octaedro}} = 2 \cdot 11,13^2 \sqrt{3} = 429,12 \Rightarrow A_{\text{octaedro}} = 429,12 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{octaedro}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = \frac{11,13^3 \sqrt{2}}{3} = 649,95 \Rightarrow V_{\text{octaedro}} = 649,95 \text{ cm}^3$$



2 Dibuja una caja de zapatos y señala sus elementos.



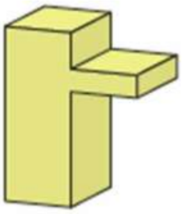
a. Comprueba la fórmula de Euler.
6 caras, 8 vértices, 12 aristas: 6 + 8 = 12 + 2

b. ¿Es un poliedro regular?
No, porque sus caras no son todas iguales.

c. ¿Tiene centro de simetría?
Sí, el centro del poliedro.

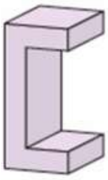
3 Comprueba si se cumple la fórmula de Euler en los siguientes poliedros:

a.



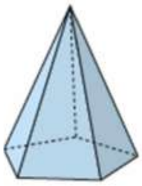
12 caras, 16 vértices, 24 aristas: $12 + 16 \neq 24 + 2$

b.



10 caras, 16 vértices, 24 aristas: $10 + 16 = 24 + 2$

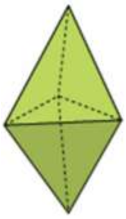
c.



6 caras, 6 vértices, 10 aristas: $6 + 6 = 10 + 2$

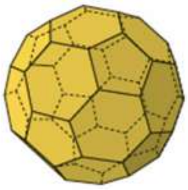
4 Explica por qué no son regulares estos poliedros:

a.



No concurren el mismo número de caras en cada vértice.

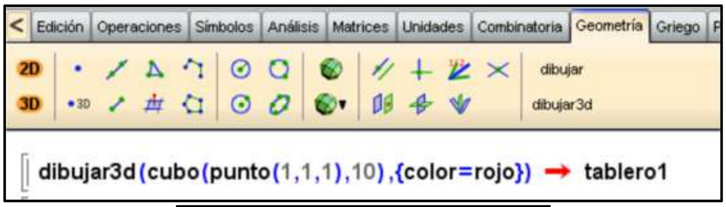
b.

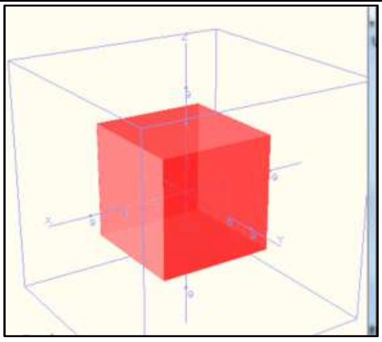


No son iguales todas las caras.

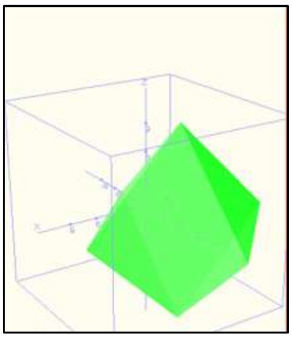
5 Con el programa Wiris, realiza los siguientes dibujos:

a. Un cubo de dimensión 10, centrado en el punto (1 , 1 , 1). Coloréalo de rojo.





b. Un octaedro de dimensión 15, centrado en el punto (0 , 6 , 0). Coloréalo de verde.

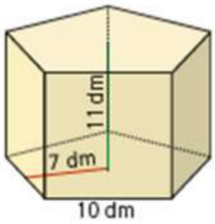


6 Por parejas, usad materiales como el polydron, para construir los sólidos platónicos y otros poliedros.
Respuesta abierta.

PRISMAS

7 Halla el área total y el volumen de estos prismas:

a.



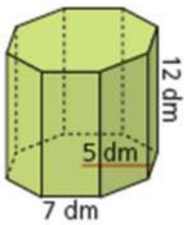
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 5 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{total} = 10 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 10 \cdot 11 = 900 \Rightarrow A_{total} = 900 \text{ dm}^2$$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

$$V_{prisma} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{prisma} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 7}{2} \cdot 11 = 1925 \Rightarrow V_{prisma} = 1925 \text{ dm}^3$$

b.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 8 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{total} = 7 \cdot 8 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 12 = 952 \Rightarrow A_{total} = 952 \text{ dm}^2$$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

$$V_{prisma} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{prisma} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{2} \cdot 12 = 1680 \Rightarrow V_{prisma} = 1680 \text{ dm}^3$$

8 El volumen de un prisma regular es de 1 386 cm^3. Si tiene una altura de 11 cm, la arista de su base de 4 cm, y la apotema de 7 cm, indica de qué prisma se trata.

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

$$V_{prisma} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow 1386 = \frac{n \cdot 4 \cdot 7}{2} \cdot 11 \Rightarrow n = \frac{1386 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 11} = 9 \Rightarrow n = 9$$

Es un prisma de base un eneágono regular.

9 Se quiere construir un caleidoscopio en forma de prisma octogonal de 20 cm de altura, 3 cm de arista de la base y 5 cm de apotema.

a. ¿Qué cantidad de cristal se empleará para construirlo?

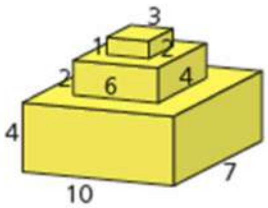
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + 8 \cdot l \cdot h \Rightarrow A_{total} = 3 \cdot 8 \cdot 5 + 8 \cdot 3 \cdot 20 = 600 \Rightarrow A_{total} = 600 \text{ cm}^2$$

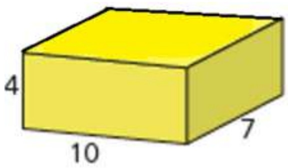
b. Si el cristal se vende por planchas cuadradas de 20 cm de lado, ¿cuántas serán necesarias para cortar las bases y las caras laterales?
Necesito tres planchas. Las ocho caras laterales son rectángulos de 20 cm de largo por 3 cm de ancho, necesito dos planchas. De una plancha puedo obtener seis caras laterales y de la otra plancha dos caras laterales, sobrando un trozo de plancha de 14 × 20 cm. De este trozo de plancha puedo obtener una base pues son octógonos que se inscriben en círculos de 10,44 cm de diámetro. Y de una tercera plancha obtengo la otra base.

10 Halla el área total y el volumen de las siguientes figuras cuyas dimensiones vienen dadas en centímetros:

a.

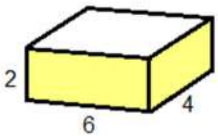


Se calcula el área total del prisma inferior:



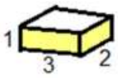
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{prisma\ inferior} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow A_{prisma\ inferior} = 2 \cdot 10 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 4 = 276$
$A_{prisma\ inferior} = 276\ cm^2$

Se calcula el área lateral del prisma intermedio:



$A_{lateral\ prisma\ intermedio} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$
$A_{lateral\ prisma\ intermedio} = 2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 40 \Rightarrow A_{lateral\ prisma\ intermedio} = 40\ cm^2$

Se calcula el área lateral del prisma superior:

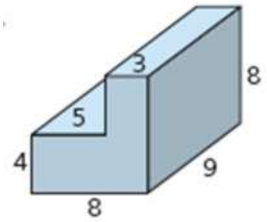


$A_{lateral\ prisma\ inferior} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$
$A_{lateral\ prisma\ inferior} = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \Rightarrow A_{lateral\ prisma\ inferior} = 10\ cm^2$

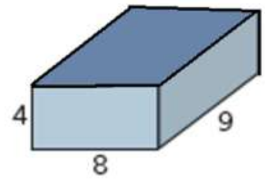
El área total de la figura es la suma de las tres áreas anteriores:
$A_{total} = 276 + 40 + 10 = 326\ cm^2$

$V_{figura} = A_{base\ 1} \cdot h_1 + A_{base\ 2} \cdot h_2 + A_{base\ 3} \cdot h_3$
$V_{figura} = 10 \cdot 7 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 280 + 48 + 6 = 334\ cm^3$

b.



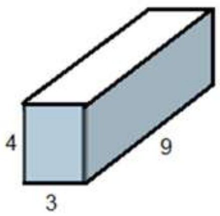
Se calcula el área total del prisma inferior:



$A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot 8 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 4 = 280$

$A_{\text{prisma inferior}} = 280 \text{ cm}^2$

Se calcula el área lateral del prisma superior:



$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 4 = 96 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma superior}} = 96 \text{ cm}^2$

El área total de la figura es la suma de las dos áreas anteriores:

$A_{\text{total}} = 280 + 96 = 376 \text{ cm}^2$

$V_{\text{figura}} = A_{\text{base 1}} \cdot h_1 + A_{\text{base 2}} \cdot h_2$

$V_{\text{figura}} = 8 \cdot 9 \cdot 4 + 3 \cdot 9 \cdot 4 = 288 + 108 = 396 \text{ cm}^3$

11 La piscina de Alejandro tiene forma de prisma rectangular con unas dimensiones de 8 m × 4 m y una altura de 2 m.

a. ¿Cuántos litros de agua caben en la piscina?

$V_{\text{piscina}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{piscina}} = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64 \Rightarrow V_{\text{piscina}} = 64 \text{ m}^3 = 64\,000 \text{ L}$

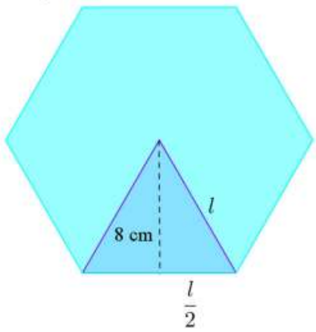
b. Si se llena a razón de 100 L por minuto, ¿cuántas horas y minutos tardará en llenarse?

$\frac{64\,000}{100} = 640$ minutos

$$\begin{array}{l|l} 640' & 60 \\ \hline 040' & 1 \end{array} \Rightarrow \text{Tardará 1 hora y 40 minutos.}$$

12 Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular que tiene 780 cm^2 de área total y 8 cm de apotema.

Se aplica el teorema de Pitágoras a la base, que es un hexágono, para calcular la longitud del lado:



$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + ap^2 \Rightarrow l^2 = \frac{l^2}{4} + 8^2 \Rightarrow 4l^2 = l^2 + 4 \cdot 8^2 \Rightarrow 3l^2 = 256$$

$$l = \sqrt{\frac{256}{3}} = \sqrt{85,33} = 9,24 \Rightarrow l = 9,24 \text{ cm}$$

Se calcula la altura del prisma:

$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

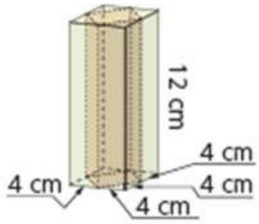
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h \Rightarrow 780 = 6 \cdot 9,24 \cdot 8 + 6 \cdot 9,24h$$

$$h = \frac{780 - 443,52}{55,44} = 6,07 \Rightarrow h = 6,07 \text{ cm}$$

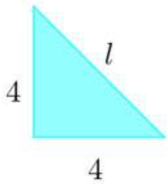
$$V_{\text{prisma}} = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = \frac{6 \cdot 9,24 \cdot 8}{2} \cdot 6,07 = 1346,1 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 1346,1 \text{ cm}^3$$

PARALELEPÍPEDOS

13 Halla el área total y el volumen del paralelepípedo interior:



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el lado del paralelepípedo interior:



$l^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow l = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow l = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5{,}66 \Rightarrow l = 5{,}66$ cm

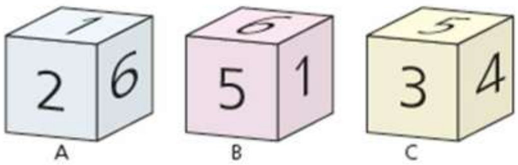
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

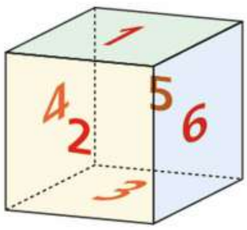
$A_{total} = 2 \cdot a^2 + P \cdot h \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot 5{,}66^2 + 4 \cdot 5{,}66 \cdot 12 = 335{,}75 \Rightarrow A_{total} = 335{,}75$ cm^2

$V_{paralelepípedo} = A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{paralelepípedo} = l^2 \cdot h \Rightarrow V_{paralelepípedo} = 5{,}66^2 \cdot 12 = 384{,}43$

$V_{paralelepípedo} = 384{,}43$ cm^3

14 Deduce los números ocultos de este dado:

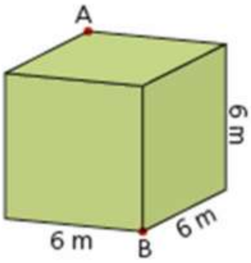




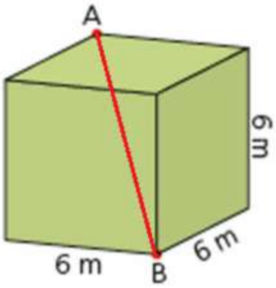
SOLUCIONES PÁG. 265

15 Halla la distancia entre los puntos A y B:

a.

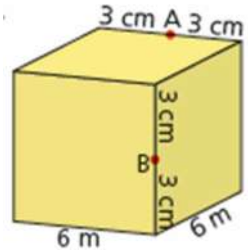


La distancia entre los puntos A y B es la diagonal del cubo:

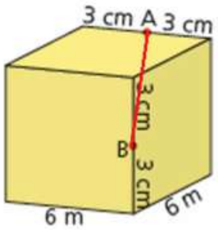


$D^2 = 3a^2 \Rightarrow D = \sqrt{3 \cdot 6^2} = \sqrt{108} = 10,39 \Rightarrow D = 10,39$ m

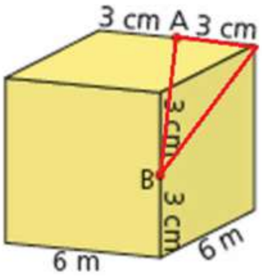
b.



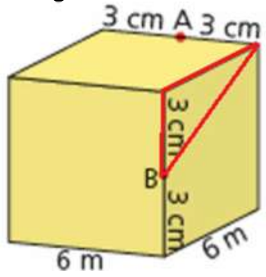
La distancia entre los puntos A y B es:



Dicha distancia es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado:

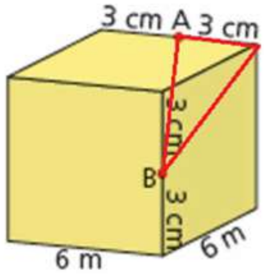


Para hallar la hipotenusa sobre la cara derecha se aplica el teorema de Pitágoras:



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 6{,}71 \Rightarrow$ La hipotenusa de la cara derecha mide 6,71 m.

Esta hipotenusa es un cateto del triángulo rectángulo:



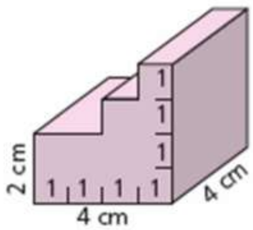
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre los puntos A y B:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{6{,}71^2 + 3^2} = \sqrt{54{,}02} = 7{,}35$

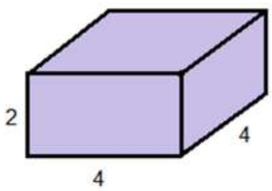
La distancia entre los puntos A y B es de 7,35 m.

16 Halla el área total y el volumen de los siguientes paralelepípedos:

a.



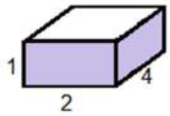
Se calcula el área total del prisma inferior:



$A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow A_{\text{prisma inferior}} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 64$

$A_{\text{prisma inferior}} = 64 \text{ cm}^2$

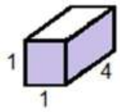
Se calcula el área lateral del prisma intermedio:



$A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

$A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 = 12 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma intermedio}} = 12 \text{ cm}^2$

Se calcula el área lateral del prisma superior:

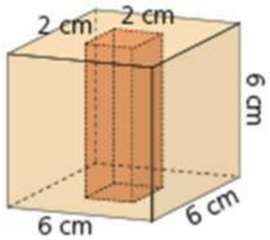


$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$
$A_{\text{lateral prisma superior}} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 = 10 \Rightarrow A_{\text{lateral prisma superior}} = 10\ \text{cm}^2$

El área total de la figura es la suma de las tres áreas:
$A_{\text{total}} = 64 + 12 + 10 = 86\ \text{cm}^2$

$V_{\text{figura}} = A_{\text{base 1}} \cdot h_1 + A_{\text{base 2}} \cdot h_2 + A_{\text{base 3}} \cdot h_3$
$V_{\text{figura}} = 4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1 = 32 + 8 + 4 = 44\ \text{cm}^3$

b.



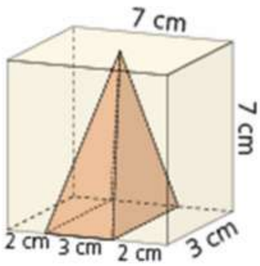
$A_{\text{total}} = A_{\text{cubo}} + A_{\text{lateral ortoedro}} - 2 \cdot A_{\text{base ortoedro}}$
$A_{\text{total}} = 6 \cdot 6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2^2 = 216 + 48 - 8 = 256\ \text{cm}^2$

$V_{\text{figura}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{ortoedro}} = a^3 - a \cdot b \cdot c$
$V_{\text{figura}} = 6^3 - 2 \cdot 2 \cdot 6 = 216 - 24 = 192\ \text{cm}^3$

PIRÁMIDE Y TRONCO DE PIRÁMIDE

17 Calcula el volumen contenido entre cada par de figuras.

a.



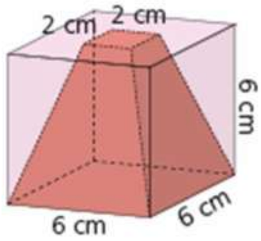
$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} - V_{\text{pirámide cuadrangular}}$
$V_{\text{ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 7 \cdot 3 \cdot 7 = 147\ \text{cm}^3$

$$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{3^2 \cdot 7}{3} = 21$$

$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = 21\ \text{cm}^3$

$V_{\text{total}} = 147 - 21 = 126\ \text{cm}^3$

b.

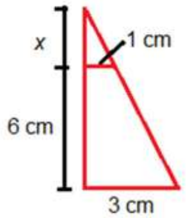


$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{tronco de pirámide}}$

$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$

Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide:



$\frac{x}{1} = \frac{x+6}{3} \Rightarrow 3x = 1 \cdot (x+6) \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$

La altura de la pirámide original mide 9 cm.

$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$

$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} 6^2 \cdot 9 = 108$

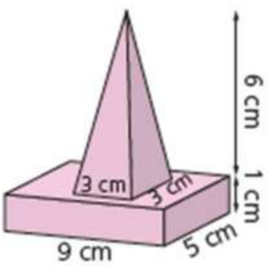
$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} 2^2 \cdot 3 = 4$

$V_{\text{tronco de pirámide}} = 108 - 4 = 104 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 104 \text{ cm}^3$

$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{tronco de pirámide}} = 216 - 104 = 112 \text{ cm}^3$

18 Halla el volumen de estas figuras:

a.



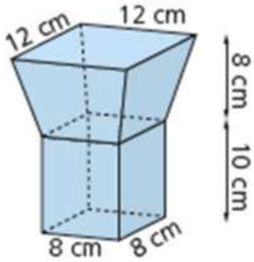
$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{pirámide}}$

$V_{\text{ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 9 \cdot 5 \cdot 1 = 45 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 45 \text{ cm}^3$

$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} 3^2 \cdot 6 = 18 \text{cm}^3$

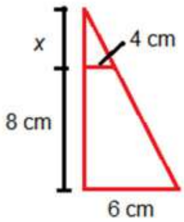
$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{pirámide}} = 45 + 18 = 63 \text{ cm}^3$

b.



$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{tronco de pirámide}}$
$V_{\text{ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 8 \cdot 8 \cdot 10 = 640 \Rightarrow V_{\text{ortoedro}} = 640 \text{ cm}^3$

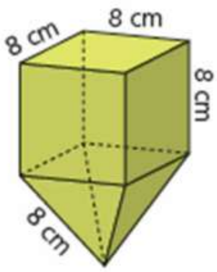
$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$
Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide:



$\frac{x}{4} = \frac{x+8}{6} \Rightarrow 6x = 4 \cdot (x+8) \Rightarrow x = 16 \text{ cm}$
La altura de la pirámide original mide 24 cm.
$V_{\text{tronco de pirámide}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$
$V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide grande}} = \frac{1}{3} 12^2 \cdot 24 = 1152$
$V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide pequeña}} = \frac{1}{3} 8^2 \cdot 16 = 341{,}33$
$V_{\text{tronco de pirámide}} = 1152 - 341{,}33 = 810{,}67 \Rightarrow V_{\text{tronco de pirámide}} = 810{,}67 \text{ cm}^3$

$V_{\text{total}} = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{tronco de pirámide}} = 640 + 810{,}67 = 1\,450{,}67 \text{ cm}^3$

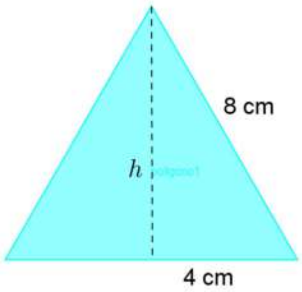
19 Determina el área total y el volumen de esta figura:



$A_{\text{total}} = A_{\text{cubo}} - A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{lateral pirámide}}$

$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 6 \cdot 8^2 = 384 \Rightarrow A_{\text{cubo}} = 384 \text{ cm}^2$
$A_{\text{cuadrado}} = l^2 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 8^2 = 64 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 64 \text{ cm}^2$
$A_{\text{lateral pirámide}} = 4 \cdot A_{\text{triángulo equilátero}} = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura del triángulo equilátero:



$a^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}93 \Rightarrow h = 6{,}93 \text{ cm}$

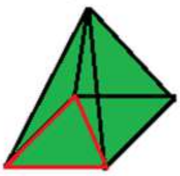
$A_{\text{lateral pirámide}} = 4 \cdot \dfrac{b \cdot h}{2}$

$A_{\text{lateral pirámide}} = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 110{,}88 \Rightarrow A_{\text{lateral pirámide}} = 110{,}88 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = A_{\text{cubo}} - A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{lateral pirámide}} = 384 - 64 + 110{,}88 = 430{,}88 \text{ cm}^2$

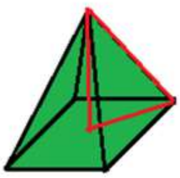
$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirámide}}$
$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 8^3 = 512 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 512 \text{ cm}^3$

Se aplica el teorema de Pitágoras a la base de la pirámide para calcular la diagonal:



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 11{,}31$
La mitad de la diagonal mide 5,66 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura de la pirámide:



$a^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow h = \sqrt{8^2 - 5{,}66^2} = \sqrt{64 - 32{,}04} = 5{,}65$
La altura de la pirámide mide 5,65 cm.

$V_{\text{pirámide}} = \dfrac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \dfrac{1}{3} l^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \dfrac{1}{3} 8^2 \cdot 5{,}65 = 120{,}53$

$V_{\text{pirámide}} = 120{,}53 \text{ cm}^3$

$V_{\text{total}} = 512 + 120{,}53 = 632{,}53 \text{ cm}^3$

EVALUACIÓN

1 El número de aristas de un octaedro es:

a. 8 **b. 6** **c. 10** d. 12

Un ortoedro tiene 12 aristas.

2 El área de un tetraedro de 4 m de arista es:

a. 27,71 m^2 **b. 64 m^2** **c. 16 m^2** **d. 32,65 m^2**

$A_{\text{tetraedro}} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow A_{\text{tetraedro}} = 4^2 \cdot \sqrt{3} = 27,71\ \text{cm}^2$

3 El área de un prisma pentagonal regular de 8 m de altura, 5 m de arista básica y 4 m de apotema es:

a. 200 m^2 b. 300 m^2 **c. 600 m^2** **d. 500 m^2**

$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

$A_{\text{base}} = \dfrac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{base}} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 50 \Rightarrow A_{\text{base}} = 50\ \text{m}^2$

$A_{\text{lateral}} = 5 \cdot 5 \cdot 8 = 200\ \text{m}^2$

$A_{\text{total}} = 2 \cdot 50 + 200 = 300 \Rightarrow A_{\text{total}} = 300\ \text{m}^2$

4 El volumen de un prisma rectangular de 11 m de altura y cuya base tiene unas dimensiones de 4 m × 5 m es:

a. 220 m^3 **b. 180 m^3** **c. 216,3 m^3** **d. 195,4 m^3**

$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 4 \cdot 5 \cdot 11 = 220 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 220\ \text{m}^3$

5 Halla la máxima distancia que se puede trazar en línea recta en un ortoedro cuyas dimensiones son 3 m × 5 m × 8 m.

a. 7,54 m b. 9,90 m **c. 1,20 m** **d. 14,39 m**

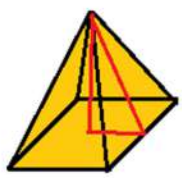
$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow D = \sqrt{3^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{98} = 9,9$

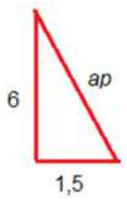
$D = 9,9$ m

6 El área de una pirámide cuadrangular de 6 m de altura y cuya base tiene una arista de 3 m vale:

a. 89,72 m^2 b. 46,11 m^2 **c. 75,23 m^2** **d. 42,65 m^2**

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema de la pirámide:





$$ap^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow ap = \sqrt{6^2 + 1{,}5^2} \Rightarrow ap = \sqrt{36 + 2{,}25} = \sqrt{38{,}25} = 6{,}18 \text{ m}$$

$$A_{\text{total}} = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{total}} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1{,}5 + 6{,}18}{2} = 46{,}08 \Rightarrow A_{\text{total}} = 46{,}08 \text{ m}^2$$

7 El volumen, en metros cúbicos, de una pirámide heptagonal de 6 m de altura y cuya base tiene una arista de 3 m y una apotema de 2 m es:

a. 40 m^3 **b. 65 m^3** c. 42 m^3 **d. 62 m^3**

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{2} \cdot 6 = 42 \text{ m}^3$$

8 Calcula el volumen que queda entre un cubo de 5 m de arista y una pirámide inscrita en él cuya base coincide con una de las caras del cubo.

a. 125 m^3 **b. 25,27 m^3** c. 83,33 m^3 **d. 72,36 m^3**

$V_{\text{total}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{pirámide cuadrangular}}$

$V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 5^3 = 125 \text{ m}^3$

$$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{pirámide cuadrangular}} = \frac{5^2 \cdot 5}{3} = 41{,}67$$

$$V_{\text{pirámide cuadrangular}} = 41{,}67 \text{ m}^3$$

$V_{\text{total}} = 125 - 41{,}67 = 83{,}33 \text{ m}^3$