UNIDAD 14: Distribuciones discretas. Distribución binomial

ACTIVIDADES-PÁG. 318

1. La probabilidad es: $P(2\,V\;\; y\;\; 2\,M) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$.

2. Las probabilidades buscadas son:

a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}2304$.

b) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}2304 + 0{,}0768 + 0{,}0102 = 0{,}3174$$

La probabilidad es $1 - 0{,}3174 = 0{,}6826$

3. Las probabilidades son, en este caso:

a) $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0{,}1157$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

$$= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 = 0{,}1157 + 0{,}3858 + 0{,}4823 = 0{,}9838$$

4. Sabemos que $\mu = 1{,}125 \;\; y \;\; \sigma = 1{,}452$.

En $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma) = (-0{,}327;\ 2{,}577)$ hay 65 cajas defectuosas, es decir, el 81,25%.

En $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma) = (-1{,}779;\ 4{,}029)$ hay 77 cajas defectuosas, es decir, el 96,25%.

En $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma) = (-3{,}231;\ 5{,}481)$ hay 79 cajas defectuosas, es decir, el 98,75%.

Esta distribución no tiene un comportamiento “normal”.

ACTIVIDADES-PÁG. 331

1. Veamos los dos casos límite:

1º: Si r = 0, entonces, V = π · h · R^2, que coincide con el volumen del cilindro.

2º: Si $r = R$, entonces, $V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + R^2) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$, pero si $r = R$ el volumen es cero.

Luego la fórmula es falsa.

2. Los números felices de una cifra son 1 y 7.

Los números felices de dos cifras son: 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94 y 97.

Los primeros números felices de tres cifras son: 100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167…

3. Después de varios intentos vemos que la situación final, para lograr el objetivo buscado, que debe quedar en la vía muerta superior es: W_1 W_2 L.

Llamamos A al lugar en que inicialmente está el vagón W_1 y B al lugar donde está inicuamente el vagón W_2.

Los pasos a seguir son:

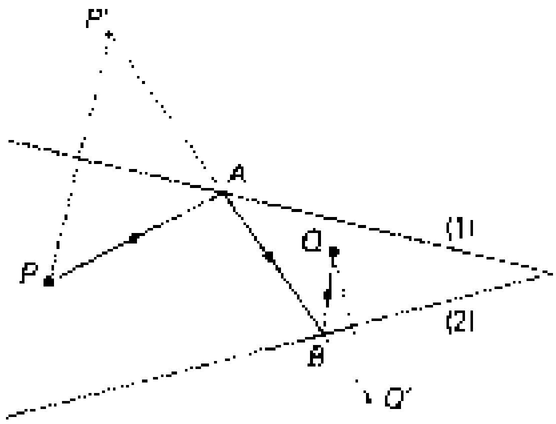
1º L coge W_1 y lo lleva a la vía muerta de abajo.
2º L da la vuelta al circuito pasando por el túnel y empuja a W_2 hasta el punto A.
3º L coge W_1 y lo lleva junto a W_2.
4º L da la vuelta al circuito y empuja a ambos vagones a la vía muerta de arriba, quedando la situación que buscábamos, W_1 W_2 L.
5º L remolca a W_2 hasta el punto A.
6º L da la vuelta al circuito y engancha a W_1 llevándolo a la posición B.
7º L vuelve a la vía muerta de arriba y los vagones han cambiado de posición.

4. Este problema es una doble simetría.

Construimos P ´, simétrico de P respecto a la banda (1), y Q ´ simétrico de Q respecto a la banda (2).

Unimos P ´ y Q ´ y llamamos A y B a los puntos en que la recta P ´Q ´ corta a las bandas.

La trayectoria pedida es PABQ.



ACTIVIDADES-PÁG. 333

1. Las probabilidades pedidas son:

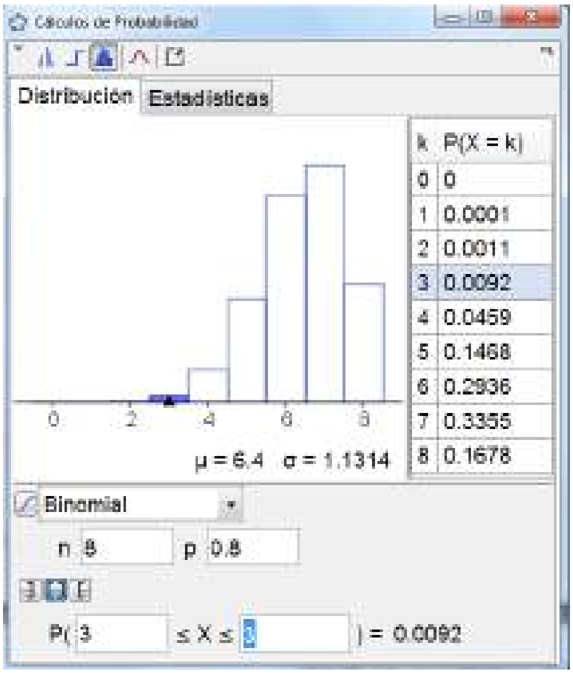
a) $P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}0092$

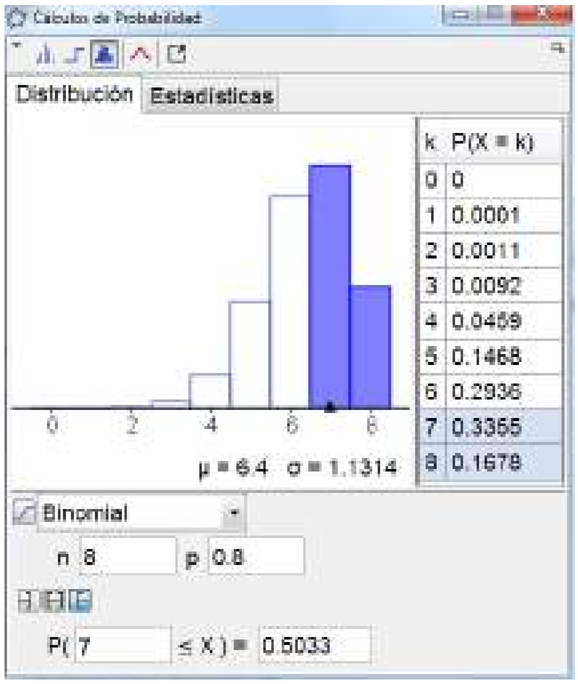
b) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{8}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^1 + \binom{8}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}5033$

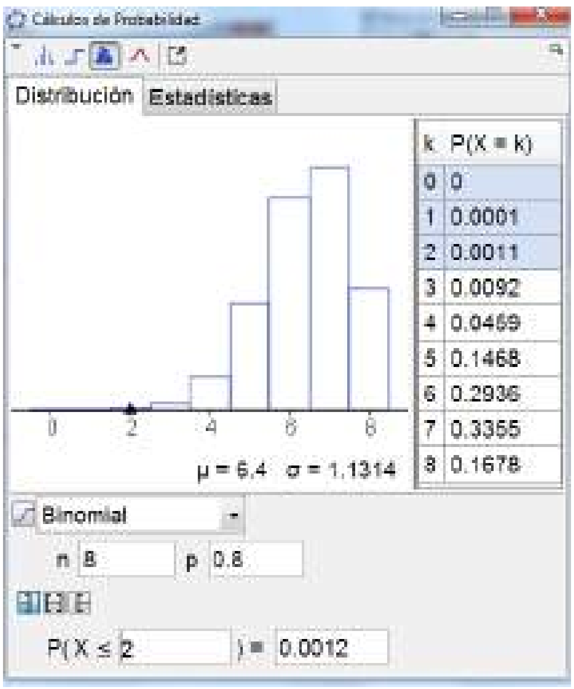
c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}0000\,03 + 0{,}0000\,82 + 0{,}0011\,47 = 0{,}0012$

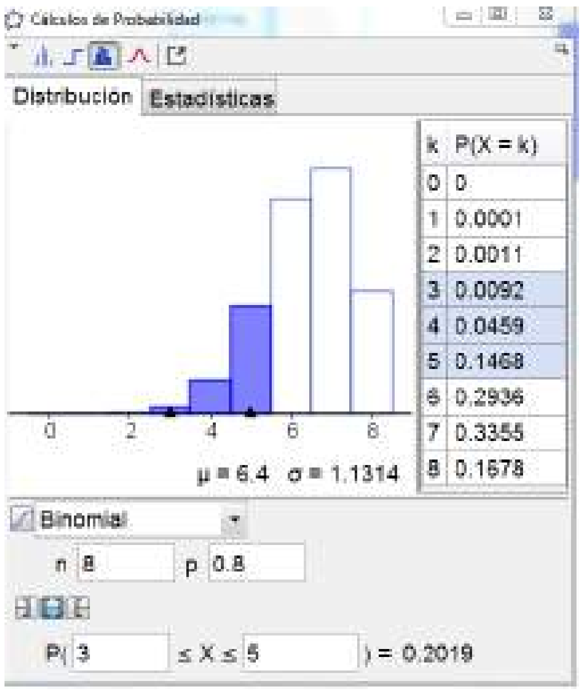
d) $P(2 < X < 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}0092 + 0{,}0459 + 0{,}1468 = 0{,}2019$

Todas las probabilidades anteriores pueden verse en las imágenes que siguen.







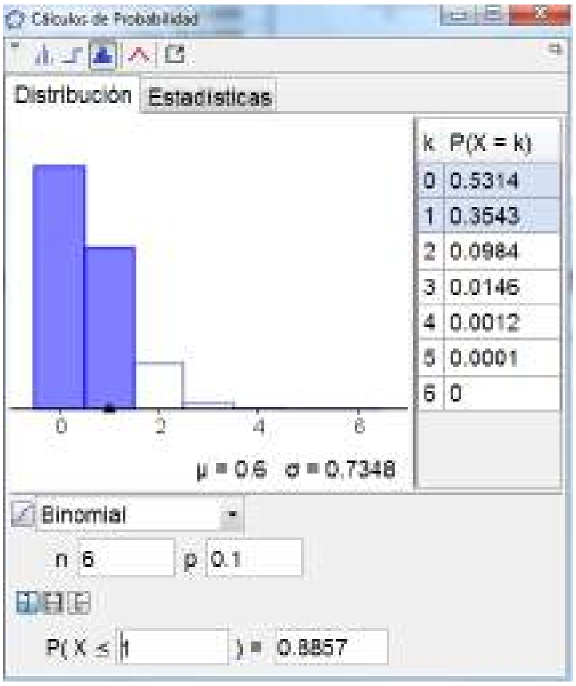


(Junio 2011)

2. Los huevos rotos siguen una distribución B (6; 0,1).

La probabilidad pedida es:

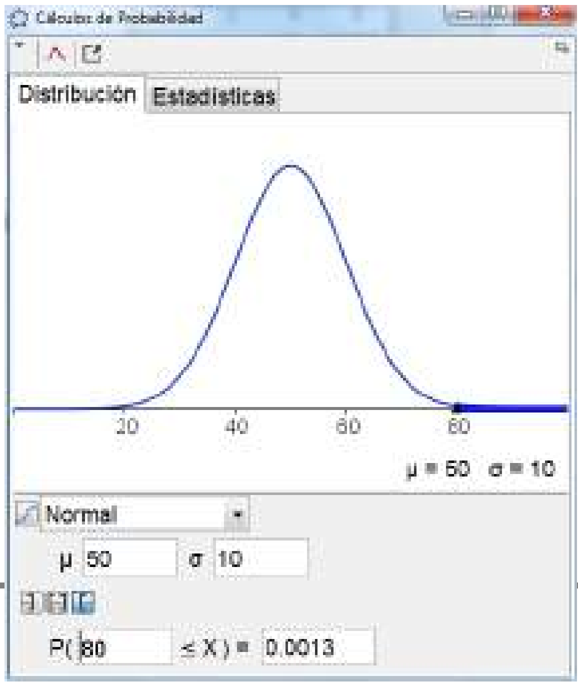
P (como mucho uno roto) = P (X = 0) + P (X = 1) = 0,5314 + 0,3543 = 0,8857.



3. La probabilidad pedida es:

$$P\ (X\ \geq 80) = P\left(z = \frac{X\ -50}{10} \geq \frac{80-50}{10}\right) = P\ (z \geq 3) = 1 - P\ (z < 3) =$$

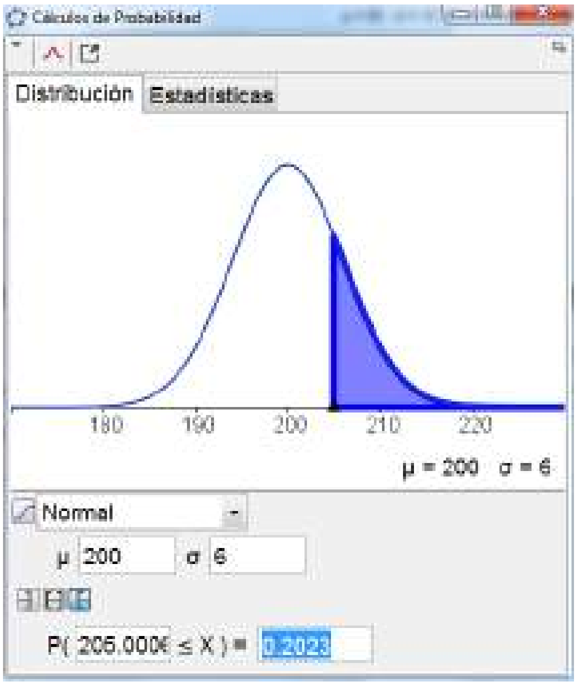
$$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$



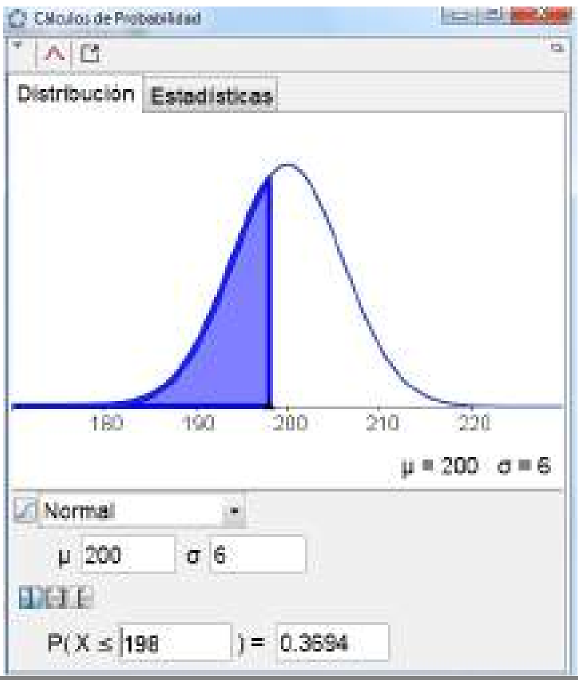
4. La máquina sigue una distribución normal de media $\mu = 200$ cm^3 y desviación típica $\sigma = 6$ cm^3.

Las probabilidades pedidas son:

$P(X > 205) = P(Z > 0{,}83) = 1 - P(Z < 0{,}83) = 1 - 0{,}7977 = 0{,}2023$



$P(X < 198) = P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z < 0{,}33) = 1 - 0{,}6306 = 0{,}3694$



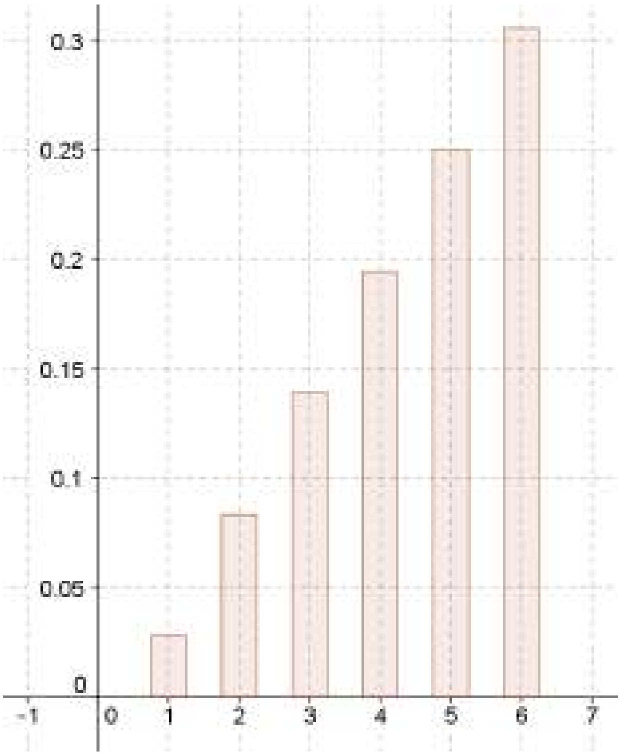
ACTIVIDADES-PÁG. 334

1. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

Mayor número	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b) El gráfico queda:



c) La media y la desviación típica son:

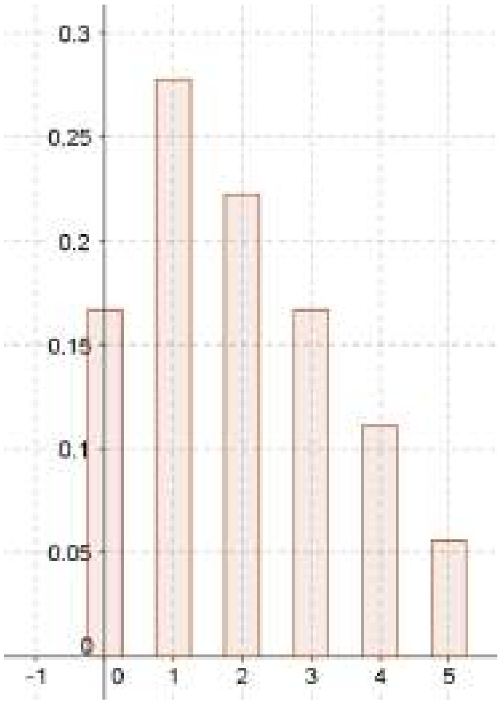
$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4{,}47$$

$$\sigma = \sqrt{1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} - 4{,}47^2} = 1{,}41$$

2. a) La función de probabilidad es:

Diferencia de puntos	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

b) El gráfico queda:



c) La media y la desviación típica son:

$$\mu = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = 1{,}94$$

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot \frac{6}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + 3^2 \cdot \frac{6}{36} + 4^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{2}{36} - 1{,}94^2} = 1{,}44$$

3. La función de probabilidad es:

X = Nº cruces	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

La media y la desviación típica son:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - 2^2} = 1$$

4. Consideramos que reemplazamos las bolas:

a) La función de probabilidad es:

Nº bolas blancas	0	1	2	3
Probabilidad	$\frac{720}{3360}$	$\frac{1620}{3360}$	$\frac{900}{360}$	$\frac{120}{3360}$

b) $P\ (X\ \geq 2) = \dfrac{900}{3360} + \dfrac{120}{3360} = \dfrac{17}{56} = 0{,}3036$

c) $P\ (X\ \leq 2) = 1 - P\ (X\ > 2) = 1 - \dfrac{120}{3360} = \dfrac{27}{28} = 0{,}9643$

d) La esperanza matemática y la desviación típica son: μ = 1,125; σ = 0,58.

5. La función de probabilidad es:

Suma de puntos X	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad P_i	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

Suma de puntos X	7	8	9	10	11	12
Probabilidad P_i	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

La media y la desviación típica son: $\mu = 6$ y $\sigma = 3$.

6. Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x + y = 0{,}8 \\ 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot x + 2 \cdot y = 1{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 0{,}3 \end{cases}$$

La desviación típica es: σ = 0,7

7. La solución es la del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b + c = 0{,}8 \\ a + 2b + 3c = 1{,}6 \\ b + c = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 0{,}4 \\ c = 0{,}2 \end{cases}$$

8. La solución queda:

Nº Doses	0	1	2
Probabilidad	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Esperanza: $90 \cdot \dfrac{1}{9} + 45 \cdot \dfrac{4}{9} - 81 \cdot \dfrac{4}{9} = -6$ euros. La esperanza del jugador es – 6 euros.

9. No es justo pues: $4 \cdot \frac{6}{36} - 1 \cdot \frac{30}{36} - \frac{6}{36} = -\frac{1}{6}$

10. El juego es justo pues la esperanza es: $(7-1) \cdot \frac{1}{20} + (3-1) \cdot \frac{3}{20} + (0{,}25-1) \cdot \frac{16}{20} = 0.$

ACTIVIDADES-PÁG. 335

11. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

X	0	1	2	3	4	5
P_i	0,1681	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

b) La media y la desviación típica son $\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 1{,}025$.

c) P (X = 2) = 0,3087

P (X = 3) = 0,1323

P (X < 2) = P (X = 0) + P (X = 1) = 0,1681 + 0,3602 = 0,5283

P (X $\geq$ 3) = P (X = 3) + P (X = 4) + P (X = 5) = 0,1631

12. Es una distribución binomial $B\left(6; \frac{4}{5}\right)$, con $P\ (cara) = \frac{4}{5}$ y $P(cruz) = \frac{1}{5}$.

a) $P(X = 4\ caras) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}2458$

b) $P(X \geq 4\ caras) = P\ (X = 4) + P\ (X = 5) + P\ (X = 6) =$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = 0{,}90112$$

13. Es una distribución binomial B (10; 0,96), con X el suceso disco sin fallo.

$P(X \geq 8) = P\ (X = 8) + P\ (X = 9) + P\ (X = 10) =$

$$= \binom{10}{8} \cdot (0{,}96)^8 \cdot 0{,}04^2 + \binom{10}{9} \cdot (0{,}96)^9 \cdot (0{,}04)^1 + \binom{10}{10} \cdot (0{,}96)^{10} = 0{,}9938$$

14. Es una distribución binomial B (10; 0,7).

a) $P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot(0,7)^{10}=0,0282$

b) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=$

$$=1-\binom{10}{0}\cdot(0,3)^{10}-\binom{10}{1}\cdot(0,3)^{9}\cdot(0,7)^{1}=0,9999$$

c) $P(X\leq 9)=1-P(X=10)==1-\binom{10}{10}\cdot(0,7)^{10}=0,9718$

15. Es una distribución binomial B (20; 0,6), con X el suceso no estudie la asignatura.

$$P(X=7)=\binom{20}{7}\cdot(0,6)^{7}\cdot(0,4)^{13}=0,0146$$

16. Es una distribución binomial B (7; 0,45).

a) $P(X=3)=\binom{7}{3}\cdot(0,45)^{3}\cdot(0,55)^{4}=0,2918$

b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$

$$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$$

$$=1-\binom{7}{0}\cdot(0,55)^{7}-\binom{7}{1}\cdot(0,55)^{6}\cdot(0,45)^{1}-\binom{7}{2}\cdot(0,55)^{5}\cdot(0,45)^{2}=0,6836$$

c) $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$

$$=\binom{7}{0}\cdot(0,55)^{7}+\binom{7}{1}\cdot(0,55)^{6}\cdot(0,45)^{1}+\binom{7}{2}\cdot(0,55)^{5}\cdot(0,45)^{2}+\binom{7}{3}\cdot(0,55)^{4}\cdot(0,45)^{3}=0,6083$$

17. Es una distribución binomial B (8; 0,7).

La probabilidad de que aprueben los 8 alumnos es $P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot(0,7)^{8}=0,0576$

La probabilidad de que apruebe sólo uno es $P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot(0,7)^{1}\cdot(0,3)^{7}=0,0012$

18. Es una distribución binomial B (12; 0,3). Llamamos X al suceso jugar al baloncesto.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{12}{0} \cdot (0,7)^{12} - \binom{12}{1} \cdot (0,7)^{11} \cdot (0,3)^{1} = 0,9150$$

Por otro lado: $\mu = 12 \cdot 0,3 = 4$ socios se espera que practiquen baloncesto.

19. Es una distribución binomial $B\left(10; \dfrac{1}{4}\right)$.

a) Acertará, por termino medio, $\mu = n \cdot p = 10 \cdot \dfrac{1}{4} = 2,5$ respuestas.

b) La desviación típica es: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}} = 1,37$.

c) La probabilidad pedida es:

$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,0781$.

ACTIVIDADES-PÁG. 336

20. Es una distribución binomial $B(6; 0,483)$. Sea X el número de niñas.

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot (0,517)^{6} = 0,9809$

b) P (al menos un chico) = 1 – P (ningún chico) = 1 – P (X = 6) = $1 - \binom{6}{6} \cdot (0,483)^{6} = 0,9873$

21. Es una distribución binomial B (20; 0,95). Sea X el número de trenes que llegan a la hora.

$$P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) =$$

$$= \binom{20}{18} \cdot (0,95)^{18} \cdot (0,05)^{2} + \binom{20}{19} \cdot (0,95)^{19} \cdot (0,05)^{1} + \binom{20}{20} \cdot (0,95)^{20} = 0,9245$$

$$P(X \geq 19) = P(X = 19) + P(X = 20) = \binom{20}{19} \cdot (0,95)^{19} \cdot (0,05)^{1} + \binom{20}{20} \cdot (0,95)^{20} = 0,7358$$

22. Es una distribución binomial B (60; 0,05). Sea X el número de personas con grupo ORh^{-}.

$$P(X = 0) = \binom{60}{0} \cdot (0,95)^{60} = 0,0461$$

La esperanza es: μ = 60 · 0,05 = 3 personas cabe esperar que haya con ORh⁻.

23. Es una distribución binomial B (4; p).

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot p^4 = 0{,}4096 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}8$$

La probabilidad de que sea defectuoso es 0,2.

24. a) Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \frac{154}{500} = 0{,}308$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 3p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: 3p = 0,308 $\Rightarrow$ p = 0,1 y q = 0,9

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (3; 0,1). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$500 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}9^3 = 0{,}729$	364,5	365	361	4
1	$3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$	121,5	122	124	2
2	$3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$	13,5	14	15	1
3	$0{,}1^3 = 0{,}001$	0,5	1	0	1

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.

b) La probabilidad de que fallen al menos dos componentes es:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}027 + 0{,}001 = 0{,}028.$$

La frecuencia relativa de que fallen al menos dos componentes es: $\frac{15 + 0}{500} = 0{,}030$, que está muy próxima a la probabilidad anterior.

25. Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \frac{288}{300} = 0{,}96$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 3p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: 3p = 0,96 $\Rightarrow$ p = 0,32 y q = 0,68

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (3; 0,32). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$300 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}68^3 = 0{,}3144$	94,32	94	114	20
1	$3 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68^2 = 0{,}4439$	133,17	133	100	33
2	$3 \cdot 0{,}32^2 \cdot 0{,}68 = 0{,}2089$	62,67	63	70	7
3	$0{,}32^3 = 0{,}0328$	9,84	10	16	6

Las diferencias son muy grandes. Podemos afirmar que el ajuste no es bueno, es decir, los datos iniciales no provenían de una distribución binomial.

26. Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \frac{41}{150} = 0{,}2733$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 2p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: 2p = 0,2733 $\Rightarrow$ p = 0,1367 $\approx$ 0,14 y q = 0,8633 $\approx$ 0,86.

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (2; 0,14). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$150 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}86^2 = 0{,}7396$	110,94	111	113	2
1	$2 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86 = 0{,}2408$	36,12	36	33	3
23	$0{,}14^2 = 0{,}0196$	2,94	3	4	1

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.

27. Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \frac{192}{150} = 1{,}28$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 4p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: 4p = 1,28 $\Rightarrow$ p = 0,32 y q = 0,68

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (4; 0,32). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$150 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}68^4 = 0{,}2138$	32,07	32	30	2
1	$4 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68^3 = 0{,}4025$	60,375	60	62	2
2	$6 \cdot 0{,}32^2 \cdot 0{,}68^2 = 0{,}2840$	42,6	43	46	3

3	$4 \cdot 0{,}32^3 \cdot 0{,}68 = 0{,}0891$	13,365	13	10	3
4	$0{,}32^4 = 0{,}0105$	1,575	2	2	0

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.