UNIDAD 2: Polinomios. Fracciones algebraicas

ACTIVIDADES-PÁG. 34

1. Los resultados son:

a) $2x^5 – 3x^4 + 6x^3 – 19x^2 + 27x - 18$

c) $x^6 – 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$

b) Cociente: $2x^2 + x + 4$; resto: 12

d) $4x^4 – 12x^3 + 13x^2 – 6x + 1$

2. El valor del parámetro es a = 3.

3. Las fracciones simplificadas son:

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{x+1}{x-3}$

b) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} = \dfrac{(x+2)^2}{x-4}$

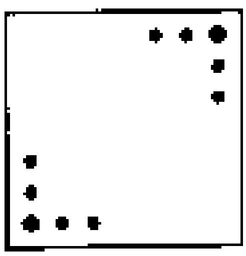
4. Los resultados de las operaciones son:

a) $\dfrac{x-2}{x^2-1} \cdot \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\left(x - \dfrac{x}{x+1}\right) : \left(x + \dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{x}{x+2}$

ACTIVIDADES-PÁG. 47

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. Si hay n calles, el número máximo de cruces es $C_{n,\,2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$.

Luego si hay 66 farolas habrá 66 cruces y se cumplirá:

$$\frac{n^2 - n}{2} = 66 \;\Rightarrow\; n^2 - n - 132 = 0 \;\Rightarrow\; n = 12$$

El pueblo tenía 12 calles como mínimo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.

Cómo máximo pudo robar:

60 – 42 = 18 botellas.

La disposición de 42 botellas admite muchas formas diferentes,

1		20
20		1

ACTIVIDADES-PÁG. 49

1. Utilizando el teorema del resto.

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \;\Rightarrow\; 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + k\cdot\frac{2}{3} + 3 = 5 \;\Rightarrow\; \frac{16}{27} + \frac{2k}{3} + 3 = 5 \;\Rightarrow\; \frac{2k}{3} = \frac{38}{27} \;\Rightarrow\; k = \frac{19}{9}$$

2. a) La factorización del polinomio es P (x) = $2x^4 – 4x^3 – 4x^2 – 4x – 6 = 2(x^2 + 1)(x + 1)(x – 3)$ y sus raíces son – 1 y 3.

b) La factorización del polinomio es P (x) = $2x^3 + 3x^2 – 3x – 2 = 2(x - 1)(x + 2)(x + 1/2)$ y sus raíces son 1; -2 y – 1/2.

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 1 y 2 con Wiris.

Actividad 1

$P(x) = 2x^3 + k\cdot x + 3 \;\rightarrow\; x \mapsto k\cdot x + 2\cdot x^3 + 3$

$P\left(\frac{2}{3}\right) \;\rightarrow\; \frac{2}{3}\cdot k + \frac{97}{27}$

$\text{resolver}\left(\frac{2}{3}\cdot k + \frac{97}{27} = 5, k\right) \;\rightarrow\; \left\{\left[k = \frac{19}{9}\right]\right\}$

Actividad 2

$\text{factorizar}(2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6) \;\rightarrow\; 2\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

$\text{resolver}(2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6 = 0) \;\rightarrow\; \{\{x=-1\},\{x=3\}\}$

$\text{factorizar}(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) \;\rightarrow\; (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2\cdot x+1)$

$\text{resolver}(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0) \;\rightarrow\; \left\{\{x=-2\},\{x=1\},\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

3. Operando, obtenemos:

a) $\dfrac{3x}{x-2} - \dfrac{4x^2+5}{x^2-x-2} - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{1-x}{x-2}$

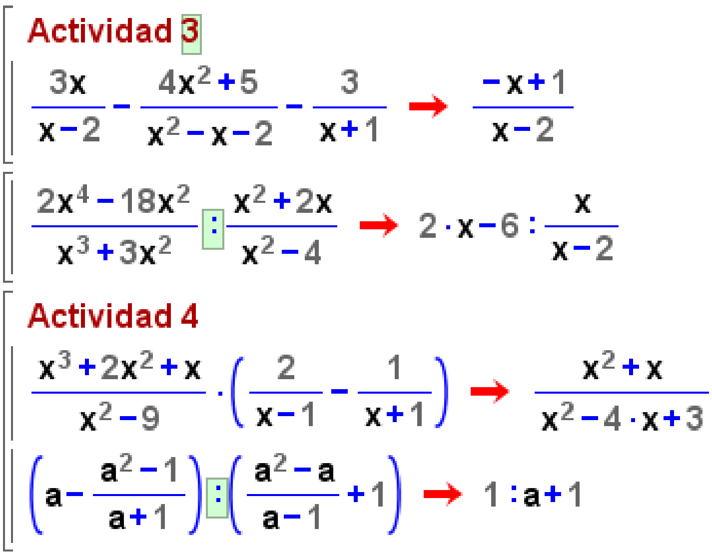
b) $\dfrac{2x^4-18x^2}{x^3+3x^2} : \dfrac{x^2+2x}{x^2-4} = \dfrac{2x^2-10x+12}{x}$

4. Operando, obtenemos:

a) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-9} \cdot \left(\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{x(x+1)^2}{x^2-9} \cdot \dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x\,(x+1)}{(x-3)(x-1)}$

b) $\left(a - \dfrac{a^2-1}{a+1}\right) : \left(\dfrac{a^2-a}{a-1} + 1\right) = \dfrac{a+1}{a+1} : \dfrac{a^2-1}{a-1} = \dfrac{(a+1)(a-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \dfrac{1}{a+1}$

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 3 y 4 con Wiris.



ACTIVIDADES-PÁG. 50

1. El valor de los parámetros es:

a) a = 2 y b = - 1.

b) a = 2 y b = - 5 o a = -2 y b = 5.

2. Los resultados de las operaciones son:

a) A (x) - B (x) + C (x) = $- x^3 + x^2 + 5x - 9$

d) B (x) · C (x) = $6x^4 - 11x^3 + 4x^2$

b) $A(x) - [B(x) + C(x)] = -x^3 + x^2 - x - 1$

c) $B(x) - 2A(x) = -x^2 - 4x + 10$

e) $[B(x)]^2 = 4x^6 - 4x^5 + x^4$

f) $C(x) \cdot [A(x) + B(x)] = 9x^4 - 15x^3 + 10x^2 - 23x + 20$

3. Los resultados de las operaciones son:

a) $(2 - 3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2$

b) $(2x - 5)(2x + 5) = 4x^2 - 25$

c) $(3 + x)^3 = 27 + 27x + 9x^2 + x^3$

d) $\left(\frac{2}{3} + 9x\right)^2 = \frac{4}{9} + 12x + 81x^2$

e) $(x - 3)^2 - (x + 3)^2 = -12x$

f) $(4x + 3)^2 - (4x - 3)(4x + 3) = 24x + 18$

4. El valor del polinomio buscado, en cada caso, es:

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 4$

b) $P(x) = 2x^4 - 3x^2$

5. La solución en cada uno de los casos es:

a) Cociente: $4x^4 - 3x^3 - 6x + 7$; Resto: $-3x + 2$.

b) Cociente: $5x^2 + 8x - 3$; Resto: $-9x$

6. La tabla completa aparece a continuación.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$\mathbf{5x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 3x + 7}$	$5x^2 + 3$	$x^2 - 2x + 1$	$3x + 4$
$5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x - 4$	$\mathbf{5x^2 + 6x + 2}$	$x^2 - 1$	$x - 2$
$8x^3 - 4x^2 + 7$	$2x^2 + x - 1$	$\mathbf{4x - 4}$	$8x + 3$
$x^5 - 2x^3 - x^2$	$x^2 - 2$	$x^3 - 1$	$\mathbf{-2}$

7. Los valores numéricos son:

a) – 30; 0 y 12

b) $-5; -\frac{5}{2}$ y $-\frac{55}{32}$

8. Los resultados de cada una de las divisiones es:

a) Cociente: $x^3 - 4x^2 + 4x$; Resto: -2.

b) Cociente: $2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$; Resto: 7.

c) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$; Resto: 0.

9. El valor en cada caso es: a) $a = -3$ b) $a = -\frac{43}{2}$.

10. Quedaría:

a) $P(0) = 3$; $P(1) = 3$ y $P(-2) = 3$.

b) Debe verificarse que $P(-1) = 0$, entonces $k = 4$.

c) Debe verificarse que $P(-2) = 2$, entonces $a = 23$.

d) El resto de esta división es $B(0) = -5$.

ACTIVIDADES-PÁG. 51

11. Las raíces son:
a) 0, 3 y – 3 b) 3 y – 3 c) 1; 3, - 1 y – 3

12. Las descomposiciones pedidas son:

a) $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$

b) $B(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1 = 9\,(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

c) $C(x) = x^3 + 2x^2 + x = x\,(x+1)^2$

d) $D(x) = x^4 - 29x^2 + 100 = (x+2)(x+5)(x-5)(x-2)$

e) $E(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2)$

f) $F(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)(x^2+1)$

13. La solución en cada uno de los casos queda:

a) $MCD\,[A(x), B(x)] = x\,(x+2)^2$
$mcm\,[A(x), B(x)] = x^2 (x+2)^2 (x-1)^2 (x+1)$

b) $MCD\,[A(x), C(x)] = x\,(x-1)$
$mcm\,[A(x), C(x)] = x^3 (x+2)^2 (x-1)^2 (x-2)^3$

c) $MCD\,[A(x), B(x), C(x)] = x$
$mcm\,[A(x), B(x), C(x)] = x^3 (x+2)^2 (x-1)^2 (x-2)^3 (x+1)$

14. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm, obteniendo:

a) $\begin{cases} MCD\,[A(x),\ B(x)] = (x-3)(x+3) \\ mcm\,[A(x),\ B(x)] = (x-3)\,(x+3)\,(x-1)\,(x+1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} MCD\,[C(x),\ D(x)] = x-1 \\ mcm\,[C(x),\ D(x)] = (x-1)^2\ (x+1)\,(x^2+1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} MCD\,[E(x),\ F(x)] = 2\,(x-2) \\ mcm\,[E(x),\ F(x)] = -\,2\,(x-2)\,(x^2+x+1)\left(x + \frac{5}{2}\right) \end{cases}$

15. Se comprueba fácilmente a partir de las descomposiciones de los polinomios:

A (x) · B (x) = $(x^4 - 9x^2) \cdot (x^3 + 6x^2 + 9x) = x^7 + 6x^6 - 54x^4 - 81x^3$

MCD [A (x), B (x)] · mcm [A (x) · B (x)] = $(x^2 + 3x) \cdot (x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 27x^2) = x^7 + 6x^6 - 54x^4 - 81x^3$

16. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 4x} = \dfrac{x}{x+2}$

b) $\dfrac{x^2 - 25}{2x + 10} = \dfrac{x-5}{2}$

c) $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^4 - 2x^2 + 1} = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$

d) $\dfrac{5x^3 + x^2 - 5x - 1}{5x^3 - 9x^2 + 3x + 1} = \dfrac{x+1}{x-1}$

17. El polinomio P (x) es:

a) P (x) = $x^2 - 1$

b) P (x) = $x + 5$

c) P (x) = $x^2 - 5x + 6$

d) P (x) = $x^3 - 4x^2$

18. En cada caso queda:

a) $\dfrac{2x^2 + 2x}{6x^2}, \dfrac{9x + 15}{6x^2}$

b) $\dfrac{2x^2 + 4x}{x^2 - 4}, \dfrac{x+3}{x^2 - 4}, \dfrac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{3x^2 - 6x + 3}{6x^2 - 6x}, \dfrac{6x + 6}{6x^2 - 6x}, \dfrac{2x^2}{6x^2 - 6x}$

d) $\dfrac{x^3 - 25x}{3x^2 - 75}, \dfrac{5}{3x^2 - 75}, \dfrac{9x^2 + 45x}{3x^2 - 75}$

ACTIVIDADES-PÁG. 52

19. Los resultados de las operaciones son:

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x^2} = \dfrac{4x+3}{2x^2}$

b) $\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3x-1}{x^2-9} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{8}{x^2-9}$

d) $\dfrac{3x}{x-3} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{3x^2 + 11x - 15}{x^2 - x - 6}$

20. Los resultados de las operaciones son:

a) $\dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1} \cdot \dfrac{4x^2 + 4}{x^2 - 1} = \dfrac{4x}{x-1}$

c) $\dfrac{x-1}{2x+6} : \dfrac{x^2 - 1}{-3x - 3} = \dfrac{-3}{2x+6}$

b) $\dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12}=\dfrac{5}{2x-2}$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-x}:\dfrac{2x+6}{4x^2-8x+4}=\dfrac{2(x+3)(x-1)}{x}$

21. Los resultados de las operaciones son:

a) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right):\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=1$

d) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^2+4x}{x^2}:\dfrac{x^2-16}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{3x-12}{x^2-x}=\dfrac{3\,(x+1)^2}{x^2\,(x-1)}$

e) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}=\dfrac{x^3+3x^2+9x+27}{3}$

c) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}$

f) $\dfrac{x+1}{2x}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{x-x^2}$

22. Las soluciones quedan:

a) Los valores buscados son: a = 5; b = 2.

b) La igualdad queda: $\dfrac{10x+1}{x^2-3x-10}=\dfrac{51/7}{x-5}+\dfrac{19/7}{x+2}$

23. En cada caso queda:

a) Obtenemos las raíces de los polinomios a partir de su descomposición factorial:
A (x) = (x + 1) (x – 2) (x^2 + 1). Las raíces son x = - 1 y x = 2.
B (x) = x (x + 2)^2. Las raíces son x = 0 y x = - 2 (doble).
C (x) = x (x^2 + 9). Las raíz es x = 0.

b) En cada uno de los tres casos:
i) El polinomio que tiene como raíces x = 1, x = 2 y x = 3 es P (x) = a (x – 1) (x – 2) (x – 3).

ii) El polinomio que tiene como raíces x = 0 y x = 1 doble es P (x) = a x (x – 1)^2.

iii) El polinomio que tiene como raíces x = 0 doble y x = – 1 triple es P (x) = a x^2 (x + 1)^3.

c) El polinomio es P (x) = x + 2

24. En cada uno de los casos queda:

a) Multiplicando en cruz, obtenemos:
(x^2 – 4x + 3) · (x + 2) = x^3 - 2x^2 – 5x + 6

(x^2 + x - 2) · (x - 2) = x^3 - 2x^2 – 5x + 6

Luego la igualdad es cierta.

b) Operando obtenemos: $$\frac{x-1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{\frac{x-1}{x}} = x$$

Luego la igualdad es cierta.

ACTIVIDADES-PÁG. 53

a) En la mesa de tamaño 8 x 6 la bola se mete en la esquina B, como puede verse en el dibujo.

b) La bola ha cruzado 24 cuadrados.

c) La bola ha rebotado 5 veces en los lados de la mesa.

Los mismo ocurriría en las mesas de medidas semejantes: 16 x 12, 24 x 18, etc. En particular en la mesa 4 x 3.

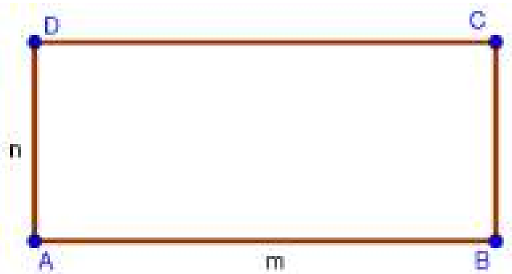
d) Los resultados para las mesas pedidas aparecen a continuación:

● En una mesa 2 x 6, la bola se mete en la esquina C opuesta a A, cruza 6 cuadrados y rebota 2 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 3.

● En una mesa 5 x 10, la bola se mete en la esquina B, cruza 10 cuadrados y rebota una vez en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 2.

● En una mesa 6 x 6, la bola se mete en la esquina C, cruza 6 cuadrados y rebota 0 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 1.

e) En general, para una mesa de tamaño m x n, m y n números naturales, se busca la mesa semejante de dimensiones a x b, siendo a y b primos entre sí y obtenemos:



■ Si b es par, la bola se mete en la esquina B, contigua a la de partida A.

■ Si b es impar, la bola se mete en la esquina C, opuesta a la de partida A, si a es par; si x es par, la bola se mete en la esquina D.

Determinamos el número de rebotes en las bandas de la mesa de billar y para ello calculamos los rebotes que da la bola en las mesas de las dimensiones particulares que aparecen en el enunciado, obtenemos:

- En la mesa 8 x 6, o en su semejante 4 x 3, da 4 + 3 – 2 = 5 rebotes.

- En la mesa 2 x 6, o en su semejante 1 x 3, da 1 + 3 – 2 = 2 rebotes.

- En la mesa 5 x 10, o en su semejante 1 x 2, da 1 + 2 – 2 = 1 rebote.

- En la mesa 6 x 6, o en su semejante 1 x 1, da 1 + 1 – 2 = 0 rebotes.

En general, en la mesa a x b, da a + b - 2 rebotes; siendo a, b los primos entre sí determinados a partir de m x n, es decir, en una mesa de tamaño m x n, la bola da $\frac{m+n}{m.\,c.\,d.\,(m,\,n)} - 2$ rebotes.

Haciendo los mismo para determinar los cuadros que cruza la bola, se llega a que en una mesa de tamaño m x n, la bola cruza $\frac{m \cdot n}{m.c.d.(m,n)}$ cuadros.