UNIDAD 3: Polinomios y fracciones algebraicas

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 52

1. Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios:

a)	$-2,8x^2y$	Coeficiente: $-2,8$	Parte literal: x^2y	Grado: 3
b)	$\frac{1}{3}xy^3$	Coeficiente: $\frac{1}{3}$	Parte literal: xy^3	Grado: 4
c)	$\frac{x^5}{2}$	Coeficiente: $\frac{1}{2}$	Parte literal: x^5	Grado: 5
d)	2	Coeficiente: 2	Parte literal: No tiene	Grado: 0

2. Escribe tres monomios de grado 4 con indeterminadas x e y con la parte literal distinta.

Podemos escribir monomios con cualquier coeficiente y de modo que la suma de los exponentes de las indeterminadas x e y sea 4. Por ejemplo: $3xy^3$; $\frac{x^2y^2}{6}$; $\sqrt{2}x^3y$

3. Calcula:

a) $\frac{2}{5}xy^2z - xy^2z + \frac{3}{4}xy^2z = \frac{8}{20}xy^2z - \frac{20}{20}xy^2z + \frac{15}{20}xy^2z = \frac{3}{20}xy^2z$

b) $\left(\frac{5}{6}x^3\right)\cdot\left(3x^2y^2\right)\cdot\left(-4xyz^3\right) = -\frac{60}{6}x^6y^3z^3 = -10x^6y^3z^3$

c) $\sqrt{3}\,x^2y\cdot\sqrt{12}\,xy^3 = \sqrt{36}\,x^3y^4 = \pm 6x^3y^4$

d) $\left(-12x^4y^2z^3\right):\left(16xyz^3\right) = -\frac{12}{16}x^3y = -\frac{3}{4}x^3y$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 53

4. Indica el grado y nombra todos los coeficientes del polinomio $P(x) = -x^6 + 3x^5 - 4x^4 + x^3 - x - 3$.

Polinomio	$P(x) = -x^6 + 3x^5 - 4x^4 + x^3 - x - 3$
Grado	6
Coeficiente líder	-1
Coeficiente de grado 5	3
Coeficiente de grado 4	-4
Coeficiente de grado 3	1
Coeficiente de grado 2	0
Coeficiente de grado 1	-1
Término independiente	-3

5. Escribe un polinomio de grado 5 que tenga por término independiente 3 y cuyo coeficiente de grado 2 es -5.

Podemos escribir cualquier polinomio de la forma: $P(x)=ax^5+bx^4+cx^3-5x^2+dx+3$ con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$. El ejemplo más sencillo es: $P(x)=x^5-5x^2+3$.

6. Escribe un polinomio completo de dos variables de grado 3.

Para que el polinomio sea completo debe contener al menos un monomio de grado 3, otro de grado 2, otro de grado 1 y término independiente. Por ejemplo: $P(x)=xy^2-5xy+6y-2$

7. Evalúa el polinomio $P(x)=-2x^4+3x^3-x^2+2x-5$ en:

$$x=1\Rightarrow P(1)=-2+3-1+2-5=-3$$
$$x=-1\Rightarrow P(-1)=-2-3-1-2-5=-13$$
$$x=2\Rightarrow P(2)=-2\cdot 2^4+3\cdot 2^3-2^2+2\cdot 2-5=-32+24-4+4-5=-13$$
$$x=-2\Rightarrow P(-2)=-2\cdot(-2)^4+3\cdot(-2)^3-(-2)^2+2\cdot(-2)-5=-32-24-4-4-5=-69$$
$$x=3\Rightarrow P(3)=-2\cdot 3^4+3\cdot 3^3-3^2+2\cdot 3-5=-162+81-9+6-5=-89$$
$$x=-3\Rightarrow P(-3)=-2\cdot(-3)^4+3\cdot(-3)^3-(-3)^2+2\cdot(-3)-5=-162-81-9-9-5=-266$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 54

8. Dados los polinomios $P(x)=2x^2-x$, $Q(x)=-x^3+2x^2-3x$ y $R(x)=2x^2-x+4$, calcula:

a) $P(x)-R(x)=2x^2-x-\left(2x^2-x+4\right)=2x^2-x-2x^2+x-4=-4$

b) $Q(x)+P(x)\cdot R(x)=-x^3+2x^2-3x+\left(2x^2-x\right)\cdot\left(2x^2-x+4\right)=$
$=-x^3+2x^2-3x+4x^4-2x^3+8x^2-2x^3+x^2-4x=4x^4-5x^3+11x^2-7x$

c) $Q(x)\cdot R(x)=\left(-x^3+2x^2-3x\right)\cdot\left(2x^2-x+4\right)=$
$=-2x^5+x^4-4x^3+4x^4-2x^3+8x^2-6x^3+3x^2-12x=-2x^5+5x^4-12x^3+11x^2-12x$

9. Realiza las siguientes operaciones de polinomios:

a) $\left(2x^2-x\right)\cdot\left(-x^3+2x^2+2\right)-x^3\left(-2x^2-5x+1\right)=$
$=-2x^5+4x^4+4x^2+x^4-2x^3-2x+2x^5+5x^4-x^3=10x^4-3x^3+4x^2-2x$

b) $\left(2x^2-x\right)\cdot(3x-2)-(x-3)\cdot(3x-1)=6x^3-4x^2-3x^2+2x-\left(3x^2-x-9x+3\right)=$
$=6x^3-4x^2-3x^2+2x-3x^2+x+9x-3=6x^3-10x^2+12x-3$

c) $2x^4-3x^3-3x^2\left(-3+2x^2\right)-2x\left(2x^3-x^2\right)=2x^4-3x^3+9x^2-6x^4-4x^4+2x^3=$
$=-8x^4-x^3+9x^2$

d) $3x^5+2x^4-2x^3\left(3x^2-2x\right)-\left(2x^2-5x\right)\left(-2x+x^2\right)=$

$$=3x^5+2x^4-6x^5+4x^4+4x^3-2x^4-10x^2+5x^3=-3x^5+4x^4+9x^3-10x^2$$

10. Opera:

a) $(3x+2)^2=(3x+2)\cdot(3x+2)=9x^2+6x+6x+4=9x^2+12x+4$

b) $(2x^2-x)^2=(2x^2-x)\cdot(2x^2-x)=4x^4-2x^3-2x^3+x^2=4x^4-4x^3+x^2$

c) $(x-2x^2)^3=(x-2x^2)\cdot(x-2x^2)\cdot(x-2x^2)=(x^2-2x^3-2x^3+4x^4)\cdot(x-2x^2)=$

$=(x^2-4x^3+4x^4)\cdot(x-2x^2)=x^3-4x^4+4x^5-2x^4+8x^5-8x^6=-8x^6+12x^5-6x^4+x^3$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 55

11. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(6x^3+19x^2-25):(3x+5)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{6x^3} & +19x^2 & & -25 & 3x+5 \\ \cline{5-5}
-\cancel{6x^3} & -10x^2 & & & 2x^2+3x-5 \\ \cline{1-2}
 & \cancel{9x^2} & & & \\
 & -\cancel{9x^2} & -15x & & \\ \cline{2-3}
 & & -\cancel{15x} & -25 & \\
 & & +\cancel{15x} & +25 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

b) $(3x^5-4x^3+3x^2-3x-3):(3x^2+2)$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{3x^5} & -4x^3 & +3x^2 & -3x & -3 & 3x^2+2 \\ \cline{6-6}
-\cancel{3x^5} & -2x^3 & & & & x^3-2x+1 \\ \cline{1-2}
 & -\cancel{6x^3} & +3x^2 & -3x & & \\
 & +\cancel{6x^3} & & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & +\cancel{3x^2} & +x & -3 & \\
 & & -\cancel{3x^2} & & -2 & \\ \cline{3-5}
 & & & x & -5 &
\end{array}$$

c) $(6x^5-10x^4+7x^3-5x^2+3x+5):(3x^2-2x)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & -10x^4 & +7x^3 & -5x^2 & +3x & +5 & 3x^2-2x \\
\cancel{-6x^5} & +4x^4 & & & & & \overline{2x^3-2x^2+x-1} \\
\hline
 & \cancel{-6x^4} & +7x^3 & & & & \\
 & \cancel{+6x^4} & -4x^3 & & & & \\
\hline
 & & \cancel{+3x^3} & -5x^2 & & & \\
 & & \cancel{-3x^3} & +2x^2 & & & \\
\hline
 & & & \cancel{-3x^2} & +3x & & \\
 & & & \cancel{+3x^2} & -2x & & \\
\hline
 & & & & x & +5 &
\end{array}
$$

d) $\left(6x^7-3x^6-x^5+10x^4-12x^3-3x^2+8x-3\right):\left(-3x^3+2x-1\right)$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
6x^7 & -3x^6 & -x^5 & +10x^4 & -12x^3 & -3x^2 & +8x & -3 & -3x^3+2x-1 \\
\cancel{-6x^7} & & +4x^5 & -2x^4 & & & & & \overline{-2x^4+x^3-x^2-2x+3} \\
\hline
 & \cancel{-3x^6} & +3x^5 & +8x^4 & -12x^3 & & & & \\
 & \cancel{+3x^6} & & -2x^4 & +x^3 & & & & \\
\hline
 & & \cancel{+3x^5} & +6x^4 & -11x^3 & -3x^2 & & & \\
 & & \cancel{-3x^5} & & +2x^3 & -x^2 & & & \\
\hline
 & & & \cancel{+6x^4} & -9x^3 & \cancel{-4x^2} & +8x & & \\
 & & & \cancel{-6x^4} & & \cancel{+4x^2} & -2x & & \\
\hline
 & & & & \cancel{-9x^3} & & \cancel{+6x} & \cancel{-3} & \\
 & & & & \cancel{+9x^3} & & \cancel{-6x} & \cancel{+3} & \\
\hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 56

12. Desarrolla las siguientes expresiones algebraicas utilizando las identidades notables:

a) $(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

b) $(x+2)^2=x^2+4x+4$

c) $(2x+3)^2=4x^2+12x+9$

d) $(5x+2)(5x-2)=25x^2-4$

e) $\left(-x^2+2\right)^2=x^4-4x^2+4$

f) $(-2x+3)(2x+3)=-4x^2+9$

13. Utiliza las identidades notables para escribir las siguientes expresiones en forma de producto o de potencia:

a) $x^2+6x+9=(x+3)^2$

b) $x^2-16=(x+4)(x-4)$

c) $x^2-4x+4=(x-2)^2$

d) $9x^6-4=(3x^3+2)(3x^3-2)$

e) $4x^4-20x^3+25x^2=(2x^2-5x)^2$

f) $4x^4+4x^2+1=(2x^2+1)^2$

14. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $12x^4-6x+24x^2=6x(3x^3-1+4x)$

b) $36x^4y^2+12x^2y^4-18x^3y=6x^2y(6x^2y+2y^3-3x)$

c) $-12xy-2xy^3-10x^3yz=-2xy(6+y^2+5x^2z)$

d) $-18x(x-5)^2+12x^2(x-5)=6x(x-5)[-3(x-5)+2x]$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 57

15. Realiza las siguientes divisiones utilizando el algoritmo de Ruffini:

a) $(x^4-1):(x-1)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, la división es igual a $(x^4-1):(x-1)=x^3+x^2+x+1$ y el resto $R=0$.

b) $(-x^3+2x^2-3x-5):(x+1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & +2 & -3 & -5 \\ -1 & & -1 & -1 & +4 \\ \hline & 1 & +1 & -4 & \boxed{-1} \end{array}$$

El cociente de la división es x^2+x-4 y el resto $R=-1$.

c) $(2x^3-3x^2+x-1):(x-3)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & +1 & -1 \\ 3 & & +6 & +9 & +30 \\ \hline & 2 & +3 & +10 & \boxed{+29} \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $2x^2+3x+10$ y el resto $R=+29$.

d) $(2x^3-3):(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & & -4 & +8 & -16 \\ \hline & 2 & -4 & +8 & \boxed{-19} \end{array}$$

El cociente de la división es $2x^2-4x+8$ y el resto $R=-19$.

e) $\left(2x^3-3x^2+x\right):\left(x+2\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & +1 & 0 \\ -2 & & -4 & +14 & -30 \\ \hline & 2 & -7 & +15 & \boxed{-30} \end{array}$$

El cociente de la división es $2x^2-7x+15$ con resto $R=-30$.

f) $\left(-2x^3+5x^2\right):\left(x-2\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & +5 & 0 & 0 \\ 2 & & -4 & +2 & +4 \\ \hline & -2 & +1 & +2 & \boxed{+4} \end{array}$$

El cociente de la división es $-2x^2+x-2$ y el resto $R=+4$.

g) $\left(2x^4-2x^2-x-1\right):\left(x-1\right)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & & & 2 & 0 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & 0 & -1 & \boxed{-2} \end{array}$$

El cociente de la división es $2x^3+2x^2-1$ y el resto $R=-2$.

h) $\left(-x^7+x^6+2x^3-1\right):\left(x-2\right)$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & -1 & 1 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & & 2 & 6 & 12 & 24 & 52 & 104 & 208 \\ \hline & -1 & 3 & 6 & 12 & 26 & 52 & 104 & \boxed{207} \end{array}$$

El cociente de la división es $-x^6+3x^5+6x^4+12x^3+26x^2+52x+104$ y el resto $R=207$.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 58

16. Calcula el resto de la división $\left(-x^4+3x^3-2x^2-x-3\right):\left(x+1\right)$ sin efectuar la división.

Según el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con el resultado de evaluar el polinomio en $x=-1$: $P(-1)=-(-1)^4+3(-1)^3-2(-1)^2-(-1)-3=-1-3-2+1-3=-8$. Por tanto, el resto es 8.

17. Realiza la división del ejercicio anterior y comprueba que obtienes el mismo resultado para el resto:

Realizando la división por el método de Ruffini se comprueba el resultado:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & +3 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & & +1 & -4 & +6 & -5 \\ \hline & -1 & +4 & -6 & +5 & \boxed{-8} \end{array}$$

18. Busca dos raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $2x^3+x^2-7x-6$

El corolario al Teorema del Resto nos dice que las raíces enteras del polinomio dividen al término independiente. Por tanto, los candidatos a considerar son $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

$P(+1)=2+1-7-6=-10\neq0$

$P(-1)=-2+1+7-6=0$

$P(+2)=16+4-14-6=0$

Por tanto, -1 y $+2$ son raíces enteras del polinomio.

b) $3x^3-x^2-12x+4$

Los candidatos a raíz son $\pm1,\pm2,\pm4$. Comprobamos:

$P(+1)=3-1-12+4\neq0$

$P(-1)=-3-1+12+4\neq0$

$P(+2)=24-4-24+4=0$

$P(-2)=-24-4+24+4=0$

Por tanto, $+2$ y -2 son raíces enteras del polinomio.

c) $2x^3+5x^2-22x+15$

Los candidatos a raíz son $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$. Comprobando, se obtienen las siguientes raíces:

$P(+1)=2+5-22+15=0$

$P(-5)=-250+125+110+15=0$

Los números $+1$ y -5 son raíces enteras del polinomio.

d) $2x^4-11x^3+x^2+50x-24$

Los candidatos a raíz son $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$. Comprobando, se obtienen las siguientes raíces:

$P(+3)=2\cdot81-11\cdot27+9+50\cdot3-24=0$

$P(+4)=2\cdot256-11\cdot64+16+50\cdot4-24=0$

Por tanto, $+3$ y $+4$ son raíces enteras del polinomio.

e) x^4-8x^2-9

Los candidatos a raíz son $\pm1,\ \pm3,\pm9$. Comprobando, se obtienen las siguientes raíces:

$P(+3)=81-72-9=0$

$P(-3)=81-72-9=0$

Por tanto, $+3$ y -3 son raíces enteras del polinomio.

f) $2x^4+3x^3-28x^2+33x-10$

Los candidatos a raíz son $\pm1,\ \pm2,\ \pm5,\pm10$. Comprobando, se obtienen las siguientes raíces:

$P(+1)=2+3-28+33-10=0$

$P(-5)=1250-375-700-165-10=0$

Por tanto, $+1$ y -5 son raíces enteras del polinomio.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 59

19. Factoriza los siguientes polinomios:

a) x^3+2x^2-5x-6

Los candidatos a raíz son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Comprobando, se obtiene que

$P(-1)=-1+2+5-6=0$

y por tanto el polinomio es divisible entre $(x+1)$. Realizando la división por Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)$.

Para hallar el resto de raíces del polinomio, resolvemos la ecuación $x^2+x-6=0$:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=2 & \Rightarrow(x-2) \\ x_2=-3 & \Rightarrow(x+3) \end{cases}$$

La factorización del polinomio es: $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x-2)(x+3)$.

b) $2x^3-x^2-13x-6$

Los candidatos a raíz son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Comprobando, se obtiene que

$P(-2)=-16-4+26-6=0$

y por tanto el polinomio es divisible entre $(x+2)$. Realizando la división por Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -13 & -6 \\ -2 & & -4 & +10 & +6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, $2x^3-x^2-13x-6=(x+2)(2x^2-5x-3)$.

Para hallar el resto de raíces del polinomio, resolvemos la ecuación $2x^2-5x-3=0$:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm7}{4}\Rightarrow\begin{cases} x_1=3 & \Rightarrow(x-3) \\ x_2=-\frac{1}{2} & \Rightarrow(2x+1) \end{cases}$$

La factorización del polinomio es por tanto: $2x^3-x^2-13x-6=(x+2)(x-3)(2x+1)$

c) $3x^3+7x^2-36x+20$

Los candidatos a raíz son $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$. Comprobando, se obtiene que

$P(+2)=24+28-72+20=0$

y por tanto el polinomio es divisible entre $(x-2)$. Realizando la división por Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & +7 & -36 & +20 \\ 2 & & +6 & +26 & -30 \\ \hline & 3 & +13 & -10 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, $3x^3+7x^2-36x+20=(x-2)(3x^2+13x-10)$.

Para hallar el resto de raíces del polinomio, resolvemos la ecuación $3x^2+13x-10=0$:

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{6}=\frac{-13\pm 17}{6}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} & \Rightarrow(3x-2) \\ x_2=-5 & \Rightarrow(x+5)\end{cases}$$

La factorización del polinomio es por tanto: $3x^3+7x^2-36x+20=(x-2)(3x-2)(x+5)$

d) x^4-3x^3+4x

En primer lugar, sacando factor común se obtiene que $x^4-3x^3+4x=x\left(x^3-3x^2+4\right)$.

Para factorizar x^3-3x^2+4, los candidatos a raíz son $\pm1, \pm2, \pm4$. Comprobando, se obtiene que $P(-1)=-1-3+4=0$ y por tanto el polinomio es divisible entre $(x+1)$. Realizando la división por Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & +4 \\ -1 & & -1 & +4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & +4 & \boxed{0}\end{array}$$

Por tanto, $x^4-3x^3+4x=x(x+1)\left(x^2-4x+4\right)$.

Podemos apreciar que el último factor es una identidad notable: $x^2-4x+4=(x-2)^2$ y por tanto la factorización del polinomio es $x^4-3x^3+4x=x(x+1)(x-2)^2$

e) $x^4-x^3-3x^2+5x-2$

Los candidatos a raíz son $\pm1, \pm2$. Comprobando, se obtiene que $P(+1)=1-1-3+5-2=0$ y por tanto el polinomio es divisible entre $(x-1)$. Aplicando Ruffini dos veces, se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -3 & +5 & -2 \\ 1 & & 1 & 0 & -3 & +2 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & +2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & +1 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Por tanto, $x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^2\left(x^2+x-2\right)$.

Para hallar el resto de raíces del polinomio, resolvemos la ecuación $x^2+x-2=0$:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=1 & \Rightarrow(x-1) \\ x_2=-2 & \Rightarrow(x+2)\end{cases}$$

La factorización del polinomio es por tanto: $x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^3(x+2)$

f) $2x^5+11x^4+18x^3+4x^2-8x$

En primer lugar, sacando factor común se obtiene que $2x^5+11x^4+18x^3+4x^2-8x=x\left(2x^4+11x^3+18x^2+4x-8\right)$.

Para factorizar $2x^4+11x^3+18x^2+4x-8$, los candidatos a raíz son $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$. Comprobando, se obtiene que $P(-2)=32-88+72-8-8=0$

y por tanto el polinomio es divisible entre $(x+2)$. Además, se puede comprobar utilizando el método de Ruffini que se trata de una raíz triple:

	2	+11	+18	+4	−8
−2		−4	−14	−8	+8
	2	+7	+4	−4	0
−2		−4	−6	+4	
	2	+3	−2	0	
−2		−4	2		
	2	−1	0		

La factorización del polinomio es $2x^5+11x^4+18x^3+4x^2-8x=x(x+2)^3(2x-1)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 60

20. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x(x^2-1)}{x^2-2x+1}=\dfrac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)}$

b) $\dfrac{9x^3+6x^2+x}{9x^2-1}=\dfrac{x(9x^2+6x+1)}{(3x+1)(3x-1)}=\dfrac{x(3x+1)^2}{(3x+1)(3x-1)}=\dfrac{x(3x+1)}{(3x-1)}$

c) $\dfrac{2x^2+9x-5}{4x^2-2x}=\dfrac{(2x-1)(x+5)}{2x(2x-1)}=\dfrac{(x+5)}{2x}$

Para realizar este último apartado hay que factorizar $2x^2+9x-5=(2x-1)(x+5)$.

21. Reduce a común denominador las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{3}{x^2-4};\ \frac{x+3}{x^2-4x+4};\ \frac{x+1}{2x^2-4x}$$

En primer lugar debemos factorizar los denominadores para hallar su m.c.m.:

$x^2-4=(x+2)(x-2)$

$x^2-4x+4=(x-2)^2$

$2x^2-4x=2x(x-2)$

$m.c.m=2x(x+2)(x-2)^2$

Calculamos ahora las fracciones equivalentes a las dadas con este denominador:

$$\frac{3}{x^2-4}=\frac{3}{(x+2)(x-2)}=\frac{6x(x-2)}{2x(x+2)(x-2)^2}=\frac{6x^2-12x}{2x(x+2)(x-2)^2}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4}=\frac{x+3}{(x-2)^2}=\frac{2x(x+2)(x+3)}{2x(x+2)(x-2)^2}=\frac{2x(x^2+5x+6)}{2x(x+2)(x-2)^2}=\frac{2x^3+10x^2+12x}{2x(x+2)(x-2)^2}$$

$$\frac{x+1}{2x^2-4x}=\frac{x+1}{2x(x-2)}=\frac{(x+1)(x+2)(x-2)}{2x(x+2)(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x^2-4)}{2x(x+2)(x-2)^2}=\frac{x^3+x^2-4x-4}{2x(x+2)(x-2)^2}$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 61

22. Realiza las siguientes operaciones de fracciones algebraicas y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}-\frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2+6x+9}{(x+3)(x-3)}-\frac{x^2-6x+9}{(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{x^2+6x+9-x^2+6x-9}{(x+3)(x-3)}=\frac{12x}{(x+3)(x-3)}$

b) $\frac{x}{x^2-4x+4}+\frac{2x-1}{x^2-4}=\frac{x}{(x-2)^2}+\frac{2x-1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}+\frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)}=$

$=\frac{x^2+2x}{(x-2)^2(x+2)}+\frac{2x^2-4x-x+2}{(x-2)^2(x+2)}=\frac{x^2+2x+2x^2-4x-x+2}{(x-2)^2(x+2)}=\frac{3x^2-3x+2}{(x-2)^2(x+2)}$

c) $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{x+1}{x(x-1)}-\frac{x}{(x+1)(x-1)}+\frac{x-1}{x(x+1)}=$

$=\frac{(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)}-\frac{x^2}{x(x+1)(x-1)}+\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2+x^2-2x+1}{x(x-1)(x+1)}=$

$=\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)}$

d) $\frac{x^2+x}{2x-1}\cdot\frac{4x^2-4x+1}{3x^3-6x^2}=\frac{x(x+1)}{2x-1}\cdot\frac{(2x-1)^2}{3x^2(x-1)}=\frac{x(x+1)(2x-1)^2}{3x^2(x-1)(2x-1)}=\frac{(x+1)(2x-1)}{3x(x-1)}$

e) $\frac{x-2}{3x-1}:\frac{x^2-4}{9x^2-1}=\frac{x-2}{3x-1}:\frac{(x+2)(x-2)}{(3x+1)(3x-1)}=\frac{(x-2)(3x+1)(3x-1)}{(3x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{3x-1}{x+2}$

f) $\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}-2x=\frac{2x^2}{x^3}+\frac{4x}{x^3}-\frac{3}{x^3}-\frac{2x^4}{x^3}=\frac{2x^2+4x-3-2x^4}{x^3}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGINAS 64-66

POLINOMIOS

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $5x^2y+2y-7x^2y+x+\frac{3}{4}x^2y-3y=5x^2y-7x^2y+\frac{3}{4}x^2y+x+2y-3y=-\frac{5}{4}x^2y+x-y$

b) $2x\cdot\left(-3x^2yz\right)\cdot\left(\frac{5}{6}x^3yz^2\right)=-\frac{2\cdot3\cdot5}{6}x\cdot x^2yz\cdot x^3yz^2=-5x^6y^2z^3$

c) $\frac{-3a\cdot\left(a^4b\right)+5a^4b}{-2ab^3}=\frac{-3a^5b+5a^4b}{-2ab^3}=\frac{a^4b(-3a+5)}{-2ab^3}=\frac{a^3(-3a+5)}{-2b^2}$

d) $\dfrac{-3xy^2\cdot\left(-2x^3y\right)}{8x^3y^2}=\dfrac{6x^4y^3}{8x^3y^2}=\dfrac{3xy}{4}$

2. Dado el polinomio $P(x)=-x^3-x^2+x-3$, evalúa el polinomio en $x=1$; $x=-1$; $x=-2$; $x=2$; $x=-3$.

- $x=1\Rightarrow P(1)=-1^3-1^2+1-3=-1-1+1-3=-4$
- $x=-1\Rightarrow P(-1)=-(-1)^3-(-1)^2+(-1)-3=1-1-1-3=-4$
- $x=-2\Rightarrow P(-2)=-(-2)^3-(-2)^2+(-2)-3=8-4-2-3=-1$
- $x=2\Rightarrow P(2)=-2^3-2^2+2-3=-8-4+2-3=-13$
- $x=-3\Rightarrow P(-3)=-(-3)^3-(-3)^2+(-3)-3=27-9-3-3=12$

3. Escribe un polinomio de grado 5 que verifique simultáneamente:
- **El coeficiente líder es 2.**
- **El término independiente es -1.**
- **El coeficiente de grado 2 es 1.**
- **No tiene término de grado 4.**

Podemos escribir cualquier polinomio de la forma: $P(x)=2x^5+ax^3+x^2+bx-1$. El más sencillo de todos ellos, haciendo $a=b=0$ es $P(x)=2x^5+x^2-1$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

4. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $\left(x^3-5x^2+3x\right)+\left(2x^2+3x+1\right)-\left(5x^3-4x^2-x\right)=$
$=x^3-5x^2+3x+2x^2+3x+1-5x^3+4x^2+x=-4x^3+x^2+7x+1$

b) $2x\cdot\left(x^2-2x-3\right)-x\cdot(3x-1)\cdot(x-3)=2x^3-4x^2-6x-\left(3x^2-x\right)\cdot(x-3)=$
$=2x^3-4x^2-6x-3x^3+9x^2+x^2-3x=-x^3+6x^2-9x$

c) $(x-2)\cdot\left(2x-x^2\right)-x\cdot(x-2)=2x^2-x^3-4x+2x^2-x^2+2x=-x^3+3x^2-2x$

d) $1-x+x\cdot\left(x^2-3x\right)\cdot(x+2)+(x-2)\cdot\left(3-x^2\right)=$
$=1-x+x\cdot\left(x^3+2x^2-3x^2-6x\right)+3x-x^3-6+2x^2=$
$=1-x+x^4+2x^3-3x^3-6x^2+3x-x^3-6+2x^2=x^4-2x^3-4x^2+2x-5$

5. Dados los polinomios: $P(x)=x^2-3x-1$, $Q(x)=2x^3+3x$, $R(x)=x^2-2x+1$ y $S(x)=x-3$, calcula:

a) $P(x)+Q(x)-R(x)=x^2-3x-1+2x^3+3x-\left(x^2-2x+1\right)=$
$=x^2-3x-1+2x^3+3x-x^2+2x-1=2x^3+2x-2$

b) $Q(x)-P(x)\cdot S(x)=2x^3+3x-\left(x^2-3x-1\right)\cdot\left(x-3\right)=$

$=2x^3+3x-x^3+3x^2+3x^2-9x+x-3=x^3+6x^2-5x-3$

c) $P(x)\cdot R(x)-Q(x)\cdot S(x)=\left(x^2-3x-1\right)\cdot\left(x^2-2x+1\right)-\left(2x^3+3x\right)\cdot\left(x-3\right)=$

$=x^4-2x^3+x^2-3x^3+6x^2-3x-x^2+2x-1-2x^4+6x^3-3x^2+9x=$

$=-x^4+x^3+3x^2+8x-1$

6. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $2x^5-5x^4+9x^3-19x^2+16x+1$ **entre** $2x^2-3x$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^5}-5x^4+9x^3-19x^2+16x+1 & 2x^2-3x \\ \hline
\underline{-\cancel{2x^5}+3x^4} & x^3-x^2+3x-5 \\
\quad -\cancel{2x^4}+9x^3 & \\
\quad \underline{\cancel{2x^4}-3x^3} & \\
\qquad \cancel{6x^3}-19x^2 & \\
\qquad \underline{-\cancel{6x^3}+9x^2} & \\
\qquad\quad -\cancel{10x^2}+16x & \\
\qquad\quad \underline{\cancel{10x^2}-15x} & \\
\qquad\qquad\quad x+1 &
\end{array}$$

b) $4x^4-13x^3+25x^2-11x+10$ **entre** $4x^2-x+2$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{4x^4}-13x^3+25x^2-11x+10 & 4x^2-x+2 \\ \hline
\underline{-\cancel{4x^4}+x^3-2x^2} & x^2-3x+5 \\
\quad -\cancel{12x^3}+23x^2-11x & \\
\quad \underline{+\cancel{12x^3}-3x^2+6x} & \\
\qquad \cancel{20x^2}-\cancel{5x}+\cancel{10} & \\
\qquad \underline{-\cancel{20x^2}+\cancel{5x}-\cancel{10}} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

c) $2x^5-3x^4+4x^3-12x^2+11x-1$ **entre** $-2x^2+3x$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^5}-\cancel{3x^4}+4x^3-12x^2+11x-1 & -2x^2+3x \\ \hline
\underline{-\cancel{2x^5}+\cancel{3x^4}} & -x^2-2x+3 \\
\qquad \cancel{4x^3}-12x^2 & \\
\qquad \underline{-\cancel{4x^3}+6x^2} & \\
\qquad\quad -\cancel{6x^2}+11x & \\
\qquad\quad \underline{+\cancel{6x^2}-9x} & \\
\qquad\qquad\quad 2x-1 &
\end{array}$$

IDENTIDADES NOTABLES

7. Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones:

a) $\left(x+5\right)^2=x^2+10x+25$

b) $\left(x-4\right)^2=x^2-8x+16$

c) $\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9$

d) $(3x+2)\cdot(3x-2)=9x^2-4$

e) $(-x+8)\cdot(x+8)=-x^2+64$

f) $(x-2)\cdot(2-x)=-(x-2)\cdot(x-2)=-(x-2)^2=-\left(x^2-4x+4\right)=-x^2+4x-4$

8. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

a) $(3x-2)^2=9x^2-12x+4$

b) $(-3x+5)^2=9x^2-30x+25$

c) $\left(2x^2+x^3\right)^2=4x^4+4x^5+x^6$

d) $\left(5x-6x^3\right)^2=25x^2-60x^4+36x^6$

e) $(-2x-3)^2=4x^2+12x+9$

f) $(-3x-4)\cdot(3x+4)=-(3x+4)\cdot(3x+4)=-(3x+4)^2=-9x^2-24x-16$

g) $\left(3x^2-4x\right)\cdot\left(4x+3x^2\right)=\left(3x^2-4x\right)\cdot\left(3x^2+4x\right)=9x^4-16x^2$

h) $\left(3x^2+5x\right)\cdot\left(-5x+3x^2\right)=\left(3x^2+5x\right)\cdot\left(3x^2-5x\right)=9x^4-25x^2$

9. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

a) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$

b) $\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2=9x^2+\frac{12}{3}x+\frac{4}{9}=9x^2+4x+\frac{4}{9}$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x\right)^2=\frac{4}{9}x^6-\frac{12}{12}x^4+\frac{9}{16}x^2=\frac{4}{9}x^6-x^4+\frac{9}{16}x^2$

d) $\left(-\frac{x}{2}+2\right)\cdot\left(2+\frac{x}{2}\right)=\left(2-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(2+\frac{x}{2}\right)=4-\frac{x^2}{4}$

e) $\left(-\frac{3}{2}x+1\right)^2=\frac{9}{4}x^2-\frac{6}{2}x+1=\frac{9}{4}x^2-3x+1$

f) $\left(\frac{3}{4}x^3-3x^2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x^3+3x^2\right)=\frac{9}{16}x^6-9x^4$

10. Opera y simplifica utilizando las identidades notables:

a) $(x-2)^2+(x-2)\cdot(x+2)=x^2-4x+4+x^2-4=2x^2-4x$

b) $(3x+1)^2-(2x+3)\cdot(2x-3)=9x^2+6x+1-4x^2+9=5x^2+6x+10$

c) $(2x+5)\cdot(-5+2x)-(2x+1)^2=(2x+5)\cdot(2x-5)-\left(4x^2+4x+1\right)=$

$= 4x^2 - 25 - 4x^2 - 4x - 1 = -4x - 26$

d) $(-2x+5)^2 - (x+3)^2 - (2x+1)\cdot(2x-1) = 4x^2 - 20x + 25 - \left(x^2 + 6x + 9\right) - \left(4x^2 - 1\right) =$

$= 4x^2 - 20x + 25 - x^2 - 6x - 9 - 4x^2 + 1 = -x^2 - 26x + 17$

e) $-2x + x\cdot(3x-4)\cdot(3x+4) - (2-x)^2 = -2x + x\cdot\left(9x^2 - 16\right) - \left(4 - 4x + x^2\right) =$

$= -2x + 9x^3 - 16x - 4 + 4x - x^2 = +9x^3 - x^2 - 14x - 4$

f) $(3x-1)^2 - \left(5x^2 - 3x\right)^2 - \left(x + 2x^2\right)\cdot\left(2x^2 - x\right) =$

$= 9x^2 - 6x + 1 - \left(25x^4 - 30x^3 + 9x^2\right) - \left(4x^4 - x^2\right) =$

$= 9x^2 - 6x + 1 - 25x^4 + 30x^3 - 9x^2 - 4x^4 + x^2 = -29x^4 + 30x^3 + x^2 - 6x + 1$

11. Expresa en forma de producto o de cuadrado utilizando las identidades notables:

a) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

b) $9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$

c) $4x^2 - 1 = (2x+1)\cdot(2x-1)$

d) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = \left(x^2 - 3x\right)^2$

e) $x^4 - 9 = \left(x^2 + 3\right)\cdot\left(x^2 - 3\right)$

f) $x^4 - 6x^2 + 9 = \left(x^2 - 3\right)^2$

g) $\dfrac{x^2}{4} - x + 1 = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^2$

h) $81 - 4x^2 = (9-2x)\cdot(9+2x)$

i) $x^4 + 6x^2 + 9 = \left(x^2 + 3\right)^2$

j) $25x^4 - 15x^3 + 9x^2 = \left(5x^2 - 3x\right)^2$

12. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $-4x + 6x^4 + 12x^3 = 2x\left(-2 + 3x^3 + 4x^2\right)$

b) $9ab^2 - 6a^3b + 18a^4b^3 = 3ab\left(3b - 2a^2 + 6a^3b^2\right)$

c) $12x^2 + 4x^3 - 8x^4 = 4x^2\left(3 + x - 2x^2\right)$

d) $-4a(a+4) + 6a^2(a+4)^2 + 8a(a+4) = 2a(a+4)\left(-2 + 3a(a+4) + 4\right) =$

$= 2a(a+4)\left(3a^2 + 12a + 2\right)$

e) $\dfrac{3(x+1)}{4} - \dfrac{15}{2}x(x+1)^2 = \dfrac{3}{2}(x+1)\left(\dfrac{1}{2} - 5(x+1)\right) = \dfrac{3}{2}(x+1)\left(-5x - \dfrac{9}{2}\right)$

f) $12b(a+b) - 4a(a+b) + 8(a+b) = (12b - 4a + 8)(a+b)$

REGLA DE RUFFINI

13. Utiliza la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones:

a) $(x^4-1):(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto, la división es igual a $(x^4-1):(x-1)=x^3+x^2+x+1$ y el resto $R=0$.

b) $(x^4-2x^3+3x-5):(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & +3 & -5 \\ 2 & & +2 & 0 & 0 & +6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & +3 & \boxed{+1} \end{array}$$

Por tanto, la división es igual a $(x^4-2x^3+3x-5):(x-2)=x^3+3$ y el resto $R=+1$.

c) $(-6x^4+3x^2+7x-10):(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -6 & 0 & +3 & +7 & -10 \\ -3 & & +18 & -54 & +153 & -480 \\ \hline & -6 & +18 & -51 & +160 & \boxed{-490} \end{array}$$

Por tanto, la división es igual a $(-6x^4+3x^2+7x-10):(x+3)=-6x^3+18x^2-51x+160$ y el resto $R=-490$.

d) $(x^4-x^3-4x^2-4x+2):(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -4 & -4 & +2 \\ -3 & & -3 & +12 & -24 & +84 \\ \hline & 1 & -4 & +8 & -28 & \boxed{+86} \end{array}$$

Por tanto, la división es igual a $(x^4-x^3-4x^2-4x+2):(x+3)=x^3-4x^2+8x-28$ y el resto $R=+86$.

e) $(-x^5+4x):(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -1 & 0 & 0 & 0 & +4 & 0 \\ -1 & & +1 & -1 & +1 & -1 & -3 \\ \hline & -1 & +1 & -1 & +1 & +3 & \boxed{-3} \end{array}$$

Por tanto, la división es igual a $(-x^5+4x):(x+1)=-x^4+x^3-x^2+x+3$ y el resto $R=-3$.

f) $(2x^5-3x^3+4x^2):(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 0 & -3 & +4 & 0 & 0 \\ -1 & & -2 & +2 & +1 & -5 & +5 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & +5 & -5 & \boxed{+5} \end{array}$$

Por tanto, la división es igual a $\left(2x^5-3x^3+4x^2\right):\left(x+1\right)=2x^4-2x^3-x^2+5x-5$ con resto igual a $R=+5$.

g) $\left(x^7-8x^6-3x^3+7x^2+6x\right):\left(x-3\right)$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & -8 & 0 & 0 & -3 & 7 & 6 & 0 \\ 3 & & 9 & 3 & 9 & 27 & 72 & 237 & 729 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & 9 & 24 & 79 & 243 & \boxed{729} \end{array}$$

Por tanto, el cociente de la división es $3x^6+x^5+3x^4+9x^3+24x^2+79x+243$ y el resto es igual a $R=729$.

RAÍCES DE UN POLINOMIO. TEOREMA DEL RESTO.

14. Determina el resto de las siguientes divisiones sin realizar la división:

a) $\left(-2x^5-6x^4+3x^2+7x-10\right):\left(x+2\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(-2)$

$P(-2)=-2\cdot\left(-2\right)^5-6\cdot\left(-2\right)^4+3\cdot\left(-2\right)^2+7\cdot\left(-2\right)-10=64-96-12-14-10=-68$

b) $\left(3x^4+5x^3-4x^2-4x+2\right):\left(x+1\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(-1)$

$P\left(-1\right)=3\left(-1\right)^4+5\left(-1\right)^3-4\left(-1\right)^2-4\left(-1\right)+2=3-5-4+4+2=0$

c) $\left(-x^5+3x\right):\left(x+2\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(-2)$

$P\left(-2\right)=-\left(-2\right)^5+3\left(-2\right)=+32-6=+26$

d) $\left(2x^5-3x^3+4x^2\right):\left(x+1\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(-1)$

$P\left(-1\right)=2\left(-1\right)^5-3\left(-1\right)^3+4\left(-1\right)^2=-2+3+4=+5$

15. Determina el valor de a para que el resto de la división sea cero:

a) $\left(-x^4-4x^3-4x+a\right):\left(x+2\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(-2)$

$P\left(-2\right)=-\left(-2\right)^4-4\left(-2\right)^3-4\left(-2\right)+a=-16+32+8+a=24+a=0\Leftrightarrow a=-24$

b) $\left(3x^4+5x^3-4x^2-4x+2\right):\left(x+1\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(-1)$

$P\left(-1\right)=3\left(-1\right)^4+5\left(-1\right)^3-4\left(-1\right)^2-4\left(-1\right)+2=3-5-4+4+2=0$ y por tanto el resto de la división es cero.

c) $\left(ax^4-8x^3+4x-4\right):\left(x-2\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(2)$

$P\left(2\right)=a\cdot 2^4-8\cdot 2^3+4\cdot 2-4=16a-64+8-4=16a-60$

Por tanto, el resto de la división es cero si $16a+60=0$. Resolviendo la ecuación, se tiene que:

$$16a+60=0 \Leftrightarrow 16a=-60 \Leftrightarrow a=-\frac{60}{16} \Leftrightarrow a=-\frac{15}{4}$$

16. **Determina el valor de a para que el resto de la división sea -1.** $\left(-ax^3+9x^2+2x-6\right):\left(x-3\right)$

Aplicando el Teorema del Resto, el resto de la división coincide con $P(3)$

$$P\left(3\right)=-a\cdot 3^3+9\cdot 3^2+2\cdot 3-6=-27a+81=0 \Leftrightarrow -27a=-81 \Leftrightarrow a=\frac{81}{27} \Leftrightarrow a=3$$

17. **Determina el valor de a para que el polinomio $P\left(x\right)=-x^4+x^3+a\,x^2+2x-4$ verifique que $P\left(-2\right)=0$.**

Al evaluar el polinomio, se obtiene:

$P\left(-2\right)=-\left(-2\right)^4+\left(-2\right)^3+a\cdot\left(-2\right)^2+2\cdot\left(-2\right)-4=-16-8+4a-4-4=4a-32$

Para que $P\left(-2\right)=0$ tiene que ocurrir, por tanto:

$$4a-32=0 \Leftrightarrow 4a=32 \Leftrightarrow a=\frac{32}{4} \Leftrightarrow a=8$$

18. **Determina el polinomio de grado 3 que verifica:**

$P\left(-1\right)=P\left(2\right)=P\left(-3\right)=0$

$P\left(-2\right)=8$

De la condición $P\left(-1\right)=P\left(2\right)=P\left(-3\right)=0$, se tiene que $\left(x+1\right)$, $\left(x-2\right)$ y $\left(x+3\right)$ son factores de $P\left(x\right)$. Por tanto, el polinomio debe ser de la forma $P\left(x\right)=k\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)$.

La segunda condición afirma que $P\left(-2\right)=8$ y por tanto:

$P\left(-2\right)=k\left(-2+1\right)\left(-2-2\right)\left(-2+3\right)=k\cdot\left(-1\right)\cdot\left(-4\right)\cdot\left(+1\right)=4k=8$

de lo que se extrae que $k=2$, de modo que el polinomio buscado es:

$P\left(x\right)=2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)$

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

19. **Extrae factor común y utiliza las identidades notables para descomponer los siguientes polinomios:**

a) $2x^3-4x^2+2x=2x\left(x^2-2x+1\right)=2x\left(x-1\right)^2$

b) $24x^3+24x^2+6x=6x\left(4x^2+4x+1\right)=6x\left(2x+1\right)^2$

c) $3x^6-54x^4+243x^2=3x^2\left(x^4-18x^2+81\right)=3x^2\left(x^2-9\right)^2=3x^2\left(x+9\right)^2\left(x-9\right)^2$

d) $8x^5-8x^3+2x=2x\left(4x^4-4x^2+1\right)=2x\left(2x^2-1\right)$

20. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^5+7x^4+16x^3+12x^2$

En primer lugar sacamos factor común: $x^5+7x^4+16x^3+12x^2=x^2\left(x^3+7x^2+16x+12\right)$

Los candidatos a raíces de $P(x)=x^3+7x^2+16x+12$ son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

Probando, se tiene que $P(-2)=(-2)^3+7\cdot(-2)^2+16\cdot(-2)+12=0$ y dividiendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +7 & +16 & +12 \\
-2 & & -2 & -10 & -12 \\
\hline
 & 1 & +5 & +6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -6 & \\
\hline
 & 1 & +3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Por tanto, la descomposición del polinomio es: $x^5+7x^4+16x^3+12x^2=x^2\left(x+2\right)^2\left(x+3\right)$

b) $2x^4-2x^3-8x^2+8x$

En primer lugar, sacamos factor común: $2x^4-2x^3-8x^2+8x=2x\left(x^3-x^2-4x+4\right)$

Los candidatos a raíces de $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ son $\pm1, \pm2, \pm4$.

Probando, se tiene que $P(1)=1-1-4+4=0$ y dividiendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -4 & +4 \\
1 & & 1 & 0 & -4 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0}
\end{array}$$

El cociente es una identidad notable: $x^2-4=(x+2)(x-2)$.

Por tanto, la descomposición del polinomio es:

$2x^4-2x^3-8x^2+8x=2x(x-1)(x+2)(x-2)$

c) $2x^4+11x^3+9x^2-27x-27$

Los candidatos a raíces son $\pm1, \pm3, \pm9, \pm27$.

Probando, se obtiene que $P(-1)=P(-3)=0$ y realizando la división por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & +11 & +9 & -27 & -27 \\
-1 & & -2 & -9 & 0 & +27 \\
\hline
 & 2 & +9 & 0 & -27 & \boxed{0} \\
-3 & & -6 & -9 & +27 & \\
\hline
 & 2 & +3 & -9 & \boxed{0} & \\
-3 & & -6 & +9 & & \\
\hline
 & 2 & -3 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

La descomposición del polinomio es: $2x^4+11x^3+9x^2-27x-27=(x+1)(x+3)^2(2x-3)$

d) $x^5+4x^4-4x^3-16x^2$

En primer lugar, sacamos factor común: $x^5+4x^4-4x^3-16x^2=x^2\left(x^3+4x^2-4x-16\right)$

Los candidatos a raíces de $P(x)=x^3+4x^2-4x-16$ son $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$.

Probando, se tiene que $P(2)=P(-2)=0$ y dividiendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & +4 & -4 & -16 \\
+2 & & +2 & +12 & +16 \\
\hline
 & 1 & +6 & +8 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -8 & \\
\hline
 & 1 & +4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

La descomposición del polinomio es: $x^5+4x^4-4x^3-16x^2=x^2(x-2)(x+2)(x+4)$

e) $2x^4+13x^3+15x^2-x-5$

Los candidatos a raíces de $P(x)=2x^4+13x^3+15x^2-x-5$ son $\pm1, \pm5$.

Probando, se tiene que $P(-1)=P(-5)=0$ y dividiendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 13 & 15 & -1 & -5 \\
-1 & & -2 & -11 & -4 & +5 \\
\hline
 & 2 & 11 & 4 & -5 & \boxed{0} \\
-1 & & -2 & -9 & +5 & \\
\hline
 & 2 & +9 & -5 & \boxed{0} & \\
-5 & & -10 & +5 & & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

La descomposición del polinomio es: $2x^4+13x^3+15x^2-x-5=(x+1)^2(x+5)(2x-1)$

f) $x^4+5x^3+9x^2+7x+2$

Los candidatos a raíces de $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+7x+2$ son $\pm1, \pm2$.

Probando, se tiene que $P(-1)=0$. Podemos dividir varias veces utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +5 & +9 & +7 & +2 \\
-1 & & -1 & -4 & -5 & -2 \\
\hline
 & 1 & +4 & +5 & +2 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -3 & -2 & \\
\hline
 & 1 & +3 & +2 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & +2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

La descomposición del polinomio es: $x^4+5x^3+9x^2+7x+2=(x+1)^3(x+2)$

g) $x^6+6x^5+13x^4+12x^3+4x^2$

En primer lugar, sacamos factor común:

$x^6+6x^5+13x^4+12x^3+4x^2=x^2\left(x^4+6x^3+13x^2+12x+4\right)$

Los candidatos a raíces de $P(x)=x^4+6x^3+13x^2+12x+4$ son $\pm1, \pm2, \pm4$.

Probando, se tiene que $P(-1)=0$. Dividimos usando Ruffini dos veces:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +6 & +13 & +12 & +4 \\
-1 & & -1 & -5 & -8 & -4 \\
\hline
 & 1 & +5 & +8 & +4 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -4 & -4 & \\
\hline
 & 1 & +4 & +4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

El cociente es una identidad notable: $x^2+4x+4=(x+2)^2$ y por tanto la descomposición del polinomio es: $x^6+6x^5+13x^4+12x^3+4x^2=x^2(x+1)^2(x+2)^2$

h) $-x^5+13x^3-36x$

En primer lugar, sacamos factor común: $-x^5+13x^3-36x=x\left(-x^4+13x^2-36\right)$

Los candidatos a raíces de $P(x)=-x^4+13x^2-36$ son los divisores enteros de 36, esto es: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36$.

Probando, se tiene que $P(2)=P(-2)=0$. Dividimos usando Ruffini dos veces:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & 0 & +13 & 0 & -36 \\
+2 & & -2 & -4 & +18 & +36 \\
\hline
 & -1 & -2 & +9 & +18 & \boxed{0} \\
-2 & & +2 & 0 & -18 & \\
\hline
 & -1 & 0 & +9 & \boxed{0} &
\end{array}$$

El cociente es una identidad notable: $-x^2+9=(-x+3)(x+3)$ y por tanto la descomposición del polinomio es: $-x^5+13x^3-36x=x(x-2)(x+2)(-x+9)(x+9)$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

21. Realiza las siguientes sumas de fracciones algebraicas:

a) $$\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x+1}=\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{2x+2-x^2+x}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x^2+3x+2}{(x-1)(x+1)}$$

b) $$\frac{x}{x-2}-\frac{x^2-2}{x^2}=\frac{x^3}{x^2(x-2)}-\frac{(x^2-2)(x-2)}{x^2(x-2)}=\frac{x^3}{x^2(x-2)}-\frac{x^3-2x^2-2x+4}{x^2(x-2)}=$$
$$=\frac{x^3-x^3+2x^2+2x+4}{x^2(x-2)}=\frac{2x^2+2x+4}{x^2(x-2)}=\frac{2(x^2+x+2)}{x^2(x-2)}$$

c) $$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x}{4x^2-4x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x}{(2x-1)^2}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)^2}-\frac{2x}{(2x-1)^2}=$$
$$=\frac{4x^2-1}{(2x-1)^2}-\frac{2x}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-1-2x}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-2x-1}{(2x-1)^2}$$

d) $$\frac{1+x}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{4x}{(x-1)(x+1)}$$

e) $$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{x-1}{4-x^2}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{x-1}{(2-x)(2+x)}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}=$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-1}{(x-2)(2+x)}=$$
$$=\frac{x^2-2x-x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-1}{(x-2)(2+x)}=\frac{x^2-3x+2-x^2+4x-4+x-1}{(x-2)(x+2)}=$$
$$=\frac{2x-3}{(x-2)(x+2)}$$

f) $$\frac{x-1}{x^3}-\frac{2x-1}{x}+x=\frac{x-1}{x^3}-\frac{x^2(2x-1)}{x^3}+\frac{x^4}{x^3}=\frac{x-1-2x^3+x^2+x^4}{x^3}=\frac{x^4-2x^3+x^2+x-1}{x^3}$$

22. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $$\frac{2-x}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{1-x}{x^3}=\frac{x^2(2-x)}{x^3}+\frac{x(x+1)}{x^3}-\frac{1-x}{x^3}=\frac{2x^2-x^3+x^2+x-1+x}{x^3}=$$
$$=\frac{-x^3+3x^2+2x-1}{x^3}$$

b) $$\frac{x-1}{x+2}+\frac{2x+3}{x-2}-\frac{x}{x^2-4}=\frac{x-1}{x+2}+\frac{2x+3}{x-2}-\frac{x}{(x+2)(x-2)}=$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{(2x+3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x}{(x+2)(x-2)}=$$
$$=\frac{x^2-2x-x+2}{(x+2)(x-2)}+\frac{2x^2+4x+3x+6}{(x+2)(x-2)}-\frac{x}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-3x+2+2x^2+7x+6-x}{(x+2)(x-2)}=$$
$$=\frac{3x^2+3x+8}{(x+2)(x-2)}$$

c) $$\frac{x}{x+2}-\frac{x-2}{x^2+2x}-\frac{1}{x}=\frac{x}{x+2}-\frac{x-2}{x(x+2)}-\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x(x+2)}-\frac{x-2}{x(x+2)}-\frac{x+2}{x(x+2)}=$$
$$=\frac{x^2-x+2-x-2}{x(x+2)}=\frac{x^2-2x}{x(x+2)}=\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}$$

d) $$\frac{x+3}{2x-1}-\frac{x+2}{2x+1}=\frac{(x+3)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{(x+2)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{2x^2+x+6x+3}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{2x^2-x+4x-2}{(2x-1)(2x+1)}=$$
$$=\frac{2x^2+x+6x+3-2x^2+x-4x+2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{4x+5}{(2x-1)(2x+1)}$$

e) $\frac{2x}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}+\frac{x-5}{x^2-9}=\frac{2x}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}+\frac{x-5}{(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{2x(x+3)}{(x+3)(x-3)}-\frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)}+\frac{x-5}{(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{2x^2+6x}{(x+3)(x-3)}-\frac{x^2-6x+9}{(x+3)(x-3)}+\frac{x-5}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x^2+6x-x^2+6x-9-x+5}{(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{x^2+11x-4}{(x+3)(x-3)}$

f) $\frac{2x+1}{x-3}-\frac{x+3}{x}+\frac{3x^2-1}{x^2-9}=\frac{2x+1}{x-3}-\frac{x+3}{x}+\frac{3x^2-1}{(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{x(x+3)(2x+1)}{x(x+3)(x-3)}-\frac{(x+3)^2(x-3)}{x(x+3)(x-3)}+\frac{x(3x^2-1)}{x(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{2x^3+x^2+6x^2+3x}{x(x+3)(x-3)}-\frac{(x^2+6x+9)(x-3)}{x(x+3)(x-3)}+\frac{3x^3-x}{x(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{2x^3+7x^2+3x}{x(x+3)(x-3)}-\frac{x^3-3x^2+6x^2-18x+9x-27}{x(x+3)(x-3)}+\frac{3x^3-x}{x(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{2x^3+7x^2+3x-x^3+3x^2-6x^2+18x-9x+27+3x^3-x}{x(x+3)(x-3)}=\frac{4x^3+4x^2+11x+27}{x(x+3)(x-3)}$

g) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x^3-x}-\frac{5x}{x+1}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{x(x+1)(x-1)}-\frac{5x}{x+1}=$

$=\frac{2x}{x(x+1)(x-1)}+\frac{2}{x(x+1)(x-1)}-\frac{5x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{2x}{x(x+1)(x-1)}+\frac{2}{x(x+1)(x-1)}-\frac{5x^3-5x^2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{-5x^3+5x^2+2x+2}{x(x+1)(x-1)}$

h) $\frac{-1}{4x^2+4x+1}-\frac{2-5x}{6x-3}=\frac{-1}{(2x+1)^2}-\frac{2-5x}{3(2x-1)}=\frac{-3(2x-1)}{3(2x-1)(2x+1)^2}-\frac{(2-5x)(2x+1)^2}{3(2x-1)(2x+1)^2}=$

$=\frac{-6x+3}{3(2x-1)(2x+1)^2}-\frac{(2-5x)(4x^2+4x+1)}{3(2x-1)(2x+1)^2}=$

$=\frac{-6x+3}{3(2x-1)(2x+1)^2}-\frac{8x^2+8x+2-20x^3-20x^2-5x}{3(2x-1)(2x+1)^2}=$

$=\frac{-6x+3-8x^2-8x-2+20x^3+20x^2+5x}{3(2x-1)(2x+1)^2}=\frac{+20x^3+12x^2-9x+1}{3(2x-1)(2x+1)^2}$

23. Opera y simplifica si es posible:

a) $\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x+1}{x^2-2x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}\cdot\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

b) $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

c) $\frac{2x-1}{x^2-3x}:\frac{4x^2-4x+1}{x^2-6x+9}=\frac{2x-1}{x(x-3)}:\frac{(2x-1)^2}{(x-3)^2}=\frac{(2x-1)(x-3)^2}{x(x-3)(2x-1)^2}=\frac{x-3}{x(2x-1)}$

d) $\frac{x-2}{2x^4-4x^3}:\frac{2x-4}{5x^3-3x^2}=\frac{x-2}{2x^3(x-2)}:\frac{2(x-2)}{x^2(5x-3)}=\frac{x^2(5x-3)(x-2)}{4x^3(x-2)^2}=\frac{5x-3}{4x(x-2)}$

e) $\frac{a-b}{b+a}\cdot\frac{a^2-b^2}{6a-2b}=\frac{a-b}{b+a}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{2(3a-b)}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{2(3a-b)(b+a)}=\frac{(a-b)^2}{2(3a-b)}$

f) $\frac{-4ab^3-2b^4}{a^2-ab}:\frac{2ab^2+b^3}{a^2-b^2}=\frac{-2b^3(2a+b)}{a(a-b)}:\frac{b^2(2a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{-2b(a+b)}{a}$

24. Opera y simplifica:

a) $x-\frac{1}{x+1}:\frac{x-1}{x^2+x}=x-\frac{1}{x+1}:\frac{x-1}{x(x+1)}=x-\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=x-\frac{x}{x-1}=\frac{x^2-2x}{x-1}$

b) $\frac{2}{x}-\frac{x}{3}:\frac{x-6}{x^2-x}=\frac{2}{x}-\frac{x}{3}:\frac{x-6}{x(x-1)}=\frac{2}{x}-\frac{x^2(x-1)}{3(x-6)}=\frac{6(x-6)}{3x(x-6)}-\frac{x^3(x-1)}{3x(x-6)}=$

$=\frac{6x-36}{3x(x-6)}-\frac{x^4-x^3}{3x(x-6)}=\frac{6x-36-x^4+x^3}{3x(x-6)}$

c) $\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^4-5x^3}=\frac{x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^3(x-5)}=\frac{x(x-1)^2}{x^3(x+1)(x-1)(x-5)}=\frac{x-1}{x^2(x+1)(x-5)}$

d) $\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2-x-2}:\frac{x}{x^2-4}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{(x+1)(x-2)}:\frac{x}{(x+2)(x-2)}=$

$=\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+1)(x-2)}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{x+2}{x(x+1)}=$

$=\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+1)(x-1)(x+2)}=$

$=\frac{x^2+x}{x(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{(x-1)(x^2+4x+4)}{x(x+1)(x-1)(x+2)}=$

$=\frac{x^2+x}{x(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4}{x(x+1)(x-1)(x+2)}=$

$=\frac{x^2+x-x^3-4x^2-4x+x^2+4x+4}{x(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{-x^3-2x^2+x+4}{x(x+1)(x-1)(x+2)}$

e) $$\frac{x-2}{x^3-4x}-\frac{5x}{x+2}:\frac{x-2}{3x+1}=\frac{x-2}{x(x+2)(x-2)}-\frac{5x(3x+1)}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{x-2}{x(x+2)(x-2)}-\frac{5x^2(3x+1)}{x(x+2)(x-2)}=\frac{x-2-15x^3-5x^2}{x(x+2)(x-2)}=\frac{-15x^3-5x^2+x-2}{x(x+2)(x-2)}$$

f) $$\frac{x-3}{x-2}-\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}+\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2+2x-3x-6}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}+\frac{x^2-2x+x-2}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2+2x-3x-6-x-1+x^2-2x+x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x^2-3x-9}{(x+2)(x-2)}$$

g) $$\frac{x}{x-2}+\frac{x+3}{2x^2-5x+2}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}=\frac{x}{x-2}+\frac{x+3}{(x-2)(2x-1)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}=$$

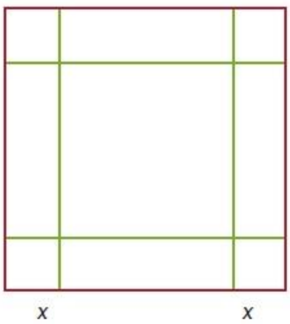
$$=\frac{x(x-2)(2x-1)}{(x-2)^2(2x-1)}+\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)^2(2x-1)}-\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-2)^2(2x-1)}=$$

$$=\frac{2x^3-5x^2+2x}{(x-2)^2(2x-1)}+\frac{x^2-2x+3x-6}{(x-2)^2(2x-1)}-\frac{2x^2-x-2x+1}{(x-2)^2(2x-1)}=$$

$$=\frac{2x^3-5x^2+2x+x^2-2x+3x-6-2x^2+x+2x-1}{(x-2)^2(2x-1)}=\frac{2x^3-6x^2+6x-7}{(x-2)^2(2x-1)}$$

PROBLEMAS

25. Con un cartón cuadrado de 1m de lado se pretende construir una caja, de altura x, recortando las esquinas y doblando como se muestra en la figura.



Expresa mediante lenguaje algebraico el área de la caja y el volumen de ésta.

En primer lugar, notemos que la longitud del lado de la caja será $1-2x$.

El área de la caja puede calcularse como la suma del área del cuadrado que forma la base A_B y de cada una de las paredes laterales A_P (ya que por su diseño carece de tapa):

$$A_{caja}=A_B+4A_P=(1-2x)^2+4x(1-2x)=1-4x+4x^2+4x-8x^2=1-4x^2$$

En cuanto al volumen, podemos calcularlo como el área de su base por su altura:

$$V_{caja}=A_B\cdot h=(1-2x)\cdot x=x-2x^3$$

26. Álvaro ha hecho los ejercicios de matemáticas, pero cuando iba al instituto se encuentra con que la libreta se ha manchado y tapa la solución de uno de los ejercicios. El polinomio que había escrito, según Álvaro, cumplía las siguientes condiciones:

- **Era de grado 2**
- **Era divisible entre $x+3$.**
- **1 era raíz.**
- **El resto de dividir el polinomio entre $x+5$ era 10.**

¿Podrías encontrar el polinomio y ayudar a Álvaro?

Las tres primeras condiciones nos permiten afirmar que el polinomio tenía la siguiente forma: $P(x)=a(x-1)(x+3)$ donde $a\in\mathbb{R}$.

Aplicando el Teorema del Resto a la última de las condiciones, sabemos que $P(-5)=10$.

Puesto que $P(-5)=a(-5-1)(-5+3)=12a$, podemos concluir que $12a=10 \Rightarrow a=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

El polinomio perdido es, por tanto:

$$P(x)=\frac{5}{6}(x-1)(x+3)=\frac{5}{6}(x^2+3x-x-3)=\frac{5}{6}(x^2+2x-3)=\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{3}x-\frac{5}{2}$$

27. Expresa en lenguaje algebraico la siguiente afirmación: "La edad que tenía hace 5 años es la mitad de la edad que tendré dentro de 6".

Llamando x a la edad actual, hace 5 años tenía $x-5$ y dentro de 6 tendré $x+6$. Así:

$$x-5=\frac{1}{2}(x+6)$$

DESAFÍO PISA - PÁG. 67

POTENCIA FISCAL DE UN VEHÍCULO

La potencia fiscal de un vehículo se utiliza para determinar el impuesto de vehículos de tracción mecánica. El cálculo de la potencia fiscal del vehículo viene determinado en el anexo V del Reglamento General de Vehículos, aprobado por el R. D. 2822/1998, de 23 de diciembre.
Para motores de combustión, la fórmula es:

$$CVF=P\cdot N\cdot\left(0,785\cdot D^2\cdot R\right)^{0,6}$$

Siendo:

- N **: el número de cilindros.**
- D **: el diámetro del cilindro en cm.**
- R **: el recorrido del pistón en cm.**
- P **: una constante adimensional que toma el valor:**
  - **0,08 para motores de 4 tiempos.**
  - **0,11 para motores de 2 tiempos.**

El volumen de un cilindro será: $V=\pi\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot R=0,785\cdot D^2\cdot R=\frac{C}{N}$

Donde C es la cilindrada del vehículo.
Conociendo la cilindrada del vehículo y el número de cilindros podemos calcular la potencia fiscal.
La potencia fiscal la podemos encontrar en kW, que es la medida en el Sistema Internacional de Unidades.

Para hacer el cambio de unidades, tendremos en cuenta que 1 CV = 0,735 kW.

Actividad 1: La potencia fiscal de un vehículo de 4 tiempos de 1800 cm^3 y 6 cilindros es de:

A: $14,71\,CVF$ ya que, aplicando la fórmula: $CVF = P \cdot N \cdot V^{0,6} = 0,08 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1800}{6}\right)^{0,6} \approx 14,71$

Actividad 2: Un coche con motor 4 tiempos de 6 cilindros tiene una potencia fiscal de 13,18 CVF; la cilindrada del vehículo es aproximadamente de:

C: 1500 cm^3 ya que, aplicando la fórmula: $CVF = P \cdot N \cdot V^{0,6} = 0,08 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1500}{6}\right)^{0,6} \approx 13,18$

Actividad 3: Un vehículo con potencia fiscal 11,54 kW tiene una potencia fiscal en caballos de vapor de:

B: 15,7 CVF ya que $11,54\,kW = 11,54 : 0,735 = 15,7\,CV$

Actividad 4: Un ciclomotor de 2 tiempos tiene una potencia fiscal de 1,14 CVF; la cilindrada del ciclomotor es de:

B: 49 cm^3 ya que, aplicando la fórmula, tendremos que $CVF = P \cdot N \cdot V^{0,6} = 0,11 \cdot 6 \cdot (49)^{0,6} \approx 1,14$ (un ciclomotor tiene un motor de un solo cilindro).

Actividad 5: Si en mi pueblo se paga a 8,42 € el CVF, por mi coche de 1 500 cm^3 y 4 cilindros debo pagar:

B: 94,38 € ya que al aplicar la fórmula con motores de 2 y 4 tiempos, esta es la única opción que cuadra.

$CVF \cdot 8,42 = P \cdot N \cdot V^{0,6} \cdot 8,42 = 0,08 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1500}{4}\right)^{0,6} \cdot 8,42 \approx 94,38\,€$.