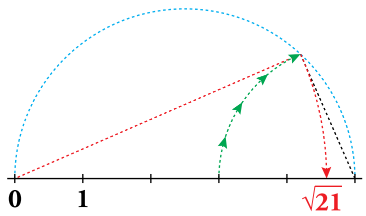
2 Números reales: la recta real

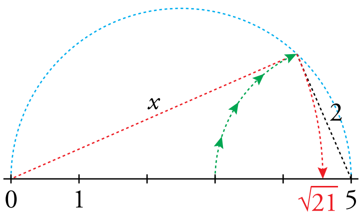
Página 41

1. a) Justifica que el punto representado es $\sqrt{21}$.



b) Representa $\sqrt{27}$ $(27 = 36 - 9)$ y $\sqrt{40}$ $(40 = 36 + 4)$.

a)

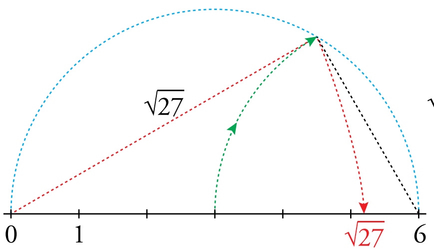


Aplicando Pitágoras:

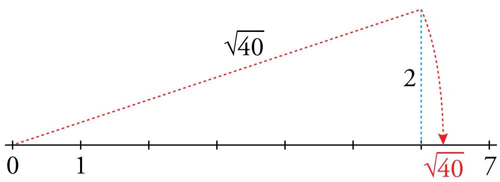
$5^2 = x^2 + 2^2$

$25 = x^2 + 4 \rightarrow x^2 = 25 - 4 = 21 \rightarrow x = \sqrt{21}$

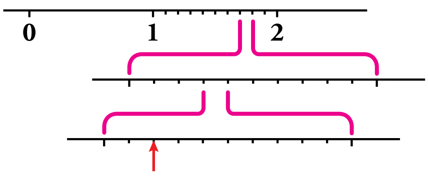
b)



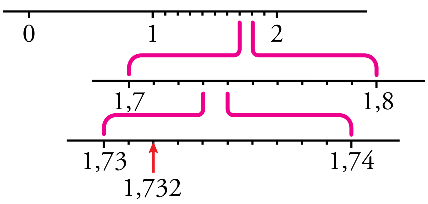
$\sqrt{27} = \sqrt{6^2 - 3^2}$

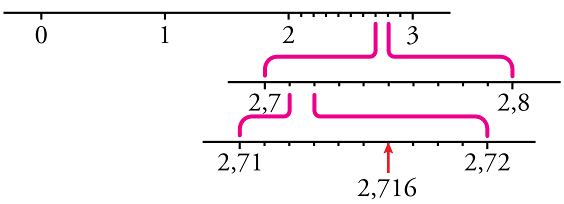


2. ¿Qué número es el que hemos señalado con una flecha?



Representa, del mismo modo, el 2,716.





3 Tramos en la recta real: intervalos y semirrectas

Página 43

1. Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.

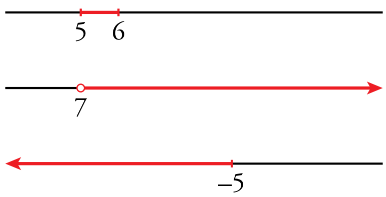
b) Mayores que 7.

c) Menores o iguales que –5.

a) $[5, 6]$

b) $(7, +\infty)$

c) $(-\infty, -5]$



2. Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x \,/\; 3 \le x < 5\}$ **b)** $\{x \,/\; x \ge 0\}$

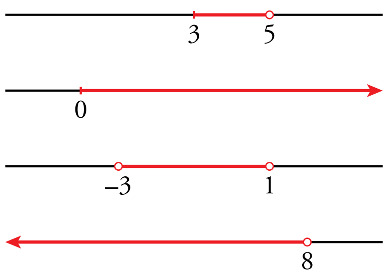
c) $\{x \,/\; -3 < x < 1\}$ **d)** $\{x \,/\; x < 8\}$

a) $[3, 5)$

b) $[0, +\infty)$

c) $(-3, 1)$

d) $(-\infty, 8)$



3. Escribe en forma de desigualdad y representa:

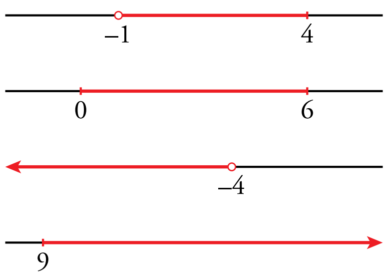
a) $(-1, 4]$ **b)** $[0, 6]$ **c)** $(-\infty, -4)$ **d)** $[9, +\infty)$

a) $\{x \,/\, -1 < x \le 4\}$

b) $\{x \,/\, 0 \le x \le 6\}$

c) $\{x \,/\, x < -4\}$

d) $\{x \,/\, x \ge 9\}$



4 Raíces y radicales

Página 44

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ **b)** $\sqrt[k]{-243} = -3$ **c)** $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ **d)** $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

a) $\sqrt[3]{k} = 2 \rightarrow k = 2^3 = 8$

b) $\sqrt[k]{-243} = -3 \rightarrow -243 = (-3)^k \rightarrow (-3)^5 = (-3)^k \rightarrow k = 5$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3} \rightarrow k = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2 \rightarrow 1\,024 = 2^k \rightarrow 2^{10} = 2^k \rightarrow k = 10$

2. Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ **b)** $\sqrt[5]{32}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[8]{0}$ **e)** $\sqrt[4]{81}$ **f)** $\sqrt[3]{125}$

a) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ b) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

c) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ d) $\sqrt[8]{0} = 0$

e) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ f) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

1. Expresa en forma exponencial cada una de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{x}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5$ **c)** $\sqrt[15]{a^6}$

d) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ **f)** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

a) $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$ b) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5 = (x^{2/3})^5 = x^{10/3}$

c) $\sqrt[15]{a^6} = a^{6/15} = a^{2/5}$ d) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}} = (a^7)^{1/2} = a^{7/2}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = (x^{1/2})^{1/3} = x^{1/6}$ f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}} = a^{k/(n \cdot m)}$

2. Calcula.

a) $4^{1/2}$ **b)** $125^{1/3}$ **c)** $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ **e)** $64^{5/6}$ **f)** $36^{3/2}$

a) $4^{1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

b) $125^{1/3} = (5^3)^{1/3} = 5$

c) $625^{1/4} = (5^4)^{1/4} = 5$

d) $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$

e) $64^{5/6} = (2^6)^{5/6} = 2^5 = 32$

f) $36^{3/2} = (6^2)^{3/2} = 6^3 = 216$

3. Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$

b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$

d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

e) $[(x^{1/2})^5]^{1/3}$

f) $(y^3 \cdot z^2)^{2/3}$

a) $x^{7/9} = \sqrt[9]{x^7}$

b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3} = \sqrt[3]{(m \cdot n)^5}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5} = x^{2 \cdot 1/3 \cdot 1/5} = x^{2/15} = \sqrt[15]{x^2}$

e) $[(x^{1/2})^5]^{1/3} = x^{1/2 \cdot 5 \cdot 1/3} = x^{5/6} = \sqrt[6]{x^5}$

f) $(y^3 \cdot z^2)^{2/3} = \sqrt[3]{(y^3 \cdot z^2)^2} = \sqrt[3]{y^6 \cdot z^4}$

5 Operaciones con radicales

Página 46

1. Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[4]{x^3}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) y^2

d) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ e) $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 b^5 c}}{\sqrt{ab^3 c^3}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$ **e)** $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)$ **f)** $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{9^3}{3^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{\dfrac{(2^4)^2}{2^5}} = \sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{3^2}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{ab^3 \cdot c^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^3 \cdot b^5 \cdot c}{a^2 \cdot b^6 \cdot c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{b \cdot c^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b \cdot c}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = \sqrt[3]{a^{12}} = a^4$

e) $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right) = \sqrt[6]{x^9} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{x^{11}} = x\sqrt[6]{x^5}$

f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 = (\sqrt[8]{2})^8 = 2$

3. Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt[10]{a^4 b^6}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2 \cdot 3} = \sqrt[6]{108}$

c) $\sqrt[10]{a^4 \cdot b^6} = \sqrt[5]{a^2 \cdot b^3}$

4. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ **b)** $\sqrt[3]{81a^3 b^5 c}$ **c)** $\sqrt[3]{64}$

a) $2x\sqrt[3]{2^2 \cdot x} = 2x\sqrt[3]{4x}$ b) $3ab\sqrt[3]{3b^2 \cdot c}$ c) 4

5. Efectúa.

a) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}$

a) $\sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}$

6. Suprime el radical del denominador.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$

d) $\frac{8}{\sqrt[3]{5^2}}$ **e)** $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ **f)** $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{25}}{5}$

d) $\frac{8}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{8 \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \frac{8 \cdot \sqrt[3]{5}}{5}$

e) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{27}}{3}$

f) $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

Ejercicios y problemas

Página 47

Practica

Números racionales e irracionales

1. **a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos enteros?**

$$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

a) No pueden expresarse como cociente: $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$.

b) $-2 = \frac{-4}{2}$; $1{,}7 = \frac{17}{10}$; $4{,}\widehat{2} = \frac{42-4}{9} = \frac{38}{9}$; $-3{,}7\widehat{5} = -\frac{375-37}{90} = -\frac{338}{90} = -\frac{169}{45}$

c) Son irracionales: $\sqrt{3}$, $-2\sqrt{5}$ y 3π.

2. **a) Clasifica en racionales o irracionales.**

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

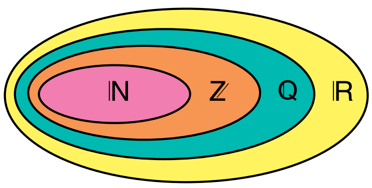
a) Racionales: $0{,}8\widehat{7}$; $-\sqrt{4}$; $-\frac{7}{3}$ Irracionales: $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2π

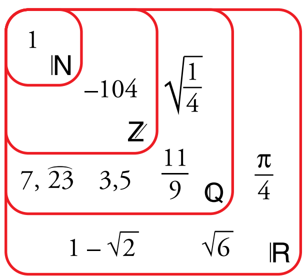
b) $-\frac{7}{3} < -\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}8\widehat{7} < 2\pi$

c) Todos son números reales.

3. **Sitúa los siguientes números en un diagrama como el adjunto:**

$$1;\ 7{,}\widehat{23};\ 1-\sqrt{2};\ 3{,}5;\ \frac{11}{9};\ \sqrt{\frac{1}{4}};\ \sqrt{6};\ \frac{\pi}{4};\ -104$$





Intervalos y semirrectas

4. Escribe los siguientes conjuntos de números en forma de intervalo o semirrecta:

a) Mayores que 2 y menores que 7.

b) Comprendidos entre –1 y 3, ambos incluidos.

c) Mayores o iguales que 5.

d) Menores que 10.

a) $(2, 7)$

b) $[-1, 3]$

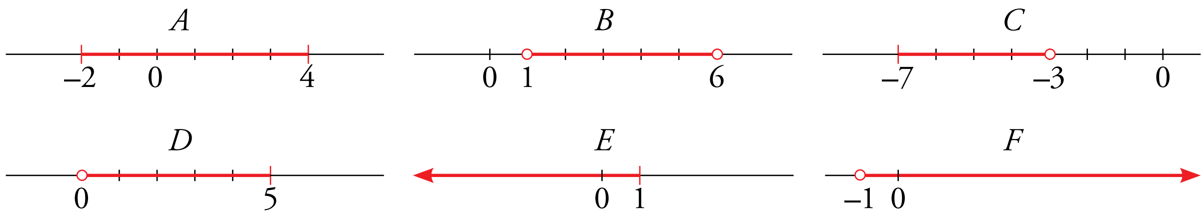
c) $[5, +\infty)$

d) $(-\infty, 10)$

5. Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:

$$A = [-2, 4] \quad B = (1, 6) \quad C = [-7, -3)$$

$$D = (0, 5] \quad E = (-\infty, 1] \quad F = (-1, +\infty)$$



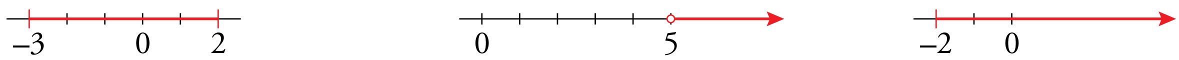
6. Representa gráficamente y expresa como intervalo o semirrecta estas desigualdades:

a) $-3 \le x \le 2$	**b)** $5 < x$	**c)** $x \ge -2$
d) $-2 \le x < 3/2$	**e)** $4 < x < 4,1$	**f)** $-3 \le x$

a) $-3 \le x \le 2 \qquad [-3, 2]$

b) $5 < x \qquad (5, +\infty)$

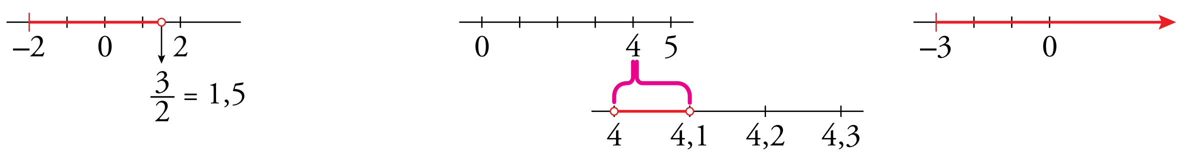
c) $x \ge -2 \qquad [-2, +\infty)$



d) $-2 \le x < \frac{3}{2} \qquad \left[-2, \frac{3}{2}\right)$

e) $4 < x < 4,1 \qquad (4; 4,1)$

f) $-3 \le x \qquad [-3, +\infty)$

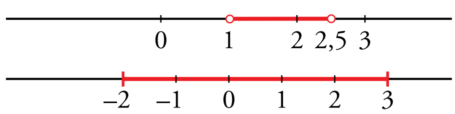


7. Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:

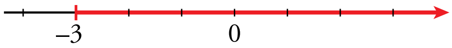
a) $(1; 2,5)$	**b)** $[-2, 3]$	**c)** $[-7, 0)$
d) $[-3, +\infty)$	**e)** $(2, +\infty)$	**f)** $(-5, 2]$

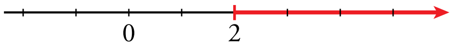
a) $\{x \,/\, 1 < x < 2,5\}$

b) $\{x \,/\, -2 \le x \le 3\}$



c) $\{x \,/\, -7 \le x < 0\}$ 

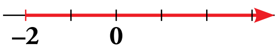
d) $\{x \,/\, -3 \le x\}$ 

e) $\{x \,/\, x > 2\}$ 

f) $\{x \,/\, -5 < x \le 2\}$ 

8. **Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:**

a)  **b)** 

c)  **d)** 

a) $[-1, 3]$; $-1 \le x \le 3$ b) $(1, 5]$; $1 < x \le 5$

c) $[-2, +\infty)$; $x \ge -2$ d) $(-\infty, 4)$; $x < 4$

9. **a) Indica cuáles de los números siguientes están incluidos en $A = [-3, 7)$ o en $B = (5, +\infty)$:**

$$-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ -4;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$$

b) ¿Cuál de estos intervalos representa a los números incluidos en A y en B?

$$(-3, 5) \quad [2, 7) \quad [5, 7] \quad (5, 7)$$

a) $A = [-3, 7)$ $B = (5, +\infty)$ $A \cup B = [-3, +\infty)$

Los números incluidos en A o en B son: $-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$

Es decir, todos excepto -4.

b) $A \cap B = (5, 7)$

Potencias y raíces

10. **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[5]{x^2}$	**b)** $\sqrt{2}$	**c)** $\sqrt[3]{10^6}$	**d)** $\sqrt[4]{20^2}$
e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$	**f)** $\sqrt[4]{a}$	**g)** $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$	**h)** $\sqrt[15]{a^5}$
a) $x^{2/5}$	b) $2^{1/2}$	c) 10^2	d) $20^{1/2}$
e) $(-3)^{3/5}$	f) $a^{1/4}$	g) $x^{-6/5}$	h) $a^{1/3}$

11. **Pon en forma de raíz.**

a) $5^{1/2}$	**b)** $(-3)^{2/3}$	**c)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$
d) $(a^3)^{1/4}$	**e)** $(a^{1/2})^{1/3}$	**f)** $(a^{-1})^{3/5}$
a) $\sqrt{5}$	b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$	c) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$
d) $\sqrt[4]{a^3}$	e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$	f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$

12. **Resuelve, sin utilizar la calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

b) $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

c) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{0,25} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

e) $\sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$

f) $\sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{10^{-3}} = 10^{-1} = 0,1$

13. **Obtén con la calculadora.**

a) $\sqrt[3]{-127}$ **b)** $\sqrt[5]{0,2^{-3}}$ **c)** $\sqrt[4]{1,5^3}$

d) $12^{-2/3}$ **e)** $\sqrt[6]{3^{-5}}$ **f)** $\sqrt[5]{(-3)^{-2}}$

a) $\sqrt[3]{-127} \approx -5,03$

b) $\sqrt[5]{0,2^{-3}} \approx 2,63$

c) $\sqrt[4]{1,5^3} \approx 1,36$

d) $12^{-2/3} = \sqrt[3]{12^{-2}} \approx 0,19$

e) $\sqrt[6]{3^{-5}} \approx 0,40$

f) $\sqrt[5]{(-3)^{-2}} \approx 0,64$

14. **Calcula.**

a) $25^{1/2}$ **b)** $27^{1/3}$ **c)** $125^{2/3}$ **d)** $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ **f)** $16^{5/4}$ **g)** $49^{3/2}$ **h)** $8^{5/3}$

a) $\sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt[3]{27} = 3$

c) $(\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$

d) $(\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$

e) $(\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243$

f) $(\sqrt[4]{16})^5 = 2^5 = 32$

g) $(\sqrt{49})^3 = 7^3 = 343$

h) $(\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

15. **Expresa los radicales como potencias de exponente fraccionario y efectúa como en el ejemplo resuelto:**

- $\sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{2} = 2^{3/4} : 2^{1/3} = 2^{3/4-1/3} = 2^{5/12}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{9}$ **c)** $3\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{5} : \sqrt[4]{5}$ **e)** $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}$ **f)** $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{7/6}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 3^{1/2} \cdot 3^{2/4} = 3$

c) $3 \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3 \cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}$

d) $5^{1/2} : 5^{1/4} = 5^{1/4}$

e) $\sqrt[3]{2^4} : \sqrt[3]{2^2} = 2^{4/3} : 2^{2/3} = 2^{2/3}$

f) $\sqrt[3]{5^2} : \sqrt{5} = 5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{1/6}$

Página 48

Radicales

16. **Simplifica.**

a) $\sqrt[6]{9}$ **b)** $\sqrt{625}$ **c)** $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ **e)** $\sqrt[6]{125}$ **f)** $\sqrt[5]{3^{15}}$

a) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{2/6} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$

c) $\sqrt[15]{2^{12}} = 2^{12/15} = 2^{4/5} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

d) $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{2/4} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

e) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = 5^{3/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

f) $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{15/5} = 3^3 = 27$

17. **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[10]{a^8}$ **b)** $\sqrt[4]{a^{12}}$ **c)** $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2 b^2}$ **e)** $\sqrt[3]{a^6 b^6}$ **f)** $\sqrt[6]{a^2 b^4}$

a) $a^{8/10} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$

b) $a^{12/4} = a^3$

c) $a^{3/12} = a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$

d) $(ab)^{2/8} = (ab)^{1/4} = \sqrt[4]{ab}$

e) $(ab)^{6/3} = (ab)^2 = a^2b^2$

f) $a^{2/6} \cdot b^{4/6} = a^{1/3} \cdot b^{2/3} = \sqrt[3]{ab^2}$

18. **Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $\sqrt{28}$ **c)** $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{200}$ **f)** $\sqrt{300}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 2^2} = 2\sqrt{7}$

c) $\sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = 4\sqrt[4]{4}$

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{200} = \sqrt{5^2 \cdot 2^3} = 5 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

f) $\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$

19. **Multiplica y simplifica el resultado.**

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}$

d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot3\cdot6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a\cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{5\cdot10\cdot8} = \sqrt{400} = 20$

d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3} = \sqrt{a\cdot a^3} = \sqrt{a^4} = a^2$

20. **Divide y simplifica.**

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{4}}$

a) $\sqrt{7} : \sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{7 : \frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{35}{21}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5} : \frac{5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{\frac{45}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2\cdot3} : \frac{3^2\cdot5}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{5\cdot2^2}{2\cdot3^3\cdot5}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$

21. **Reduce a un solo radical.**

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ **e)** $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ **f)** $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

a) $\sqrt[4]{13}$ b) $\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[15]{15}$

d) $\sqrt[12]{2^5}$ e) $\sqrt[4]{3^3}$ f) $\sqrt[10]{11}$

22. **Calcula y simplifica si es posible.**

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$ **c)** $\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ **e)** $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10}$ **f)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^6$

a) $2^5 = 32$ b) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[4]{3^{16}} = 3^4 = 81$

d) $\sqrt[8]{8}$ e) $\sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt{2^5}$ f) $\sqrt[6]{2^6} = 2$

23. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

24. **Efectúa.**

a) $2\sqrt{8}+4\sqrt{72}-7\sqrt{18}$

b) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{27}$

c) $\sqrt{32}+3\sqrt{50}-2\sqrt{8}$

d) $3\sqrt{2}+\sqrt{18}-3\sqrt{8}$

a) $2\sqrt{2^3}+4\sqrt{3^2\cdot 2^3}-7\sqrt{3^2\cdot 2}=2\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}-7\cdot 3\sqrt{2}=$

$=4\sqrt{2}+24\sqrt{2}-21\sqrt{2}=(4+24-21)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{5^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2^5}+3\sqrt{2\cdot 5^2}-2\sqrt{2^3}=2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 5\sqrt{2}-2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}+15\sqrt{2}-4\sqrt{2}=15\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2}+\sqrt{3^2\cdot 2}-3\sqrt{2^3}=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3\cdot 2\sqrt{2}=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-6\sqrt{2}=(3+3-6)\sqrt{2}=0$

25. **Efectúa.**

a) $\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{28}-\sqrt{7}+\sqrt{63}$

d) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}$

a) $\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{3}=\sqrt{2^4\cdot 3}-\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3}=2^2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=(4-2+1)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}=(3-2)\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{28}-\sqrt{7}+\sqrt{63}=\sqrt{2^2\cdot 7}-\sqrt{7}+\sqrt{3^2\cdot 7}=2\sqrt{7}-\sqrt{7}+3\sqrt{7}=(2-1+3)\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 3^3}+\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=(3+1)\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$

26. **Racionaliza y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$ **e)** $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ **f)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\dfrac{3\sqrt{15}}{15}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}}=\dfrac{4\sqrt{12}}{\sqrt{12^2}}=\dfrac{4\sqrt{12}}{12}=\dfrac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

e) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{6^2}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\cdot 6}=\dfrac{3\sqrt{6}}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

27. **Suprime el radical del denominador y simplifica.**

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ **c)** $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ **d)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}} = \dfrac{6\sqrt{12}}{12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

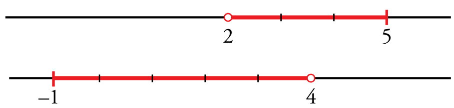
d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Aplica lo aprendido

28. **Representa los intervalos $A = (2, 5]$ y $B = [-1, 4)$ y di si tienen puntos en común. Si es un intervalo, di cuál es.**

$A = (2\ ,5]$

$B = [-1\ ,4)$



Los puntos comunes a A y B están entre 2 y 4 $\rightarrow$ $(2, 4)$

29. **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

$$-4;\ \frac{13}{6};\ \sqrt{5};\ 2,\overset{\frown}{7};\ 152;\ \pi;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

- REALES ($\mathbb{R}$)
  - RACIONALES ($\mathbb{Q}$)
    - ENTEROS ($\mathbb{Z}$)
      - NATURALES ($\mathbb{N}$) $\rightarrow$ 152
      - ENTEROS NEGATIVOS $\rightarrow$ -4
    - FRACCIONARIOS $\rightarrow$ $\dfrac{13}{6}$; $2,\overset{\frown}{7}$
  - IRRACIONALES $\rightarrow$ $\sqrt{5}$; π; $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

30. **Extrae del radical los factores que sea posible.**

a) $\sqrt[3]{16a^3}$ **b)** $\sqrt[4]{81a^5b^3}$ **c)** $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{24}{a^4}}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{162}{75}}$ **f)** $\sqrt[5]{\dfrac{9}{32}}$

a) $2a\sqrt[3]{2}$ b) $3a\sqrt[4]{ab^3}$ c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\dfrac{2}{a}\sqrt[3]{\dfrac{3}{a}}$ e) $\dfrac{9}{5}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

31. **Efectúa.**

a) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ **b)** $(3\sqrt{2}+2)^2$

c) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$ **d)** $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

a) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = (2)^2-(\sqrt{3})^2 = 4-3 = 1$

b) $(3\sqrt{2}+2)^2 = (3\sqrt{2})^2+2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2+(2)^2 = 9\cdot 2+12\sqrt{2}+4 = 22+12\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2-(2\sqrt{3})^2 = 5-4\cdot 3 = 5-12 = -7$

d) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{5})^2-2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = 4\cdot 5-4\sqrt{15}+3 = 20-4\sqrt{15}+3 = 23-4\sqrt{15}$

32. **Di el valor de *k* en cada caso:**

a) $\sqrt[k]{243}=3$ **b)** $\sqrt[3]{k}=-2$ **c)** $\sqrt[4]{k}=\frac{3}{2}$

d) $\sqrt[k]{-125}=-5$ **e)** $\sqrt[3]{k}=-1$ **f)** $\sqrt[k]{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$

a) $\sqrt[k]{3^5}=3 \rightarrow k=5$

b) $k=(-2)^3 \rightarrow k=-8$

c) $k=\left(\frac{3}{2}\right)^4 \rightarrow k=\frac{81}{16}$

d) $\sqrt[k]{(-5)^3}=-5 \rightarrow k=3$

e) $k=(-1)^3 \rightarrow k=-1$

f) $\sqrt[k]{\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{7}{8} \rightarrow k=2$

33. **Introduce dentro de la raíz y simplifica.**

a) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ **b)** $\frac{\sqrt{18}}{3}$ **c)** $2\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ **e)** $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ **f)** $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\frac{5^2\cdot 3}{5}}=\sqrt{15}$

b) $\sqrt{\frac{18}{3^2}}=\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 7}{4}}=\sqrt[3]{14}$

d) $\sqrt[4]{\frac{2^4\cdot 5}{12}}=\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{12}{2^2}}=\sqrt{3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 9}{3^3\cdot 4}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

34. **Suprime el radical del denoninador.**

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **d)** $\frac{5}{\sqrt[4]{2}}$

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5}\cdot\sqrt[8]{a^3}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

d) $\frac{5}{\sqrt[4]{2}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{5\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{5\sqrt[4]{8}}{2}$

Página 49

Resuelve problemas

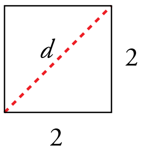
35. **Indica si el número que se obtiene en cada caso es racional o irracional:**

a) La diagonal de un cuadrado de lado 2 cm.

b) El área de un círculo de radio 2 cm.

c) El cateto de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 24 cm y 25 cm.

a) La diagonal de un cuadrado de lado 2 cm. $\to$ Irracional



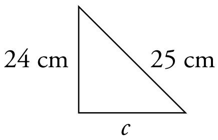
Por el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 2^2 + 2^2 \to d^2 = 8 \to d = \sqrt{8}$ cm

b) El área de un círculo de radio 2 cm. $\to$ Irracional

Área $= \pi \cdot r^2 \to$ Área $= \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ (n.º irracional)

c) El cateto del triángulo rectángulo de lados 24 cm y 25 cm. $\to$ Racional



$25^2 = 24^2 + c^2 \to 625 = 576 + c^2 \to c^2 = 49 \to c = 7$

36. **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{x-5}$ **b)** $\sqrt{5-x}$ **c)** $\sqrt{x^2+1}$

d) $\sqrt{-x}$ **e)** $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ **f)** $\sqrt{x(3-x)}$

En todos los apartados aplicaremos el siguiente resultado: $\sqrt{A}$ se puede calcular si $A \ge 0$

a) $\sqrt{x-5}$ se puede calcular si $x - 5 \ge 0 \to x \ge 5 \to x = [5, +\infty)$

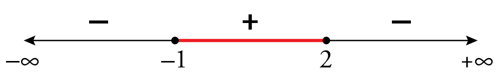
b) $\sqrt{5-x}$ se puede calcular si $5 - x \ge 0 \to 5 \ge x \to x = (-\infty, 5]$

c) $x^2 + 1 > 0$, para cualquier $x \in \mathbb{R} \to \sqrt{x^2+1}$ se puede calcular para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

d) $\sqrt{-x}$ se puede calcular si $-x \ge 0 \to x \le 0 \to x \in (-\infty, 0]$

e) $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ se puede calcular si $(1 + x) \cdot (2 - x) \ge 0$

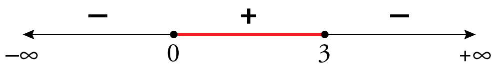
- Si $x = -1$ o $x = 2 \to (1 + x) \cdot (2 - x) = 0$
- Si $x < -1 \to \begin{cases} (1-x) < 0 \\ (2-x) > 0 \end{cases} \to (1 + x) \cdot (2 - x) < 0$
- Si $-1 < x < 2 \to \begin{cases} (1+x) > 0 \\ (2-x) > 0 \end{cases} \to (1 + x) \cdot (2 - x) > 0$
- Si $x > 2 \to \begin{cases} (1+x) > 0 \\ (x-2) < 0 \end{cases} \to (1 + x) \cdot (2 - x) < 0$



Por tanto, $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ se puede calcular si $x \in [-1, 2]$.

f) $\sqrt{x \cdot (3 - x)}$ se puede calcular si $x \cdot (3 - x) \geq 0$.

- Si $x = 0$ o $x = 3 \rightarrow x \cdot (3 - x) = 0$
- Si $x < 0 \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (3 - x) > 0 \end{cases} \rightarrow x \cdot (3 - x) < 0$
- Si $0 < x < 3 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (3 - x) > 0 \end{cases} \rightarrow x \cdot (3 - x) > 0$
- Si $x > 3 \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (3 - x) < 0 \end{cases} \rightarrow x \cdot (3 - x) < 0$



Por tanto, $\sqrt{x \cdot (3 - x)}$ se puede calcular si $x \in [0, 3]$.

37. **¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $3 + \sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$?**

- $(1 - \sqrt{3})^2 - 6 \cdot (1 - \sqrt{3}) + 7 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} - 6 + 6\sqrt{3} + 7 = 5 + 4\sqrt{3} \neq 0$

  El número $(1 - \sqrt{3})$ no es solución.
- $(3 + \sqrt{2})^2 - 6 \cdot (3 + \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$

  El número $(3 + \sqrt{2})$ es solución.

38. **Un cuadrado de 6 cm de lado está inscrito en un círculo. Calcula:**

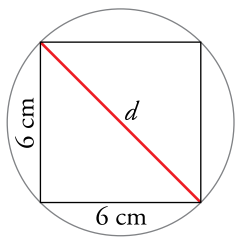
a) El radio del círculo y su área.

b) El perímetro del triángulo ABC, del que AB es un lado del cuadrado y C es el punto medio del lado opuesto.

Expresa los resultados con radicales y π.

a) Sea d = diámetro del círculo.

Por el teorema de Pitágoras:



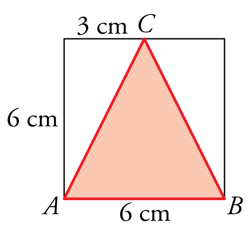
$d^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow d^2 = 36 + 36 \rightarrow d^2 = 72 \rightarrow$

$\rightarrow d = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm

Si el diámetro del círculo mide $d = 6\sqrt{2}$ cm, entonces el radio es $r = 3\sqrt{2}$ cm.

Área $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = \pi \cdot 9 \cdot 2 = 18\pi$ cm^2

b) Por el teorema de Pitágoras:



$\overline{AC}^2 = 6^2 + 3^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 36 + 9 \rightarrow \overline{AC}^2 = 45 \rightarrow$

$\rightarrow \overline{AC} = \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ cm

Como $\overline{BC} = \overline{AC} \rightarrow$ Perímetro $= \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AC} = 6 + 2 \cdot (3\sqrt{5}) = 6 + 6\sqrt{5}$ cm

39. **El volumen de un cilindro de 5 cm de altura es 60 π cm^3.**

a) ¿Cuánto mide su radio?

b) Calcula su área lateral. Da en ambos casos el valor exacto (utiliza radicales y π).

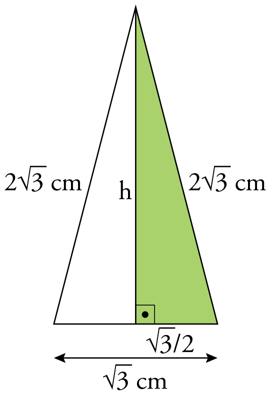
a) Volumen del cilindro = $\pi \cdot r^2 \cdot h$

$$60\pi = \pi \cdot r^2 \cdot 5 \ \rightarrow\ r^2 = \frac{60\pi}{5\pi} \ \rightarrow\ r^2 = 12 \ \rightarrow\ r = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

b) Área lateral = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$$A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 = 20\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^2$$

40. **Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**



Por el teorema de Pitágoras:

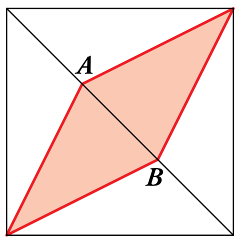
$$h^2 = (2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12 - \frac{3}{4} = \frac{45}{4} \ \rightarrow$$

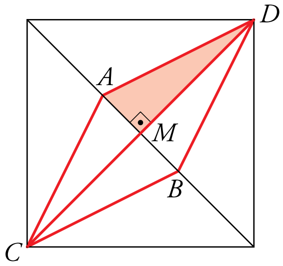
$$\rightarrow\ h = \sqrt{\frac{45}{4}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 5}{2^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$$

41. **Los puntos *A* y *B* dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales.**

Si el área del cuadrado es 36 cm^2, ¿cuánto medirá el lado del rombo? Expresa el resultado con radicales

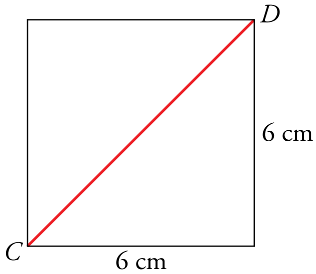




- Área del cuadrado = 36 cm^2 $\rightarrow$ lado = $\sqrt{36}$ = 6 cm
- Diagonal mayor del rombo = diagonal del cuadrado = $\overline{CD}$

  Por el teorema de Pitágoras:

  $$\overline{CD}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \ \rightarrow\ \overline{CD} = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$



- Diagonal menor $= \overline{AB} = \dfrac{\overline{CD}}{3} = \dfrac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ cm
- El lado del rombo es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\widehat{AMD}$.

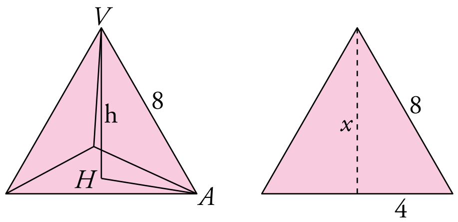
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm} \\ \overline{MD} = \dfrac{\overline{CD}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm} \end{array}\right\} \overline{AD}^{\,2} = \overline{AM}^{\,2} + \overline{MD}^{\,2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AD}^{\,2} = (\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 2 + 18 = 20$$

$$\rightarrow \overline{AD} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

Por tanto, el lado del rombo mide $2\sqrt{5}$ cm.

42. **Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Expresa el resultado con radicales.**



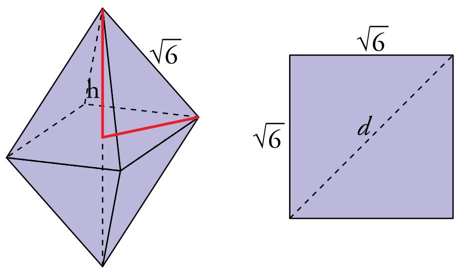
Altura de una cara:

$x = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

$\overline{AH} = \dfrac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm

Altura del tetraedro: $h = \sqrt{8^2 - \left(\dfrac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{64 - \dfrac{192}{4}} = \sqrt{64 - 48} = \sqrt{16} = 4$ cm

43. **Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**



$d = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

$\dfrac{d}{2} = \sqrt{3}$ cm

Altura de la pirámide $= \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ cm

Volumen del octaedro $= 2\left(\dfrac{1}{3}(\sqrt{6})^2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$ cm^3