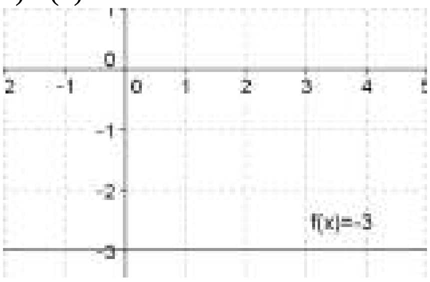
UNIDAD 7: Funciones polinómicas. Interpolación

ACTIVIDADES-PÁG. 142

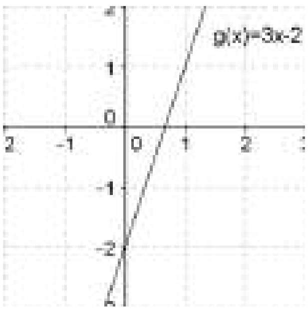
1. Las representaciones quedan:

a) f (x) = -3



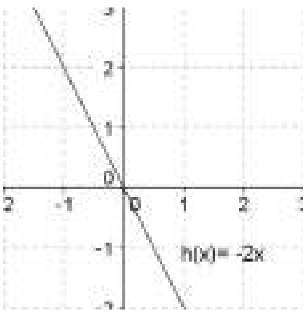
f (x) es una función constante.
Dom f = R
Im f = {- 3}
Acotada por - 3.

b) g (x) = 3x - 2



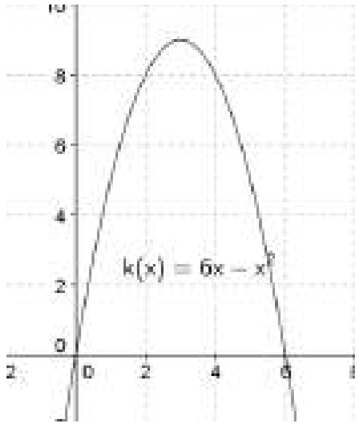
g (x) es una función afín.
Dom g = R
Im g = {R}
Estrictamente creciente en su dominio.

c) h (x) = - 2x



h (x) es una función lineal.
Dom h = R
Im h = {R}
Estrictamente decreciente en su dominio.

d) k (x) = $6x - x^2$



k (x) es una función cuadrática.
Dom f = R
Im k = $(-\infty, 9]$
Acotada superiormente por 9.
Estrictamente creciente en $(-\infty, 3)$.
Estrictamente decreciente en $(3, +\infty)$
Máximo en (3, 9).

2. La función es f (x) = $3x^2 - 6x - 9$.

3. La asociación es: a) con (III) b) con (IV) c) con (I) d) con (II)

ACTIVIDADES-PÁG. 157

1. Llamamos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5 \cdot (4B + 3N) = 4 \cdot (3B + 5N) \Rightarrow 20B + 15N = 12B + 20N \Rightarrow 8B = 5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas de la pirámide es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + .. + 14^2 + 15^2 = 1240 \text{ naranjas.}$$

3. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

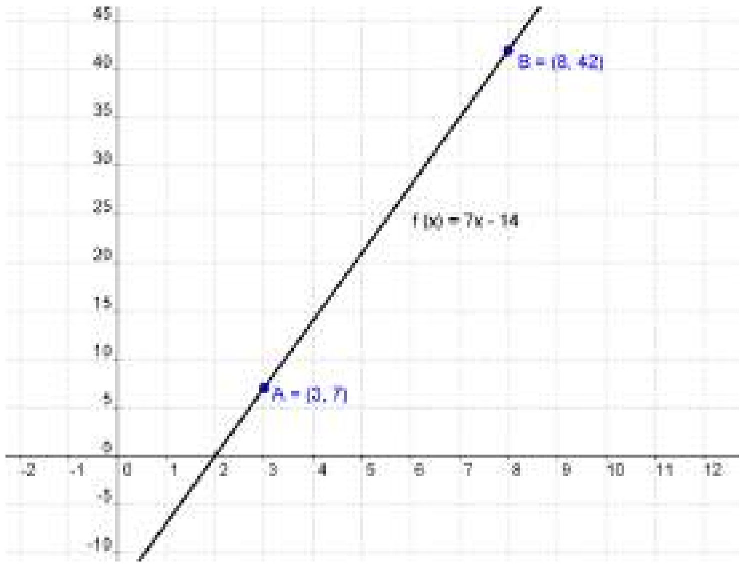
● Con la información referida a los Reyes (R) y las Damas (D) llegamos a que puede ser RDD o DRD.

● Con la información referida a los Corazones (C) y las Picas (P) llegamos a que puede ser PCP o PPC.

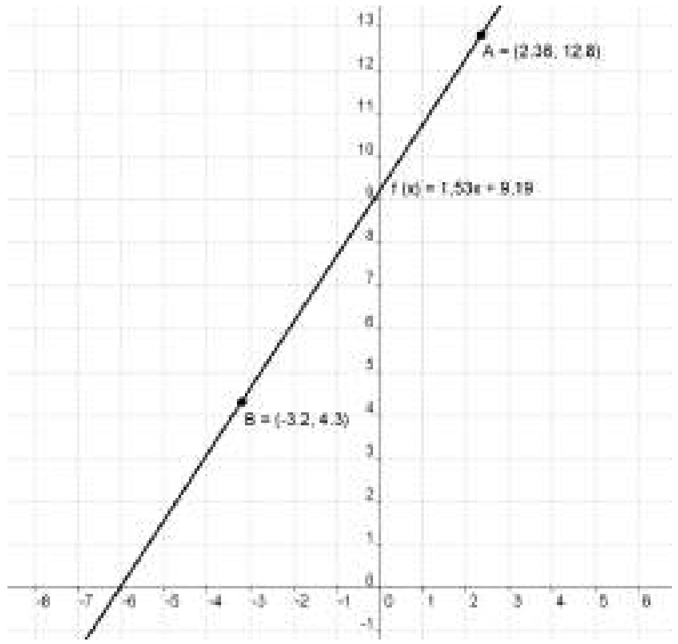
Juntamos los resultados obtenidos y llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

ACTIVIDADES-PÁG. 159

1. a) Siguiendo los pasos descritos, obtenemos f(x) = 7x – 14 como polinomio interpolador.



b) En este caso obtenemos f (x) = 1,53x + 9,19.



2. Procedemos como en los casos anteriores:

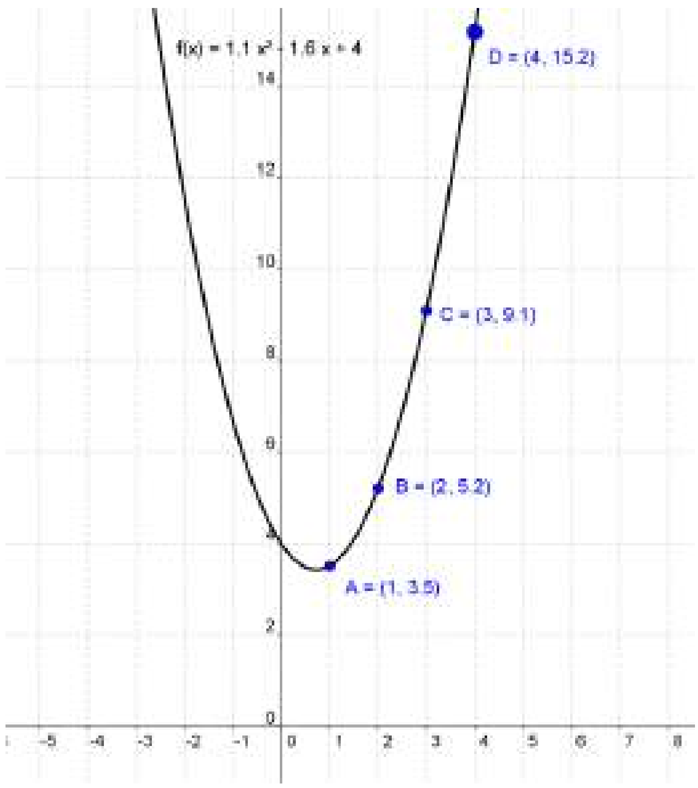
a) Introducimos los puntos A = (1, 3.5); B = (2, 5.2) y C =(3, 9.1).

b) Dibujamos la función interpoladora con el comando Polinomio [A,B,C].

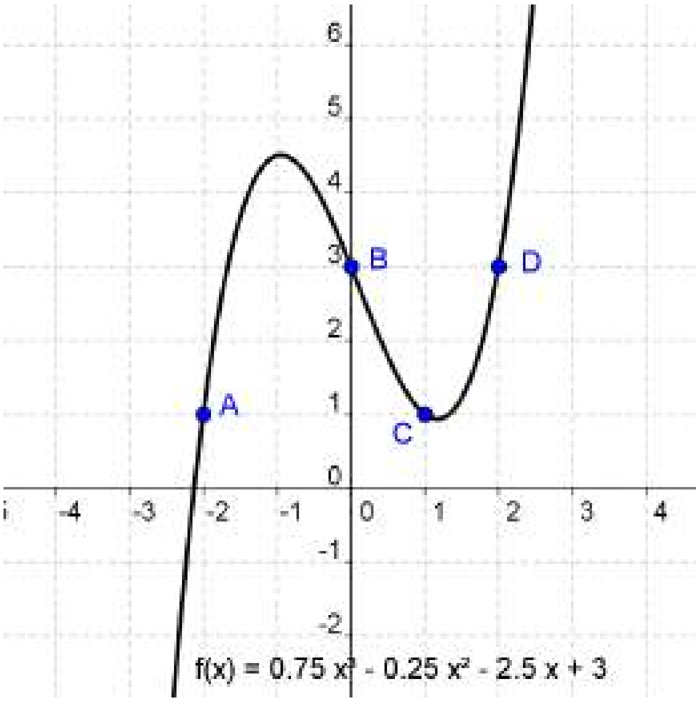
c) En el menú contextual de cada elemento determinamos su nombre y valor.

d) Obtenemos el gasto previsto para el año 2012 escribiendo en el Campo de Entrada f (4) y nos da que el gasto 15200 euros.

Puedes verlo dibujado en la gráfica como punto D.



3. Procediendo como en los casos anteriores obtenemos el polinomio f (x) = $0{,}75x^3 - 0{,}25x^2 - 2{,}5\,x + 3$.



ACTIVIDADES-PÁG. 160

1. En cada caso queda:

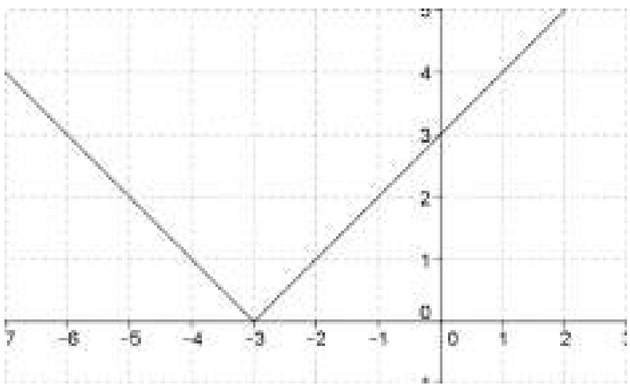
a) La función es $y = \dfrac{7}{3}x$.

b) Es la función lineal y = 2x. Es una función lineal.

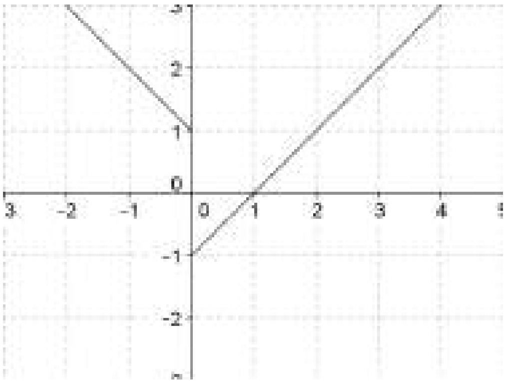
c) Su ecuación es $y = \dfrac{3}{4}x - 3$. La pendiente de esta recta vale $\dfrac{3}{4}$.

2. Las gráficas quedan:

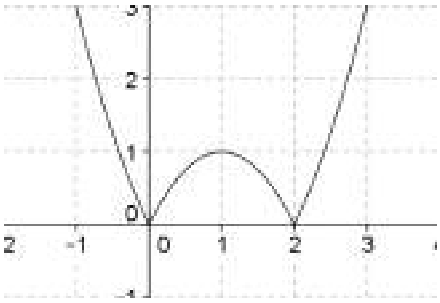
a) $f\ (x) = |\,x + 3\,|$



b) $f\ (x) = |\,x\,| - \dfrac{|\,x\,|}{x}$

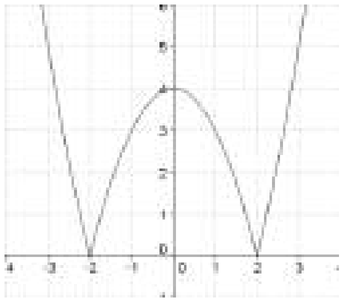


c) $f\ (x) = \left| x^2 - 2x \right|$



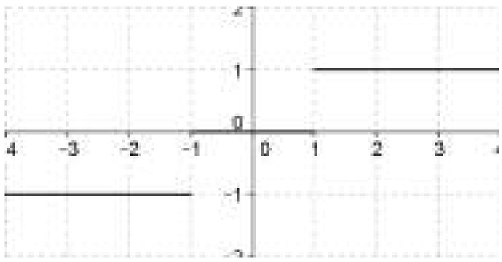
3. Las gráficas quedan:

a) $f\ (x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si \quad x \leq 2 \text{ ó } x \geq -2 \\ 4 - x^2 & si \quad -2 < x < 2 \end{cases}$



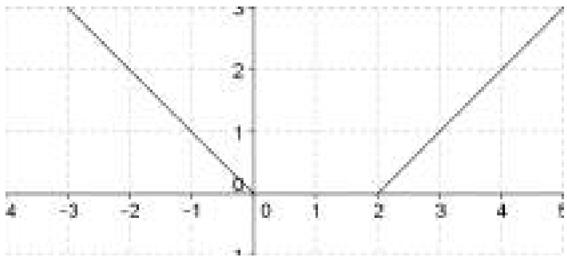
Dom f = R
Im f = $[0, +\infty)$

b) $f\ (x) = \begin{cases} -1 & si\ x < -1 \\ 0 & si\ -1 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$



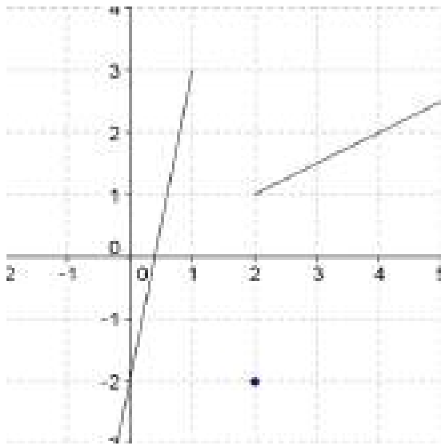
Dom f = R
Im f = {-1, 0, 1}

c) $f\ (x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x-2 & si \quad 2 < x \end{cases}$



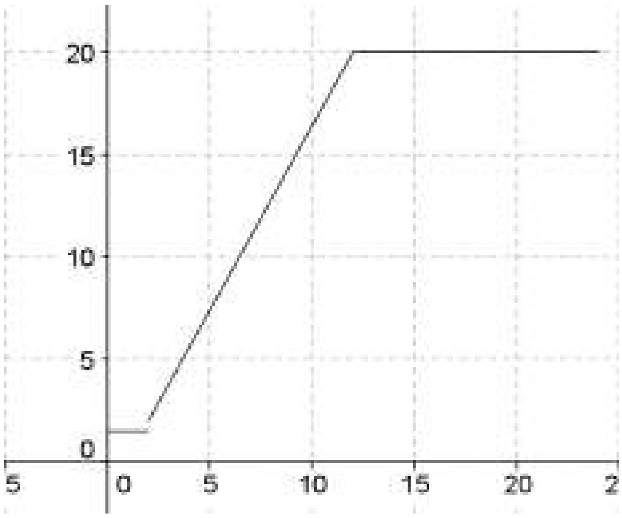
Dom f = $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$
Im f= $[0, +\infty)$

d) $f\ (x) = \begin{cases} 5x-2 \ \ si \ \ x<1 \\ -2 \ \ si \ \ x=2 \\ \dfrac{1}{2}x \ \ si \ \ x>2 \end{cases}$



Dom f = $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
Im f= R

4. La representación gráfica es:



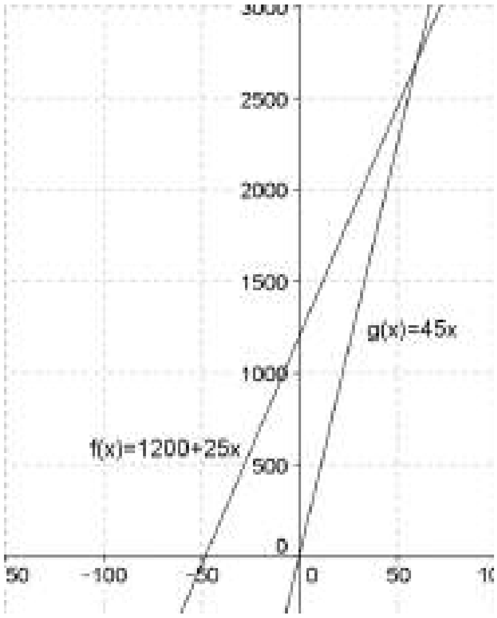
5. La expresión de la función es P (x) = 1,5 x + 2,75. Cobra 1,5 €/km y 2,75 € por bajada de bandera.

6. La solución queda:

a) La función es P = 1200 + 25 · x, donde P es el precio a cobrar en euros y x los kilómetros.

b) La función para la otra empresa es P = 45 · x , donde P es el precio a cobrar en euros y x los kilómetros.

Las gráficas aparecen en el dibujo.



Para los primeros 60 km interesa más la segunda opción. Para 60 km da igual una que otra y a partir de 60 km es más barata la primera opción.

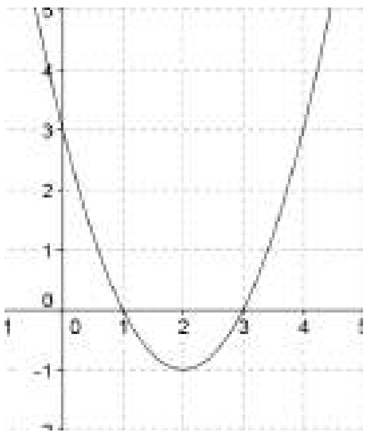
c) La función primera será: $f\ (x) = \frac{121}{100}\ P = \frac{121}{100}\,(1200 + 25 \cdot x)$

La función segunda será: $g\ (x) = \frac{121}{100}\ P = \frac{121}{100}\,(45 \cdot x)$

Todas las ordenadas de ambas funciones quedan multiplicadas por 1,21.

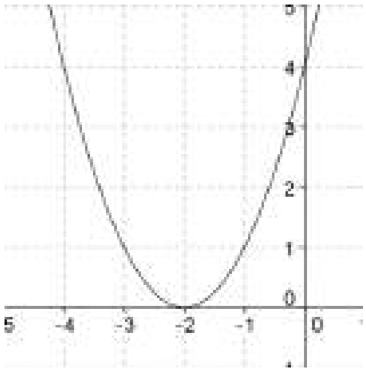
7. Las representaciones gráficas y sus características son:

a) f (x) = $x^2 - 4x + 3$



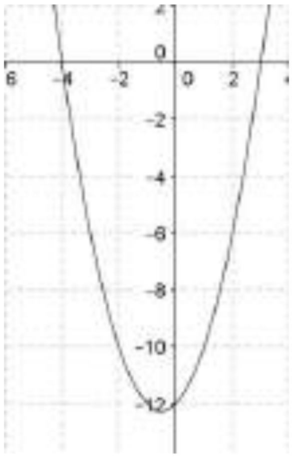
Dom f = R
Im f = $[-1, +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$.
Estrictamente creciente en $(2, +\infty)$
Mínimo relativo en (2, - 1).
Está acotada inferiormente por – 1.
Mínimo absoluto en – 1.
Es simétrica respecto de su eje x = 2.

b) f (x) = $x^2 + 4x + 4$



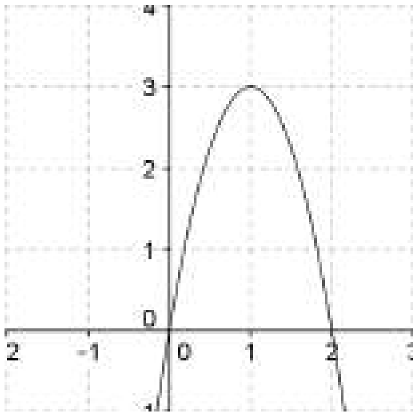
Dom f = R
Im f = $[0, +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)$.
Estrictamente creciente en $(-2, +\infty)$
Mínimo relativo en (-2, 0).
Está acotada inferiormente por 0. Mínimo absoluto en 0.
Es simétrica respecto de su eje x = -2.

c) f (x) = $x^2 + x - 12$



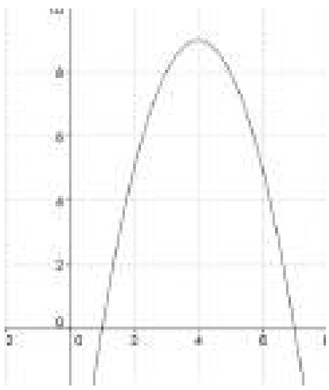
Dom f = R
Im f = $[-12{,}25; +\infty)$
Estrictamente decreciente en $(-\infty, -1/2)$.
Estrictamente creciente en $(-1/2, +\infty)$
Mínimo relativo en (-1/2; -12,25).
Está acotada inferiormente por -12,25. Mínimo absoluto en -12,25.
Es simétrica respecto de su eje x = -1/2.

d) f (x) = $-3x^2 + 6x$



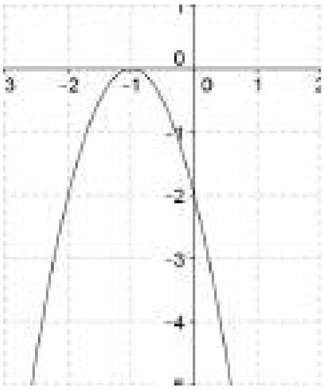
Dom f = R
Im f = $(-\infty, 3]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$.
Estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$
Máximo relativo en (1, 3).
Está acotada superiormente por 3.
Máximo absoluto en 3.
Es simétrica respecto de su eje x = 1.

e) f (x) = $-x^2 + 8x - 7$



Dom f = R
Im f = $(-\infty, 9]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 4)$.
Estrictamente decreciente en $(4, +\infty)$
Máximo relativo en (4, 9).
Está acotada superiormente por 9.
Máximo absoluto 9.
Es simétrica respecto de su eje x = 4.

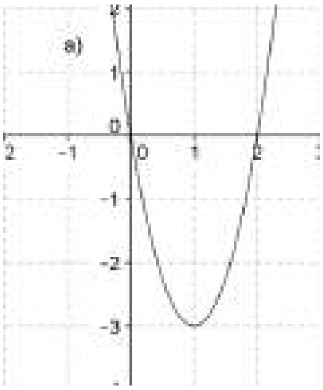
f) f (x) = - 2x^2 – 4x - 2

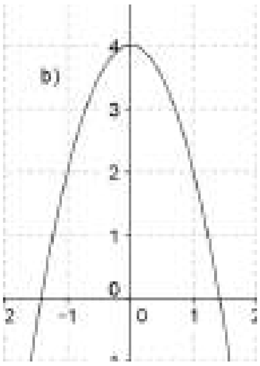


Dom f = R
Im f = $(-\infty, 0]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$.
Estrictamente decreciente en $(-1, +\infty)$
Máximo relativo en (- 1, 0).
Está acotada superiormente por 0. Máximo absoluto 0.
Es simétrica respecto de su eje x = - 1 .

ACTIVIDADES-PÁG. 161

8. Las soluciones se presentan bajo las gráficas.

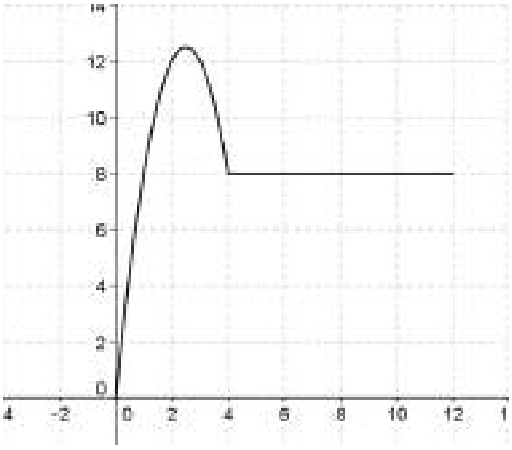




f (x) = 3 x^2 – 6x

f (x) = (-16/9) x^2 + 4

9. La representación gráfica es:



El beneficio es de 12 millones de euros al 2º año y al 3º.

10. Las soluciones de los apartados son:

a) El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$\frac{425}{3}p - 326 = 51570 - \frac{1454}{5}p \quad \Rightarrow \quad p = 120 \text{ €}$$

La cantidad de equilibrio es f_o (120) = f_d (120) = 16 674 unidades.

b) Si el precio es de 135 € entonces: f_o (135) = 18 799 unidades produce el almacén y f_d (135) = 12 312 unidades demanda el público, es decir hay sobreabundancia de unidades.

Si el precio es de 105 € entonces: f_o (105) = 14 549 unidades produce el almacén y f_d (105) = 21 036 unidades demanda el público, es decir hay escasez de unidades.

11. a) La función demanda es f_d (p) = - 2p + 110

b) La función oferta es : f_o (p) = 1,5 p + 15

c) El precio de equilibrio es p = 27,14 euros. Si p = 40 € entonces f_o (40) = 75 unidades oferta la empresa y f_d (40) = 30 unidades demanda el comprador. En este caso se produce exceso de carteras.

12. El polinomio buscado es P(x) = x + 2.

Para el valor a = 0, obtenemos P (0) = 0 + 2, es decir, P (0) = 2.

Para el valor a = 5, obtenemos P (5) = 5 + 2, es decir, P (5) = 7.

13. El polinomio interpolador es P (x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{cases} a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 49 \\ a_0 + 10a_1 + 100a_2 = 105 \\ a_0 + 25a_1 + 625a_2 = 352 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 37/6 \\ a_1 = 29/4 \\ a_2 = 79/300 \end{cases} \Rightarrow P(x) = \frac{79}{300}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{37}{6}$$

P (15) = 174,17 mm

P (20)= 256,5 mm

Las aproximaciones obtenidas son bastante buenas.

14. El polinomio interpolado es P (x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{cases} a_0 = 48 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 52 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 48 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1/9 \end{cases} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{9}x^2 + x + 48$$

Un bebe de 1 año, es decir de 12 meses, tendría una longitud media de P (12) = 76 cm.

ACTIVIDADES-PÁG. 162

15. La solución queda:

● El punto de intersección lo hallamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 16x \\ y = -2x + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 14 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son (8, 0) y (1, 14).

El ingreso total máximo se produce para x = 4 dólares y es 32.

● El ingreso total pasa de 14 a 24 dólares para valores de x $\in$ (1, 2).

La función f (x) que da la cantidad de producto fabricado disminuye de 14 a 12 unidades, no aumenta y el precio pasa de 1 a 2 dólares.

16. a) El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$0{,}2 \cdot p^2 - 65 = 340 - 0{,}25 \cdot p^2 \quad \Rightarrow \quad p = 30\ €$$

La cantidad de equilibrio es f_o (30) = f_d (30) = 115 motos.

b) Se produce escasez de motos cuando $340 - 0{,}25 \cdot p^2 > 0{,}2 \cdot p^2 - 65 + 99 \quad \Rightarrow \quad p \in (0, 26)$ €

17. Consideramos el mes de mayo como el mes inicial (x = 0). El polinomio interpolador, P (x) = ax^2 + bx + c, para los datos de la tabla, es:

Mayo x = 0	**Agosto x = 3**	**Septiembre x = 4**
2,4	2,7	2,9

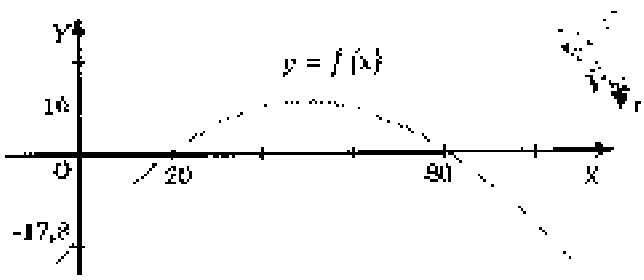
$$P(x) = 0{,}025x^2 + 0{,}025x + 2{,}4$$

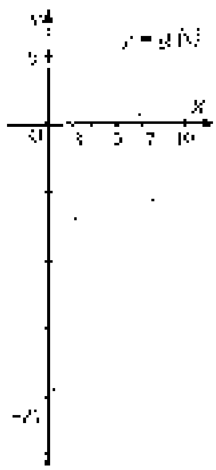
La inflación estimada para el mes de julio (x = 2) es P (2) = 2,55.

La inflación estimada para el mes de octubre (x = 5) es P (5) = 3,15.

18. Las soluciones de los apartados son:

a) Las representaciones quedan:





b) En el primer caso hay que fabricar entre 20 y 80 unidades y en el segundo caso entre 3 y 7 unidades.

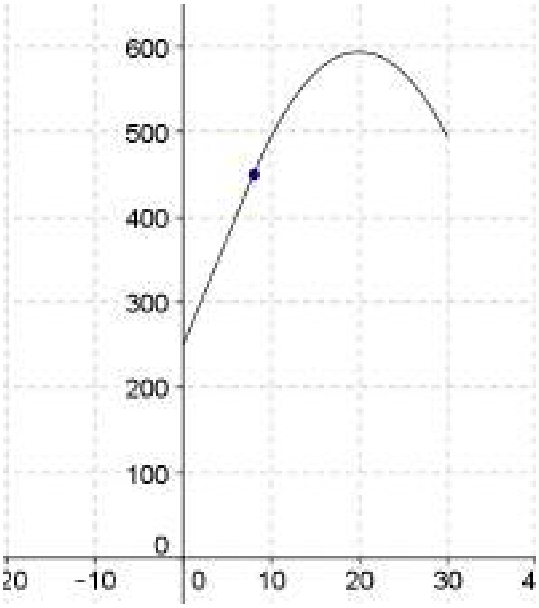
c) En la función f (x) el mayor beneficio se produce al fabricar 50 unidades y este beneficio es de 10 000 euros.

En la función g (x) el mayor beneficio se produce al fabricar 5 unidades y este beneficio es de 4 000 euros.

d) Obtiene los mismos beneficios cuando:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600) = 10x - x^2 - 21 \Rightarrow x = 8{,}6 \;;\; x = 0{,}38$$

19. La representación gráfica es:



La oferta máxima la alcanza para p = 20 €.

La oferta es menor de 450 unidades para p $\in (0,8)$

20. Considerando 2011 como año 0, 2012 como año 1 y 2014 como año 3, obtenemos la función de interpolación cuadrática que se ajusta a estos datos:

$$\begin{cases} P(0) = 54 \Rightarrow a_0 = 54 \\ P(2) = 57 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 57 \\ P(3) = 4{,}6 \Rightarrow a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 54 \\ a_1 = \frac{8}{3} \\ a_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 54$$

Para el año 2015 se prevé que haya P (4) = 70 millones de turistas por el interior de España.

ACTIVIDADES-PÁG. 163

Existe una amplísima bibliografía sobre la relación entre matemáticas y arte. Ofrecemos algunos textos significativos.

CORBALÁN, Fernando. (2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza.* RBA. Barcelona.

FERNÁNDEZ, I. y REYES, M. A. (2006) *Geometría con el hexágono y el octógono.* Proyecto Sur. Granada.

LIVIO, Mario. (2006) *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo.* Ariel. Barcelona.

MARTÍN CASALDERREY, F. (2010) *La burla de los sentidos. El arte visto con ojos matemáticos.* RBA. Barcelona.

MEAVILLA SEGUÍ, V. (2007) *Las matemáticas del arte. Inspiración ma(r)temática.* Almuzara. Córdoba.

VV. AA. (2005) *Geometría en los Reales Alcázares de Sevilla*. Junta de Andalucía. Sevilla.

VV. AA. (2009) *La proporción: arte y matemáticas.* Graó. Barcelona.

VV. AA. (2009) *Matemáticas en la catedral de Burgos.* Caja Círculo. Burgos.