UNIDAD 9: Sucesiones. Límites

ACTIVIDADES-PÁG. 202

1. Los términos pedidos son:

a) $a_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$: 1, 3, 6, 10 y 15.

b) $b_n = 3 \cdot 2^{n-2}$: $\dfrac{3}{2}$, 3, 6, 12 y 24.

c) $c_n = (-1)^{n+1} \cdot n$: 1, - 2, 3, - 4 y 5.

d) $d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$: 1, 1, 2, 3 y 5

2. a) Las sumas parciales y la suma total son:

1 = 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, … , 1 + 2 + 3 + 4 + … + n = $\dfrac{n^2 + n}{2}$

b) Las sumas parciales y la suma total son:

$1^2 = 1$, $1^2 + 2^2 = 5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$, … , $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

3. Obtenemos:

1^er^ clavo = 0,01 euros.
2º clavo = 0,02 euros.
3^er^ clavo = 0,04 euros.
4º calvo = 0,08 euros.
………………………..
32º clavo = $0{,}01 \cdot 2^{31}$ euros.

Por el caballo pedía la suma de todos los términos anteriores:

$$S = \frac{0{,}01 \cdot 2^{31} \cdot 2 - 0{,}01}{2 - 1} = 0{,}01 \cdot (2^{32} - 1) \text{ euros.}$$

La sucesión es una progresión geométrica de razón r = 2. En total pedía 42 949 672, 95 euros.

ACTIVIDADES-PÁG. 219

1. Veamos que para n = 1 se cumple: $2 = 1^2 + 1$.

Supongamos que se cumple para n = p: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2p = p^2 + p$.

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2p + 2(p + 1) = (p^2 + p) + 2(p + 1) = p^2 + 3p + 2 = (p + 1)^2 + (p + 1)$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

2. Veamos que para n = 1 se cumple: $3^0 + 3^1 = \dfrac{3^2 - 1}{2} = 4$.

Supongamos que se cumple para n = p: $3^0 + 3^1 + \ldots + 3^p = \dfrac{3^{p+1} - 1}{2}$.

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$3^0 + 3^1 + \ldots + 3^p + 3^{p+1} = \frac{3^{p+1} - 1}{2} + 3^{p+1} = \frac{3^{p+2} - 1}{2}$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

3. Veamos que para n = 1 se cumple: $(2 - 1)^2 - 1 = 0 = \dot{8}$

Veamos que para n = 2 se cumple: $(4 - 1)^2 - 1 = 8 = \dot{8}$

Supongamos que se cumple para n = p: $(2p - 1)^2 - 1 = \dot{8}$

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$\left[(2p + 1)^2 - 1\right] - 1 = (2p + 1) - 1 = \left[(2p - 1) + 2\right]^2 - 1 =$$

$$= (2p - 1)^2 + 4(2p - 1) + 4 - 1 = \left[(2p - 1) - 1\right] + 8p = \dot{8} + \dot{8} = \dot{8}$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

4. Veamos que para n = 1 se cumple: $S_1 = a_1 = (1 + 1)! - 1! = 2! - 1! = 2 \cdot 1! - 1! = 1! \cdot (2 - 1) = 1! \cdot 1 = a_1$

Supongamos que se cumple para n = p: $S_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p = (p + 1)! - 1!$.

Veamos qué ocurre para n = p + 1:

$$S_{p+1} = [a_1 + a_2 + \ldots + a_p] + a_p + 1 = (p + 1)! - 1! + (p + 1) \cdot (p + 1)! =$$

$$= (1 + p + 1) \cdot (p + 1)! - 1! = (p + 2)! - 1!$$

Queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural.

ACTIVIDADES-PÁG. 221

1. a) Introducimos las sucesiones tecleando (sin espacios intermedios):

a(n) : = (1 - 4n) / (1 + 4n)   b(n) : = (4n + 1) / (4n)   c(n) : = (- 2)

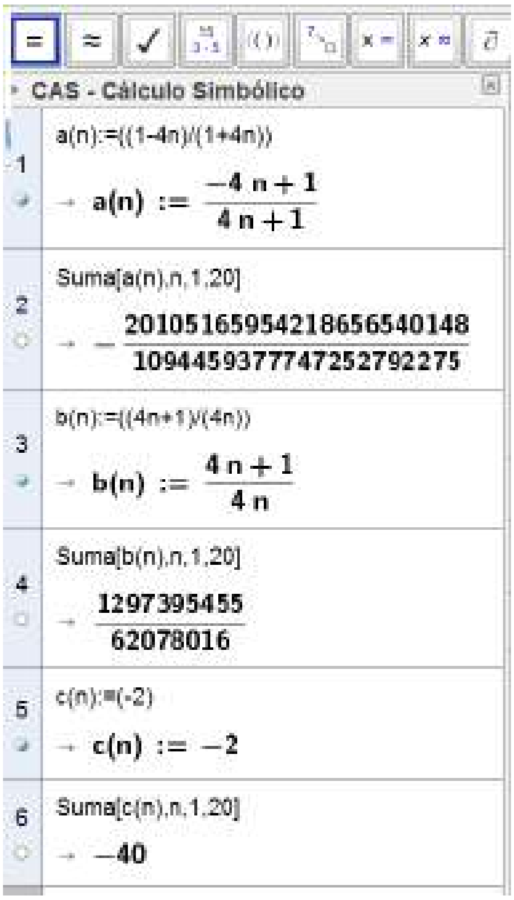
y después con las expresiones:

Suma [a(n), n, 1, 20]

Suma [b(n), n, 1, 20]

Suma [c(n), n, 1, 20]

Obtenemos los resultados que pueden verse en el gráfico.



b) Los límites de las soluciones del enunciado son:

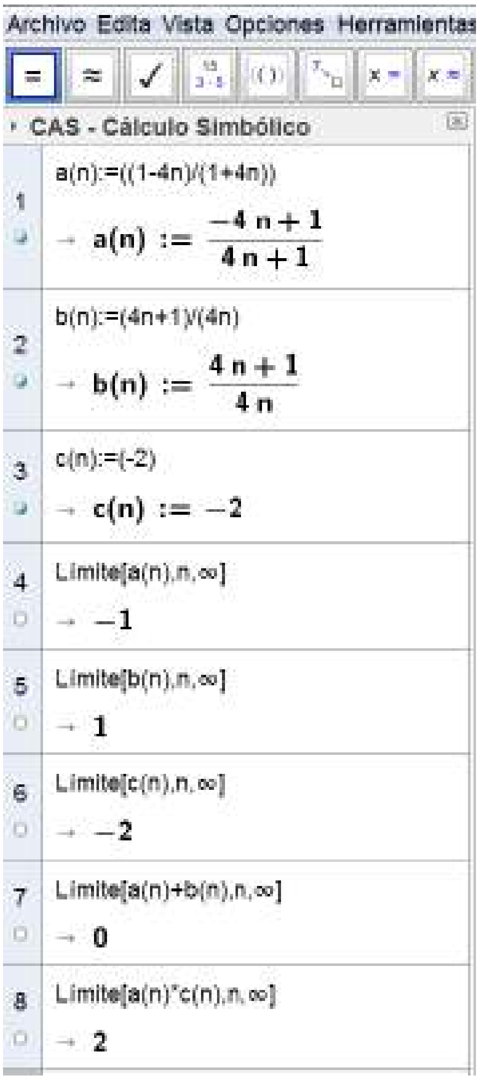
$$lím\ (a_n) = lím\ \left(\frac{1-4n}{1+4n}\right) = -1;\ lím(b_n) = lím\ \left(\frac{4n+1}{4n}\right) = 1 \text{ y lím } (c_n) = \text{lím } (-2) = -2$$

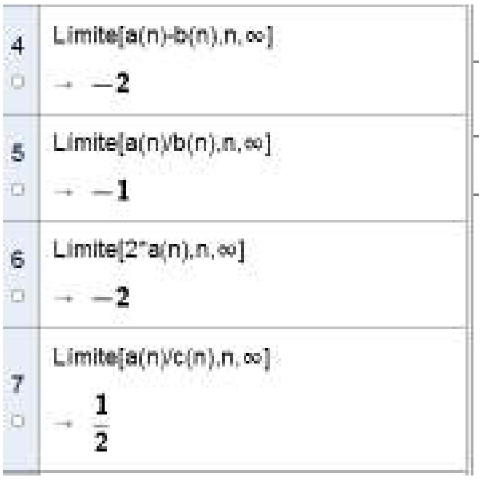
Como las sucesiones son convergentes, los límites pedidos son:

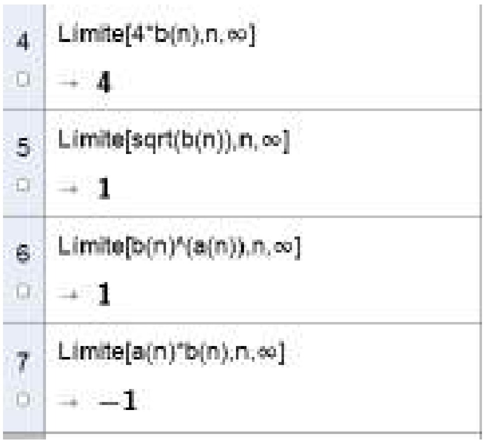
lím $(a_n + b_n) = 0$ lím $(a_n - b_n) = -2$ lím $(2 \cdot a_n) = -2$ lím $(4 \cdot b_n) = 4$ lím $(a_n \cdot b_n) = -1$

$\lim (a_n \cdot c_n) = 2 \quad \lim (a_n : b_n) = -1 \quad \lim (a_n : c_n) = 1/2 \quad \lim \sqrt{b_n} = 1 \quad \lim \left(b_n^{a_n}\right) = 1$

Los resultados anteriores pueden verse en las imágenes:







ACTIVIDADES-PÁG. 222

1. Las sucesiones son:

a) 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4…

b) 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, … , 5n – 3.

c) 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, … , 2^{n+1}

d) $2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \frac{37}{36}, \frac{50}{49}, \frac{65}{64}, \ldots, \frac{n^2+1}{n^2}$

e) 0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511, … , $(n^3 – 1)$.

f) 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, ……..

g) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, …, $3 \cdot 2^{n-1}$

h) 0,8; 0,88; 0,888, 0,8888, 0,88888, …

i) 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, …, $(n^2 + n + 1)$.

2. Los términos de las sucesiones son:

a) 0, 5, 14, 27, 44 y 65.

b) $\frac{-1}{3}, \frac{-3}{5}, \frac{-5}{7}, \frac{-7}{9}, \frac{-9}{11}\ y\ \frac{-11}{13}$

c) – 2, 4, - 8, 16, - 32 y 64

d) 6, 18, 54, 162, 486 y 1458

e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}\ y\ \frac{11}{729}$

f) $\frac{5}{2}, \frac{6}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{16}, \frac{9}{32}\ y\ \frac{10}{64}$

g) 2, 9, 28, 65, 126 y 217

h) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}\ y\ \frac{63}{64}$

3. Los términos de las sucesiones son:

a) 2, 1, - 1, - 4, - 8 y - 13

b) $2,\ 3,\ \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{21}{8}\ y\ \frac{43}{16}$

4. Las sucesiones son:

a) (a_n) = (2, 1, 0, - 1, … , 3 – n)

b) (b_n) = (- 1, 0, 1, 2, …, n – 2)

c) $(c_n) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots, \frac{2n+1}{n+1}\right)$

d) $(d_n) = (2, -2, 2, -2, \ldots, (-1)^{n+1} \cdot 2)$

e) $(e_n) = (-1, -2, -2, -3, -4, -4\ldots)$

f) $(f_n) = (-1, -3, -5, -7, \ldots, -2n + 1)$

5. La acotación de las sucesiones queda:

a) (a_n) acotada superiormente por $\frac{3}{2}$ e inferiormente por 0.

b) (b_n) acotada superiormente por – 1 e inferiormente por $-\frac{3}{2}$.

c) (c_n) acotada superiormente por 3 e inferiormente por $\frac{1}{2}$.

6. Las respuestas son:

a) (a_n) está acotada entre 1 y 2: $1 \le \frac{2n}{n+1} \le 2$.

Demostración:

$$1 \le \frac{2n}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad n + 1 \le 2n \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le n \quad \textit{cierto}$$

$$\frac{2n}{n+1} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2n \le 2n + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 2 \quad \textit{cierto}$$

b) (b_n) está acotada entre $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$: $\frac{-1}{3} \le \frac{2-n}{3n} \le \frac{1}{3}$.

Demostración:

$$-\frac{1}{3} \le \frac{2-n}{3n} \quad \Leftrightarrow \quad -3n \le 6 - 3n \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 6 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{cierto}$$

$$\frac{2-n}{3n} \le \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 3n \le 3n \quad \Leftrightarrow \quad -6n \le -6 \quad \Leftrightarrow 6n \ge 6 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 1 \ \textit{cierto}$$

c) (c_n) está acotada entre – 3 y 0: $-3 \le -\frac{3}{n} \le 0$.

Demostración:

$$-3 \le -\frac{3}{n} \quad \Leftrightarrow \quad -3n \le -3 \quad \Leftrightarrow \quad 3n \ge 3 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 1 \quad \textit{cierto}$$

$$-\frac{3}{n} \le 0, \ \textit{como}\ n > 0, \ \textit{entonces} - \frac{3}{n} \le 0.$$

7. Las sucesiones son:

a) $(a_n) = \left(-\frac{n}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, \ldots\right)$. Estrictamente decreciente.

b) (b_n) = 2; 2,1; 2,1 ; 2,11; 2,2; 2,2; 2,22…). Creciente.

c) (c_n) = (+ 1; + 1,2; + 1,22; + 1,222…). Estrictamente creciente.

d) $(d_n) = \left(\dfrac{2}{n+1}\right) = \left(1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{6}, \ldots\right)$. Estrictamente decreciente.

e) $(e_n) = \left(n^2 - 2\right)$ = (-1, 2, 7, …). Estrictamente creciente.

f) (f_n) = (- 1, - 1, - 1…). No es monótona, es constante.

8. Las soluciones son:

a) $(a_n) = \left(\dfrac{1-3n}{4}\right)$. Estrictamente decreciente.

Vamos a probar que $a_n > a_{n+1}$:

$$\frac{1-3n}{4} > \frac{1-3(n+1)}{4} \Leftrightarrow 1-3n > 1-3n-3 \Leftrightarrow 0 > -3$$

Con lo que, como esta desigualdad es siempre cierta, queda probado que $a_n > a_{n+1}$.

b) $(b_n) = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)$. Estrictamente creciente.

Vamos a probar que $b_n < b_{n+1}$:

$$\frac{n^2}{n^2+1} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2+1} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2n-1}{(n^2+1)\cdot(n^2+2n+2)} < 0$$

La última desigualdad es siempre cierta.

c) $(c_n) = \left[(-1)^n + n^2\right]$. Estrictamente creciente.

Vamos a probar que $c_n < c_{n+1}$:

$$(-1)^n + n^2 < (-1)^{n+1} + (n+1)^2 \Leftrightarrow (-1)^n + n^2 < (-1)^n \cdot (-1) + n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < 2n$$

Esta desigualdad es siempre cierta, puesto que n ≥ 1.

ACTIVIDADES-PÁG. 223

9. Las sucesiones buscadas son:

$$(a_n) + (b_n) = \left(\frac{2n-3}{n} + \frac{3n}{n+2}\right) = \left(\frac{5n^2+n-6}{n^2+2n}\right)$$

$$(a_n) - (b_n) = \left(\frac{2n-3}{n} - \frac{3n}{n+2}\right) = \left(\frac{-n^2+n-6}{n^2+2n}\right)$$

$$(b_n) - (a_n) = \left(\frac{3n}{n+2} - \frac{2n-3}{n}\right) = \left(\frac{n^2-n+6}{n^2+2n}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot(a_n) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-3}{n}\right) = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)$$

$$(a_n)\cdot(b_n) = \left(\frac{2n-3}{n}\cdot\frac{3n}{n+2}\right) = \left(\frac{6n^2-9n}{n^2+2n}\right)$$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{\frac{2n-3}{n}}{\frac{3n}{n+2}}\right) = \left(\frac{2n^2+n-6}{3n^2}\right)$$

$$\frac{(b_n)}{(a_n)} = \left(\frac{\frac{3n}{n+2}}{\frac{2n-3}{n}}\right) = \left(\frac{3n^2}{2n^2+n-6}\right)$$

10. Las respuestas son:

(a_n) está acotada entre 1 y 6: $1 \le \frac{n+5}{n} \le 6.$

(a_n) es monótona estrictamente decreciente. Veamos que $a_n > a_{n+1}$:

$$\frac{n+5}{n} > \frac{n+6}{n+1} \iff \frac{n+5}{n} - \frac{n+6}{n+1} = \frac{5}{n^2+n} > 0$$

A partir del tercer término: $\frac{n+5}{n} < 3 \iff n \ge 3.$

11. Los límites son:

a) lím (3n – 2) = $+\infty$

b) $lím\left(4n^2-\dfrac{6n+7}{2n+1}\right)=+\infty$

c) $lím\left(-\dfrac{7}{n}\right)=0$

d) $lím\left(4n+2+\dfrac{7}{n}\right)=+\infty$

e) lím (- n^3 – n) = $-\infty$

f) $lím\left(\sqrt{n^3}-\sqrt{8}\right)=+\infty$

g) $lím\left(\dfrac{-3}{n+2}\cdot n^2\right)\left[0\cdot+\infty\right]=lím\left(\dfrac{-3n^2}{n+2}\right)=-\infty$

h) $lím\left(7+\dfrac{1}{n^2}\right)=7$

i) $lím\left(\dfrac{4}{n+2}\cdot(-n)\right)\left[0\cdot+\infty\right]=lím\left(\dfrac{-4n}{n+2}\right)=-4$

j) $lím\left(\dfrac{2}{n^2}\right)^{\frac{3n}{2n+1}}=0$

k) $lím\,(2n-5)^{\frac{-2n+1}{n}}=0$

l) $lím\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}=0$

m) $lím\;2^{-3n}=0$

n) $lím\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^{-n}=+\infty$

o) $lím\left(n^2+\dfrac{1}{3n}\right)^{42}=+\infty$

p) $lím \left(\dfrac{n^3 + 2}{n^2 + 7} \right)^{\frac{1 - 5n^2}{n^2 + 3}} = 0$

q) $lím \dfrac{(n + 2)^2}{n^2 + 2} = 1$

r) $lím \left(\dfrac{1}{n^2 + 6n} \right)^{\sqrt{\frac{4n^3 + 5}{n^3 + n}}} = 0$

12. Los límites son:

a) $lím \dfrac{3n^2 - 4n}{6n^3 + 5} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = 0$

b) $lím \dfrac{7 - 4n^2}{n^2 + 6n - 2} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = -4$

c) $lím \dfrac{5n^5 + 6n^4 - 3}{2n^2 + 5n + 1} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = +\infty$

d) $lím \left(\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n \right) [\infty - \infty] = lím \dfrac{4n^2 + 3n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = \dfrac{3}{4}$

e) $lím \left(\dfrac{n^3 - 2}{n^2} - \dfrac{n^3}{n^2 + 1} \right) [\infty - \infty] = lím \dfrac{\left(n^3 - 2\right)(n^2 + 1) - n^3 \cdot n^2}{n^2 \cdot (n^2 + 1)} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = lím \dfrac{n^3 - 2n^2 - 2}{n^4 + n^2} = 0$

f) $lím \left[(n + 2)^2 - (n - 2)^3 \right] [\infty - \infty] = lím \, (-n^3 + 7n^2 - 8n + 12) = -\infty$

g) $lím \left(\sqrt{n - 3} - \sqrt{n - 6} \right) [\infty - \infty] = lím \dfrac{3}{\sqrt{n - 3} + \sqrt{n - 6}} = 0$

h) $lím \left[\sqrt{9n^2 + 7} - (3n + 2) \right] [\infty - \infty] = lím \dfrac{-12n + 3}{\sqrt{9n^2 + 7} + (3n + 2)} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = \dfrac{-12}{6} = -2$

i) $lím \dfrac{1}{\sqrt{2n + 5} - \sqrt{2n - 3}} [\infty - \infty] = lím \dfrac{\sqrt{2n + 5} + \sqrt{2n - 3}}{8} = +\infty$

j) $lím \sqrt{\dfrac{n^5 - 7n}{4n^5 + n^4 + 2}} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

k) $lím \left(\frac{n^3 - 2n^2 + 3}{n^3 - 3}\right)^{\frac{2n^2+5}{n}} = e^{lím \frac{2n^2+5}{n} \cdot \left[\frac{n^3-2n^2+3}{n^3-3} - 1\right]} = e^{lím \frac{-4n^4+2n^2+30}{n^4-3n}} = e^{-4}$

l) $lím \left(\frac{4n^2 - 6}{5 + n^2}\right)^{\frac{n^3}{7+2n^3}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

m) $lím \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) [\infty - \infty] = lím \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$

n) $lím \left[\sqrt{n+3} \cdot \left(\sqrt{n-5} - \sqrt{n-1}\right)\right] = lím \left(\sqrt{n^2 - 2n - 15} - \sqrt{n^2 + 2n - 3}\right)[\infty - \infty] =$

$$= lím \frac{-4n - 12}{\sqrt{n^2 - 2n - 15} + \sqrt{n^2 + 2n - 3}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -2$$

o) $lím \left(\frac{1 + 2 + ... + n}{n^2}\right) = lím \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2} = lím \frac{n^2 + n}{2n^2} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{2}$

p) $lím \left(\frac{2n^2 + 5}{n^2 + 8}\right)^{\frac{5+n^3}{n^2+2n}} = 2^{+\infty} = +\infty$

q) $lím \left(\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^2} + ... + \frac{2n}{n^2}\right) = lím \left(\frac{2 + 4 + ... + 2n}{n^2}\right) = lím \frac{n^2 + n}{n^2} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$

r) $lím \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}} = e^{lím \left((\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}) \cdot \left(\frac{n+1}{n} - 1\right)\right)} = e^{+\infty} = +\infty$

ACTIVIDADES-PÁG. 224

13. Los metros de perforación del túnel siguen una progresión geométrica de razón 1,05 ya que los primeros días se perfora:

$a_1 = 3$ m, $a_2 = 3 \cdot 1{,}05$ m, $a_3 = 3 \cdot 1{,}05^2$ m, $a_4 = 3 \cdot 1{,}05^3$ m…

Teniendo en cuenta la suma de n términos de una progresión geométrica, $S = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$, obtenemos:

$$6000 = \frac{3 \cdot 1{,}05^n - 3}{1{,}05 - 1} \Rightarrow 3 \cdot 1{,}05^n = 303 \Rightarrow 1{,}05^n = 101 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 101}{\log 1{,}05} = 94{,}59 \approx 95 \text{ días}$$

14. Los límites son:

a) $lím \left(\dfrac{3n^2 - 4n + 5}{3n^2 + 2}\right)^{\frac{n^2 - 5}{3n + 2}} \left[1^\infty\right] = e^{-\frac{4}{9}}$

b) $lím \left(\dfrac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}\right) \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = lím \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1$

c) $lím \left(\dfrac{\sqrt{n^2 + 2} - n}{\sqrt{4n^2 - 5} - 2n}\right) \left[\infty - \infty\right] = lím \dfrac{2 \cdot \left(\sqrt{4n^2 - 5} + 2n\right)}{- 5 \cdot \left(\sqrt{n^2 + 2} + n\right)} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{-4}{5}$

d) $lím \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = lím \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,!} : \dfrac{n^n}{n\,!} = lím \dfrac{(n+1)^{n+1} \cdot n\,!}{n^n \cdot (n+1)\,!} = lím \dfrac{(n+1)^{n+1} \cdot n\,!}{(n+1) \cdot n\,! \cdot n^n} = lím \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e$

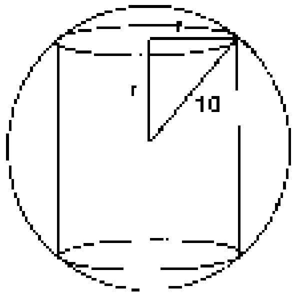
15. Las sucesiones asociadas a los cuadrados son:

Lados	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$	…	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$
Perímetros	4	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	…	$4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$
Áreas	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Las sucesiones asociadas a los cuadrados son:

Lados	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
Perímetros	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	…	$3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
Áreas	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	$\frac{\sqrt{3}}{256}$	$\frac{\sqrt{3}}{1024}$	…	$\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

16. Las respuestas a los distintos apartados son:



a) El primer cilindro ha de tener la altura de longitud doble que el radio de la base. La segunda esfera tendrá por radio el radio de al base del cilindro en el que se encaja.

Primer cilindro: $r_1^2 + r_1^2 = 10^2 \Rightarrow r_1 = \dfrac{10}{\sqrt{2}}\ m.$

Segundo cilindro: $r_2^2 + r_2^2 = \left(\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow r_2 = 5\ m.$

Tercer cilindro: $r_3^2 + r_3^2 = 5^2 \Rightarrow r_3 = \dfrac{5}{\sqrt{2}}\ m.$

La sucesión de los radios de los cilindros es: $(r_c) = \left(\dfrac{10}{\sqrt{2}},\ 5,\ \dfrac{5}{\sqrt{2}},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\ldots\right).$

b) La sucesión del radio de las esferas es: $(R_e) = \left(10,\ \dfrac{10}{\sqrt{2}},\ 5,\ \dfrac{5}{\sqrt{2}},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\ldots\right).$

La sucesión de los volúmenos de las esferas es: $(V_e) = \left(\dfrac{4000\pi}{3},\ \dfrac{2000\pi}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{500\pi}{3},\ \dfrac{250\pi}{3\sqrt{2}},\ldots\right)$, es una sucesión geométrica de razón $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

La sucesión de los volúmenes de los cilindros es: $(V_c) = \left(\dfrac{1000\pi}{\sqrt{2}},\ 250\pi,\ \dfrac{125\pi}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1250\pi}{4},\ldots\right)$, es una sucesión geométrica de razón $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

17. Operando, obtenemos, en cada caso:

a) El valor del límite es:

$$lím\left[\left(n^2 + a\cdot n\right)^{1/2} - \left(n^2 - a\cdot n\right)^{1/2}\right]\left[\infty - \infty\right] = lím\ \frac{2an}{\sqrt{n^2 + an} + \sqrt{n^2 - an}}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = a$$

Por tanto, con a ≠ 0 obtenemos $a = \dfrac{1}{2}$.

b) El valor del límite es: $lím\left[\dfrac{n^2 + n}{n^2 + 1}\right]^{a\cdot n}\ \left[1^\infty\right] = e^a$.

Tenemos que si con a ≠ 0 obtenemos a = - 1.

18. La respuesta a las cuestiones es:

a) Para realizar la tabla pedida, en **Vista** hacemos aparecer **Hoja de Cálculo**.

Escribimos en ella lo que aparece en la tabla adjunta.

	A	B
1	**Profundidad**	**Luminosidad**
2	**0**	**100**
3	=A2+1 (Enter)	=B2-(20/100)*B2 (Enter)

Aparecen los valores 1 y 80, respectivamente.

	A	B
1	**Profundidad**	**Luminosidad**
2	**0**	**100**
3	1	80
4		

Seleccionamos cada una de estas dos celdas y desde el vértice inferior derecho, y con el botón derecho de ratón presionado, arrastramos hacia abajo hasta el valor que deseemos.

En la tabla que sigue aparecen los diez primeros valores.

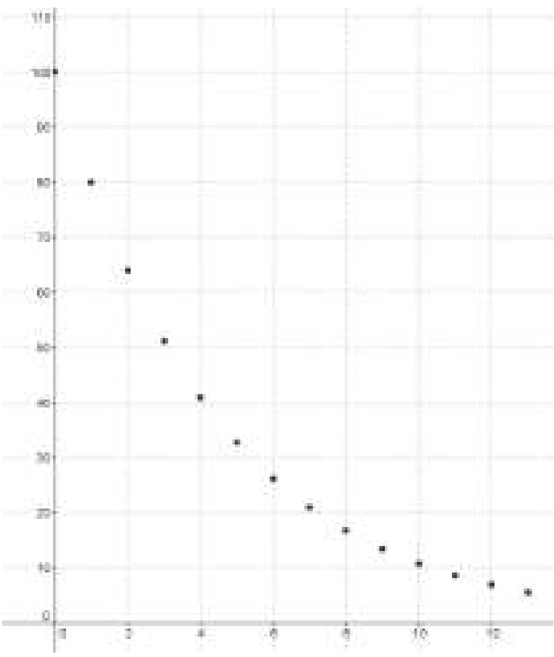
Una vez realizada la tabla, seleccionamos ambas columnas y con el botón derecho del ratón desplegamos el menú y elegimos **Crea lista de puntos**.

Aparecen los puntos dibujados en la **Vista Gráfica** (será necesario ajustar los ejes para poder ver los puntos).

También podemos ver en la **Ventana algebraica** la lista de dichos puntos.

Hoja de Cálculo

	A	B
1	**Profundidad**	**Luminosidad**
2	**0**	**100**
3	1	80
4	2	64
5	3	51.2
6	4	40.96
7	5	32.77
8	6	26.21
9	7	20.97
10	8	16.78
11	9	13.42
12	10	10.74
13		



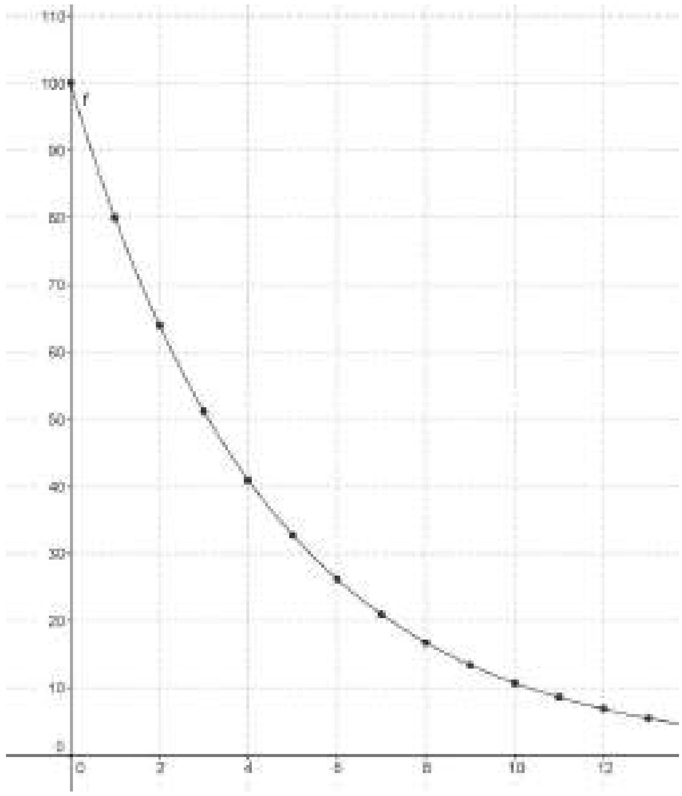
Podemos encontrar la curva que se ajuste a los puntos dibujados y su ecuación, tecleando en la **Ventana de entrada**:

Si[x>0,AjusteExp[lista1]]

Obtenemos la función de expresión:

$$f(x) = 100 \cdot e^{-0,22x}$$

La curva puede verse en el dibujo de abajo.



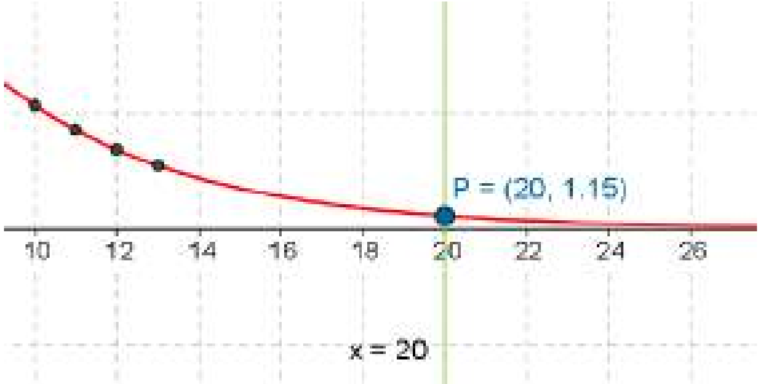
b) La intensidad de luz que tiene el buzo al bajar 0,5 metros será: $100 \cdot (0,80)^{0,50} = 89,44$.

También la podemos calcular con la función anterior, es decir, $f(0,50) = 100 \cdot e^{(-0,22 \cdot 0,50)} = 89,58$.

c) Si baja a 20 metros la luz que detectará será: $100 \cdot (0{,}80)^{20} = 1{,}15$

También, $f(20) = 100 \cdot e^{(-0{,}22 \cdot 20)} = 1{,}22$

Gráficamente podemos hallarlo cortando la curva con la recta x = 20 y determinando el punto de corte que es P (20; 1,15).

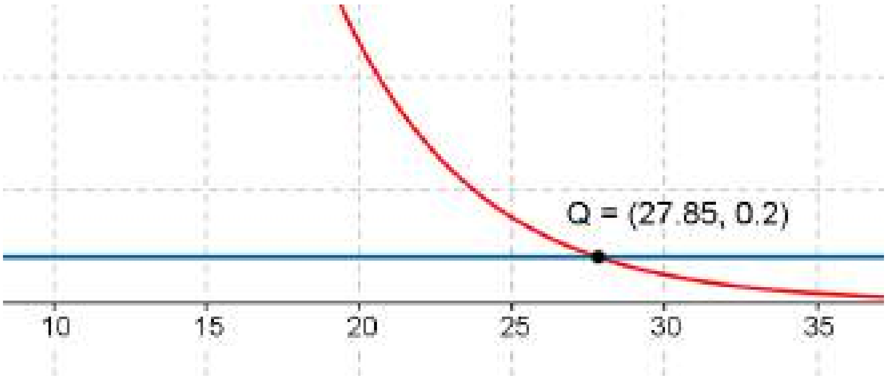


d) Para determinar la profundidad a la que puede bajar y aún detectar cierta luminosidad la podemos calcular de la forma que sigue:

$$100 \cdot (0{,}80)^x = 0{,}2 \Rightarrow (0{,}80)^x = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}002 \Rightarrow x \cdot \ln 0{,}80 = \ln 0{,}002 \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}002}{\ln 0{,}80} = 27{,}85$$

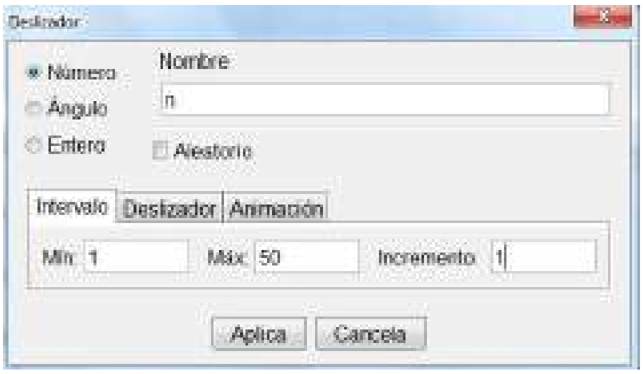
$$100 \cdot e^{-0{,}22x} = 0{,}2 \Rightarrow e^{-0{,}22x} = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}002 \Rightarrow -0{,}22\,x \cdot \ln e = \ln 0{,}002 \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}002}{-0{,}22} = 28{,}25$$

Gráficamente podemos hallarlo cortando la curva con la recta y = 0,2 y determinando el punto de corte que es Q (27,85; 0,2).



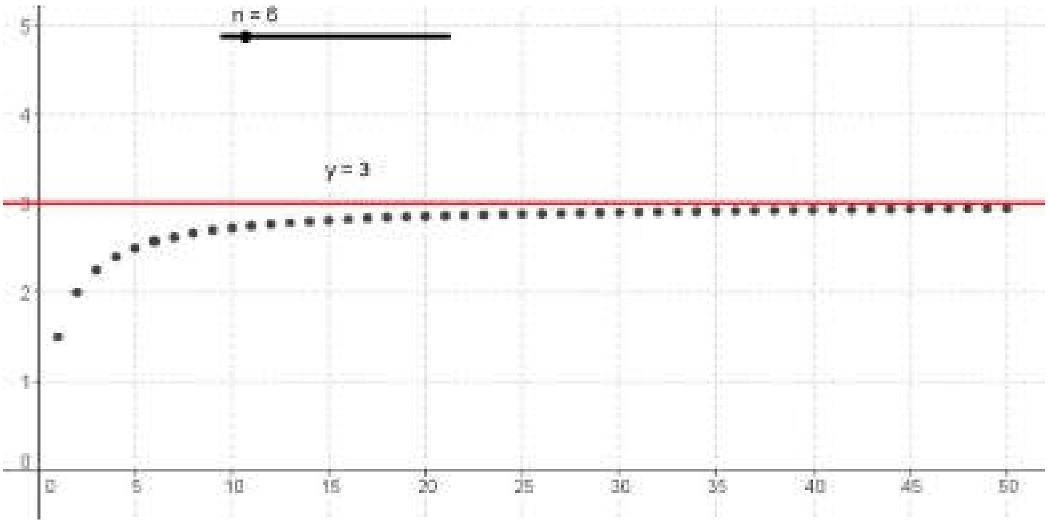
Para representar gráficamente una sucesión, por ejemplo $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2 + n}$, creamos un deslizador con las condiciones que aparecen en el gráfico.

Nombre: n
Mínimo 1; Máximo 50 e Incremento 1.



En el campo de entrada introducimos: (n,(3n^2)/(n^2+n)) y aparece un punto. En el Menú contextual del punto activamos Propiedades del objeto, Básico y Muestra rastro.

Movemos el deslizador y van apareciendo los puntos de la sucesión que tienden al límite 3.



ACTIVIDADES-PÁG. 225

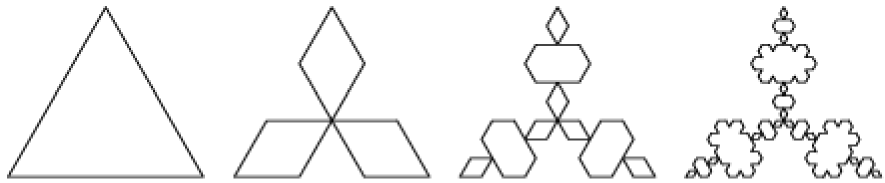
Explica la formación del copo de nieve: Dibujamos un triángulo equilátero, dividimos cada lado en tres partes y sobre la parte central, dibujamos otro triángulo equilátero, en el siguiente paso sobre cada uno de los 6 triángulos equiláteros repetimos el proceso e iterando obtenemos esta curva.
Consideramos que el triángulo equilátero inicial tiene de lado a unidades.

NÚMERO DE CURVA	PERÍMETRO	ÁREA
1	3a	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$
2	12a/3	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}$
3	48a/9	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4}$
4	192a/27	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{81\cdot 4}+48\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{36}+12\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{729\cdot 4}$
enésima	$\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a$	$\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$

Como vemos en la tabla la sucesión de los perímetros es una sucesión geométrica de razón 4/3. Por lo que su longitud es infinita pues $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}} a = +\infty$. La sucesión de las áreas es una sucesión geométrica de razón 4/9. Su superficie es finita pues: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

La propiedad que tienen estas curvas es que siendo su longitud infinita encierran una superficie finita.

La curva “Anticopo de nieve” es la que vemos en el dibujo:



Es la configuración opuesta al copo de nieve. Se forma del mismo modo pero metiendo los triángulos hacia adentro.

Se obtienen los mismos resultados que en la anterior y tienen la misma propiedad.

UNIDAD 10: Propiedades globales de las funciones

ACTIVIDADES-PÁG. 226

1. El día 31 de julio ocupará una superficie de $1\cdot 1{,}08^{31} = 10{,}87$ cm^2

2. La gráfica buscada podría ser la siguiente: