1 Funciones lineales

Página 133

1. Copia y completa, en tu cuaderno, las igualdades siguientes:

a) –50 °C = … °F **b) 95 °F = … °C**

La expresión que liga la temperatura en grados centígrados y en grados Fahrenheit es: $y = 32 + 1{,}8x$ siendo x = temperatura en °C, y = temperatura en °F.

a) $x = -50 \rightarrow y = 32 + 1{,}8(-50) = 32 - 90 = -58$ °F $\rightarrow$ –50 °C = –58 °F

b) $y = 95 \rightarrow 95 = 32 + 1{,}8x \rightarrow x = \dfrac{95 - 32}{1{,}8} = 35 \rightarrow$ 95 °F = 35 °C

2. Un termómetro clínico abarca temperaturas desde 35 °C a 41 °C. ¿Cuál es la gama en °F?

Si $x = 35 \rightarrow y = 32 + 1{,}8 \cdot 35 = 32 + 63 = 95$

Si $x = 41 \rightarrow y = 32 + 1{,}8 \cdot 41 = 32 + 73{,}8 = 105{,}8$

La gama, en °F, es de 95 °F a 105,8 °F.

3. La temperatura normal de una persona sana es de 36,5 °C. ¿Cuál es en °F?

Si $x = 36{,}5 \rightarrow y = 32 + 1{,}8 \cdot 36{,}5 = 32 + 65{,}7 = 97{,}7$

La temperatura de una persona sana, en °F, es de 97,7 °F.

4. a) ¿Qué longitud alcanzará el muelle del ejemplo anterior si le colgamos una pesa de 4,6 kg?

b) ¿Qué peso hay que colgar del muelle para que alcance una longitud de 1 m?

a) $x = 4{,}6 \rightarrow y = 30 + 15 \cdot 4{,}6 = 30 + 69 = 99$

El muelle alcanzará una longitud de 99 cm.

b) 1 m = 100 cm

Si $y = 100 \rightarrow 100 = 30 + 15x \rightarrow x = \dfrac{100 - 30}{15} \approx 4{,}667$

Hay que colgar un peso de 4,667 kg, aproximadamente.

Página 134

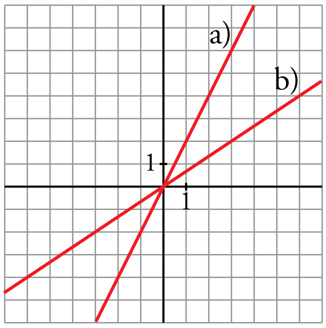
5. Representa:

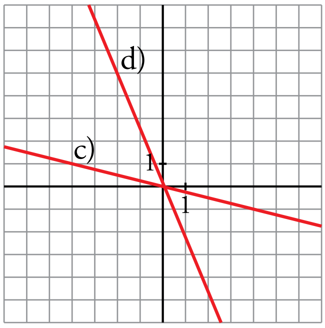
a) $y = 2x$

b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

d) $y = -\frac{7}{3}x$





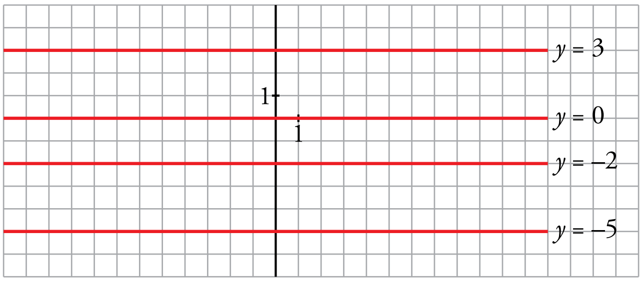
6. Representa:

a) $y = 3$

b) $y = -2$

c) $y = 0$

d) $y = -5$



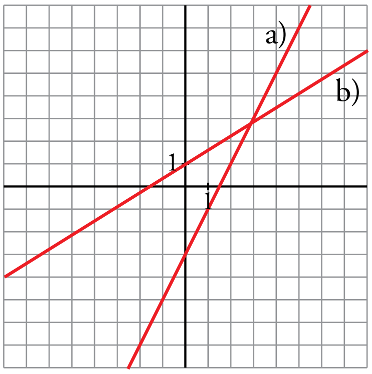
7. Representa:

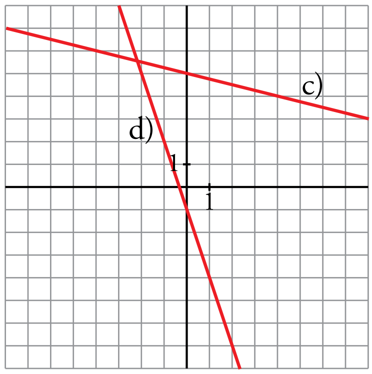
a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

d) $y = -3x - 1$

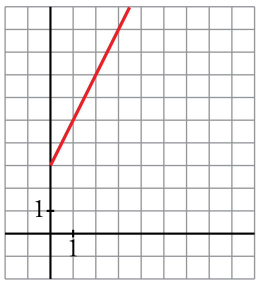




8. Un móvil, en el instante inicial, se encuentra situado a 3 m del origen y se aleja progresivamente de este con una velocidad de 2 m/s.

Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

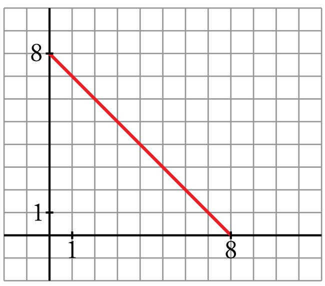
$y = 3 + 2x$, donde y es la distancia al origen en metros y x es el tiempo en segundos.



9. Un móvil, que en el instante inicial llevaba una velocidad de 8 m/s, frena de repente con una aceleración de –1 m/s².

Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.

$y = 8 - x$, donde y es la velocidad en m/s y x es el tiempo en segundos.



Página 135

10. Halla la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–3, –5) y tiene una pendiente de $\frac{4}{9}$.

b) Pasa por (0, –3) y tiene una pendiente de 4.

c) Pasa por (3, –5) y por (–4, 7).

a) $y + 5 = \frac{4}{9}(x + 3) \rightarrow y = \frac{4}{9}x - \frac{11}{3}$

b) $y + 3 = 4x \rightarrow y = 4x - 3$

c) $m = \frac{7 - (-5)}{-4 - 3} = \frac{12}{-7} = -\frac{12}{7}$

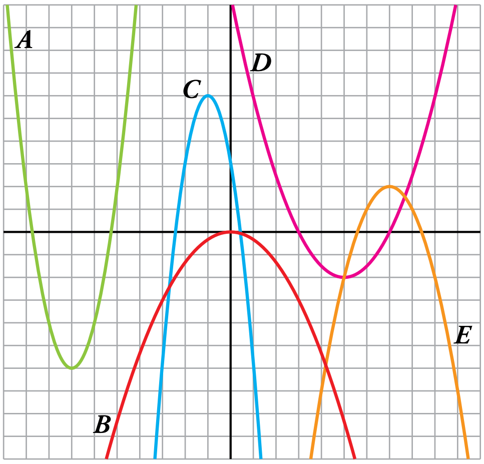
$y + 5 = -\frac{12}{7}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{12}{7}x + \frac{1}{7}$

2 Funciones cuadráticas. Parábolas

Página 137

1. Asocia cada uno de los coeficientes de la x^2 con su correspondiente parábola:

- $a = -1$
- $a = 2$
- $a = -\dfrac{1}{3}$
- $a = \dfrac{1}{2}$
- $a = -3$



$a = -1 \rightarrow E$ $\quad$ $a = 2 \rightarrow A$ $\quad$ $a = -\dfrac{1}{3} \rightarrow B$

$a = \dfrac{1}{2} \rightarrow D$ $\quad$ $a = -3 \rightarrow C$

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 2$ $\quad$ **b)** $y = -2x^2 - 2x - 3$ $\quad$ **c)** $y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

d) $y = -x^2 + 4$ $\quad$ **e)** $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$ $\quad$ **f)** $y = 3x^2 + 6x + 4$

a) $y = x^2 - 2x + 2$

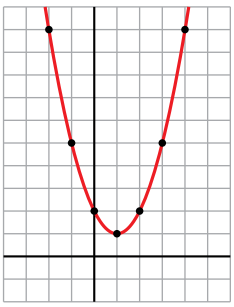
Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 1 \rightarrow V(1, 1)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	10	5	2	1	2	5	10

Vemos que a medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes crecen, por lo tanto, la parábola no cortará al eje X.



$y = x^2 - 2x + 2$

b) $y = -2x^2 - 2x - 3$

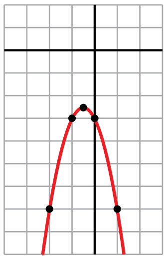
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Ordenada: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} \rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y	–7	–3	$-\frac{5}{2}$	–3	–7

A medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes decrecen, por tanto, la gráfica no corta al eje X.



$y = -2x^2 - 2x - 3$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{-1}{2/3} = -\frac{3}{2} \rightarrow$ Ordenada: $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{4} \rightarrow V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

Tabla de valores:

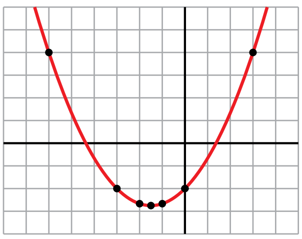
x	–6	–3	–2	$-\frac{3}{2}$	–1	0	3
y	4	–2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{8}{3}$	–2	4

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{3}x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

La parábola corta al eje de abscisas

en $\left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, 0\right)$.



$y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

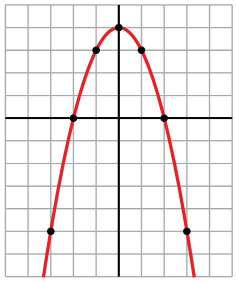
d) $y = -x^2 + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-2} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 4 \rightarrow V(0, 4)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Observamos que obtenemos en la tabla todos los cortes con los ejes:



$y = -x^2 + 4$

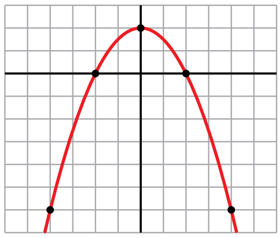
e) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-1} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 2 \rightarrow V(0, 2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	–6	0	2	0	–6

Obtenemos en la tabla todos los puntos de corte con los ejes:



$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

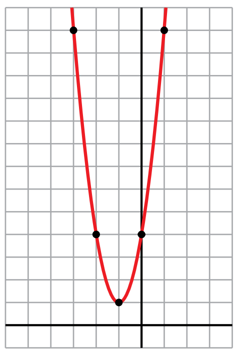
f) $y = 3x^2 + 6x + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{-6}{6} = -1 \rightarrow$ Ordenada: $f(-1) = 1 \rightarrow V(-1, 1)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1
y	–13	4	1	4	13

Los valores de las ordenadas crecen a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.



$y = 3x^2 + 6x + 4$

3. Dibuja en tu cuaderno la representación gráfica de estas funciones cuadráticas:

a) $y = (x - 1) \cdot (x - 3)$ **b)** $y = 2(x - 2)^2$

c) $y = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (x - 2)$ **d)** $y = (x - 1)^2 + 5$

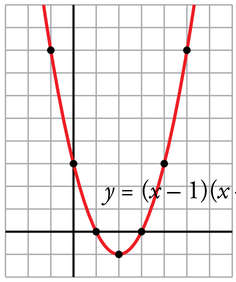
a) $y = (x - 1) \cdot (x - 3) \;\rightarrow\; y = x^2 - 4x + 3$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{2} = 2 \;\rightarrow$ Ordenada: $f(2) = -1 \;\rightarrow\; V(2, -1)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8



b) $y = 2(x - 2)^2 \;\rightarrow\; y = 2x^2 - 8x + 8$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{8}{4} = 2 \;\rightarrow$ Ordenada: $f(2) = 0 \;\rightarrow\; V(2, 0)$

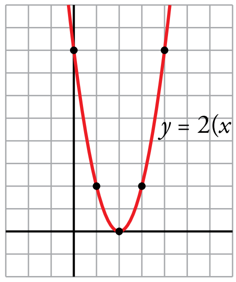
Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	8	2	0	2	8

Solo hemos obtenido un único punto de corte con el eje de abscisas, veamos si hay más:

$y = 0 \;\rightarrow\; 2(x - 2)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

La parábola corta al eje de abscisas solamente en el punto (2, 0).



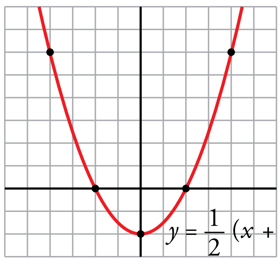
c) $y = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (x - 2) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{0}{1} = 0 \;\rightarrow$ Ordenada: $f(0) = -2 \;\rightarrow\; V(0, -2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	6	0	–2	0	6



d) $y = (x - 1)^2 + 5 \;\rightarrow\; y = x^2 - 2x + 6$

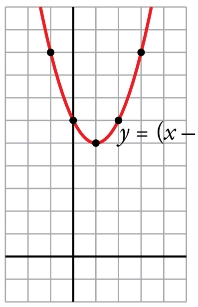
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \;\rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 5 \;\rightarrow\; V(1, 5)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3
y	9	6	5	6	9

Las ordenadas aumentan a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.



3 Funciones de proporcionalidad inversa

Página 138

1. Representa las siguientes funciones:

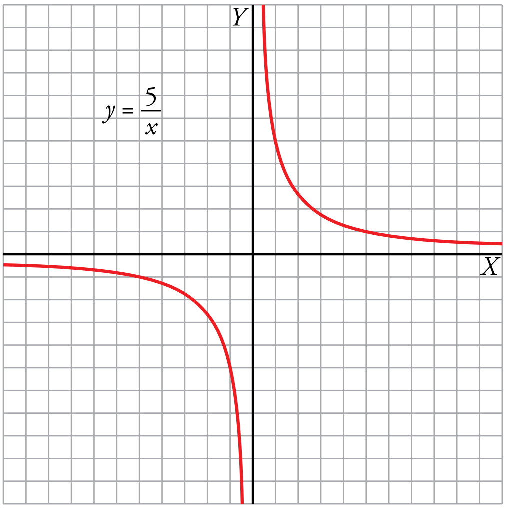
a) $y = \dfrac{5}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

- $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–10	–5	–1	–0,5	0,5	1	5	10
y	–1/2	–1	–5	–10	10	5	1	1/2

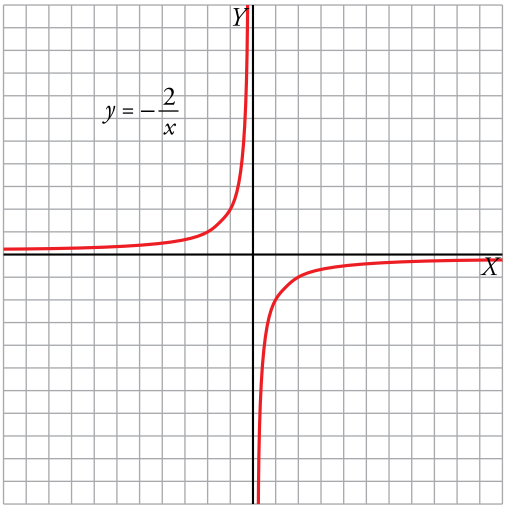


b) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

- $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4
y	1/2	1	2	4	–4	–2	–1	–1/2

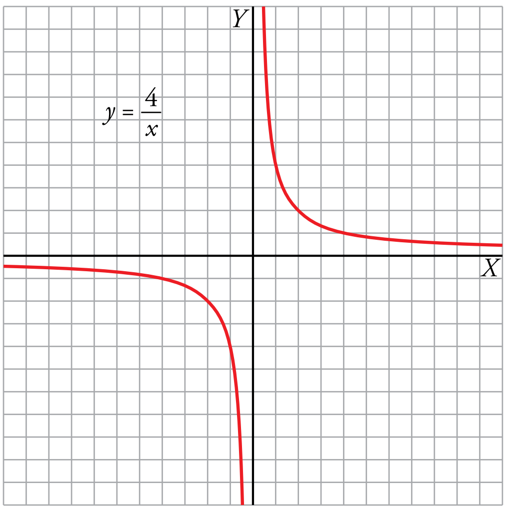


c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

- $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–1/2	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	1/2



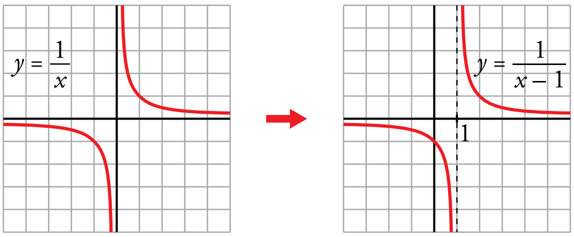
2. Representa estas funciones y halla su dominio:

a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+1}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+2}$

a) $y = \dfrac{1}{x-1} \rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
- $x = 1$ es asíntota vertical

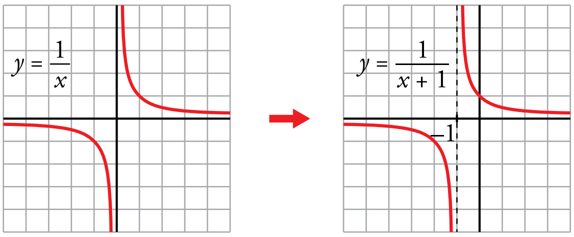
  $y = 0$ es asíntota horizontal



b) $y = \dfrac{1}{x+1} \rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
- $x = -1$ es asíntota vertical

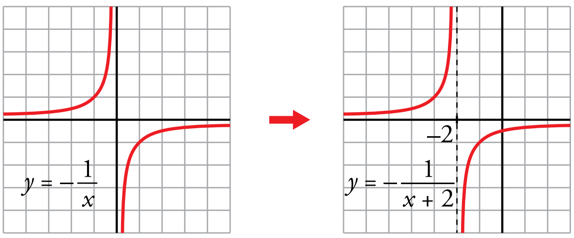
  $y = 0$ es asíntota horizontal



c) $y = -\dfrac{1}{x+2} \rightarrow y = -\dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 2 unidades a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $x = -2$ es asíntota vertical

  $y = 0$ es asíntota horizontal



4 Funciones radicales

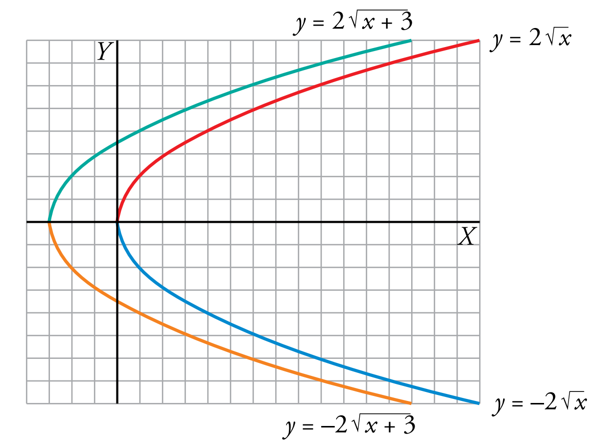
Página 139

1. Representa las siguientes funciones y halla el dominio de definición de cada una:

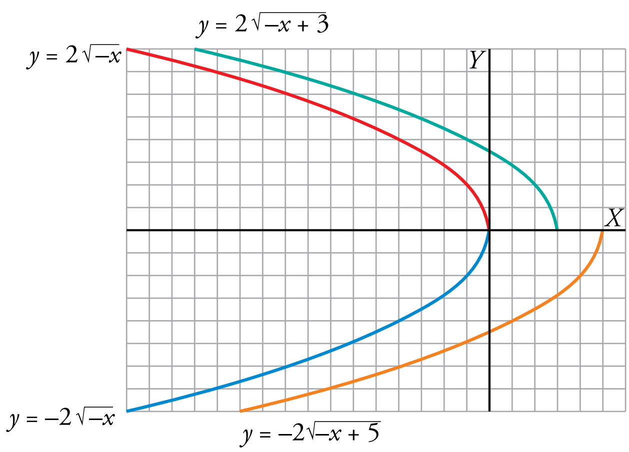
a) $y = 2\sqrt{x}$ **b)** $y = -2\sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{x+3}$ **d)** $y = -2\sqrt{x+3}$

e) $y = 2\sqrt{-x}$ **f)** $y = -2\sqrt{-x}$ **g)** $y = 2\sqrt{-x+3}$ **h)** $y = -2\sqrt{-x+5}$

a) b) c) d)



e) f) g) h)



Los dominios de definición son:

a) $[0, +\infty)$ b) $[0, +\infty)$ c) $[-3, +\infty)$ d) $[-3, +\infty)$

e) $(-\infty, 0]$ f) $(-\infty, 0]$ g) $(-\infty, 3]$ h) $(-\infty, 5]$

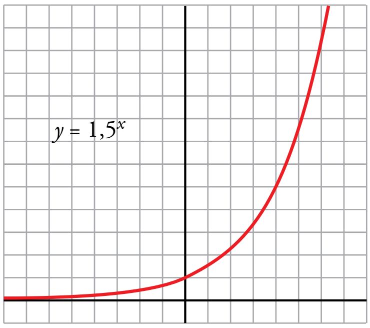
5 Funciones exponenciales

Página 140

1. Calcula los valores de la función $y = 1{,}5^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –6 y 6. Representa la función.

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

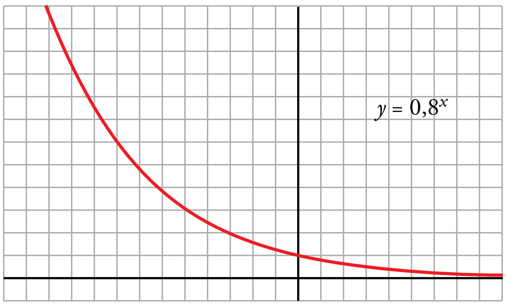
x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	0,09	0,13	0,20	0,30	0,44	0,67	1	1,5	2,25	3,38	5,06	7,59	11,39



2. Calcula los valores de la función $y = 0{,}8^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –8 y 8. Representa la función.

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5,96	4,77	3,81	3,05	2,44	1,95	1,56	1,25	1	0,8	0,64	0,51	0,41	0,33	0,26	0,21	0,17



3. **La función $y = 5^{0,2x}$ puede ponerse de forma exponencial $y = a^x$ teniendo en cuenta que $5^{0,2x} = (5^{0,2})^x$.**

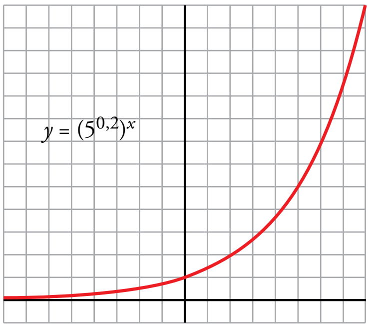
a) Calcula $5^{0,2}$ y guarda el resultado en la memoria: 5 $\boxed{x^y}$ 0,2 $\boxed{=}$ $\boxed{Min}$.

b) Representa la función dando valores a x. Por ejemplo, para $x = 4$: $\boxed{MR}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{3.62}$.

a) $y = 5^{0,2x} \rightarrow y = (5^{0,2})^x$ con $5^{0,2} = 1,379729\ldots$

b) Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,08	0,11	0,14	0,2	0,28	0,38	0,53	0,72	1	1,38	1,90	2,63	3,62	5	6,90	9,52	13,13



Ejercicios y problemas

Página 141

Practica

Funciones lineales

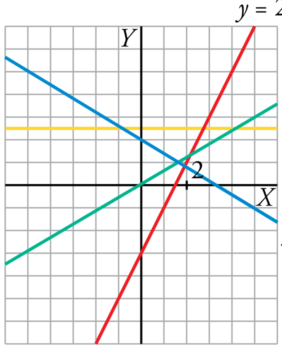
1. **Representa las siguientes funciones lineales:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x+10}{5}$

d) $y = 2{,}5$



2. **Dados la pendiente y un punto, calcula en cada caso la ecuación de la recta:**

a) $P(0, 0)$, $m = 1$

b) $P(2, -1)$, $m = -2$

c) $A(-2, 1)$, $m = \frac{1}{2}$

d) $A(1, 3)$, $m = -\frac{5}{3}$

En todos los apartados buscamos la ecuación de una recta $\to$ $y = mx + n$

a) $m = 1 \to y = x + n$

Pasa por $P(0, 0) \to 0 = 0 + n \to n = 0$

Por tanto, $y = x$.

b) $m = -2 \to y = -2x + n$

Pasa por $P(2, -1) \to -1 = -2 \cdot 2 + n \to n = 3$

Por tanto, $y = -2x + 3$.

c) $m = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2}x + n$

Pasa por $A(-2, 1) \to 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n \to n = 2$

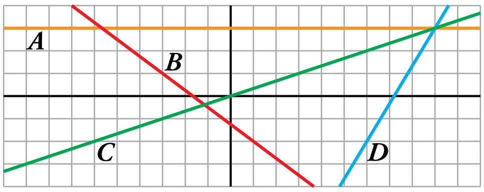
Por tanto, $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d) $m = -\frac{5}{3} \to y = -\frac{5}{3}x + n$

Pasa por $A(1, 3) \to 3 = -\frac{5}{3} \cdot 1 + n \to n = 3 + \frac{5}{3} \to n = \frac{14}{3}$

Por tanto, $y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$.

3. **Calcula la ecuación de estas funciones lineales:**



A Función constante $\to$ $y = n$; Pasa por $(0, 3)$ $\to$ $n = 3$ $\Big\}$ $\to$ $y = 3$

B Función lineal $\to$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(-3, 1) \in B \\ (1, -2) \in B\end{array}\right\} \to m = \frac{-2-1}{1-(-3)} = -\frac{3}{4} \to y = -\frac{3}{4}x + n$$

$$(1, -2) \in B \to -2 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + n \to n = -2 + \frac{3}{4} \to n = -\frac{5}{4}$$

Por tanto, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

C Función de proporcionalidad directa $\to$ $y = mx$

$$\left.\begin{array}{l}(0, 0) \in C \\ (3, 1) \in C\end{array}\right\} \to m = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{3}x$.

D Función lineal $\to$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(6, -2) \in D \\ (9, 3) \in D\end{array}\right\} \to m = \frac{3-(-2)}{9-6} = \frac{5}{3} \to y = \frac{5}{3}x + n$$

$$(6, -2) \in D \to -2 = \frac{5}{3} \cdot 6 + n \to n = -2 - 10 \to n = -12$$

Por tanto, $y = \frac{5}{3}x - 12$.

4. **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*:**

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ **b)** $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ **d)** $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

a) $y = 0$

b) $m = \frac{-3+4}{2+2} = \frac{1}{4}$; $y + 4 = \frac{1}{4}(x + 2) \to y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

c) $m = \frac{3}{3} = 1$; $y + 3 = x \to y = x - 3$

d) $m = \frac{1+5}{-3} = -2$; $y + 5 = -2x \to y = -2x - 5$

5. **Halla la ecuación, en cada caso, y represéntala:**

a) Recta que pasa por (2, –3) y es paralela a la recta que pasa por (1, –2) y (–4, 3).

b) Función de proporcionalidad que pasa por (–4, 2).

c) Función constante que pasa por (18; –1,5).

a) • La pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, –2) y (–4, 3) es:

$$m = \frac{3-(-2)}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -1$$

• Si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente, por tanto, la recta buscada tiene pendiente $m = -1 \rightarrow y = -x + n$

• La recta pasa por (2, –3) $\rightarrow -3 = -2 + n \rightarrow n = -1$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -x - 1$.

b) • Función de proporcionalidad $\rightarrow y = mx$

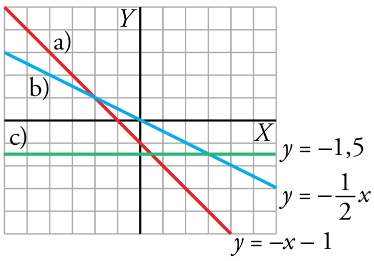
• Pasa por (–4, 2) $\rightarrow 2 = m \cdot (-4) \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, la recta buscada es $y = -\frac{1}{2}x$.

c) • Función constante $\rightarrow y = n$

• Pasa por (18; –1,5) $\rightarrow -1,5 = n$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -1,5$.



6. **Halla el valor de los parámetros *a*, *b*, *c*, *d* y *e* para que las rectas y los puntos cumplan las condiciones pedidas:**

a) Que la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (–2, *a*) tenga pendiente –1.

b) Que la recta $y = bx + 2$ pase por el punto (–3, 4).

c) Que las rectas de ecuaciones $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se corten en el punto de ordenada 2. ¿Cuál es la abscisa correspondiente?

d) Que los puntos (*d*, –2) y (4, *e*) pertenezcan a la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - 3$.

a) $\left.\begin{array}{l} 4m + n = 0 \\ -2m + n = a \end{array}\right\} \rightarrow m = -\frac{a}{6},\ n = \frac{2a}{3}$

Si $m = -1 \rightarrow -1 = -\frac{a}{6} \rightarrow a = 6$

b) La recta $y = bx + 2$ pasa por (–3, 4) $\rightarrow 4 = b \cdot (-3) + 2 \rightarrow 3b = -2 \rightarrow b = -\frac{2}{3}$

c) $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se cortan en el punto de ordenada 2: $\left.\begin{array}{l} 3x + c = 2 \\ cx + 3 = 2 \end{array}\right\} \to c = 2 - 3x$

$(2 - 3x) \cdot x + 3 = 2 \to -3x^2 + 2x + 1 = 0 \begin{cases} x = -1/3 \\ x = 1 \end{cases}$

- $x = -\frac{1}{3} \to c = 2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \to c = 3$

  En este caso son la misma recta: $y = 3x + 3$

- $x = 1 \to c = 2 - 3 \cdot 1 \to c = -1$

  Las rectas son $y = 3x - 1$ e $y = -x + 3$ y se cortan en el punto $(1, 2)$.

d) $(d, -2)$ pertenece a la recta $y = \frac{1}{2}x - 3 \to -2 = \frac{1}{2} \cdot d - 3 \to d = 2$

$(4, e)$ pertenece a la recta $y = \frac{1}{2}x - 3 \to e = \frac{1}{2} \cdot 4 - 3 \to e = -1$

Funciones cuadráticas

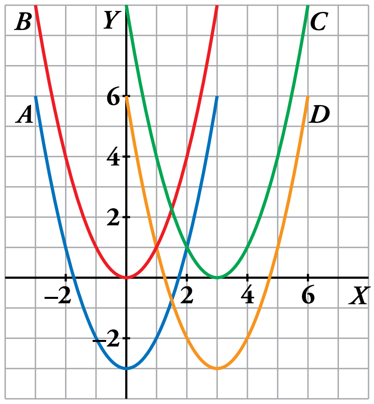
7. Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:

a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



a) $y = x^2 \leftrightarrow B$

b) $y = (x - 3)^2 \leftrightarrow C$

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow A$

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow D$

8. Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = -3x^2$

d) $y = 0{,}4x^2$

a) $y = x^2 + 1$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

b) $y = -x^2 + 4$

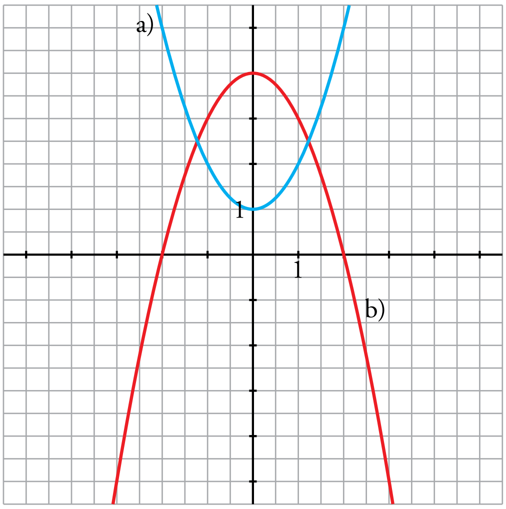
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–5	0	3	4	3	0	–5	–12

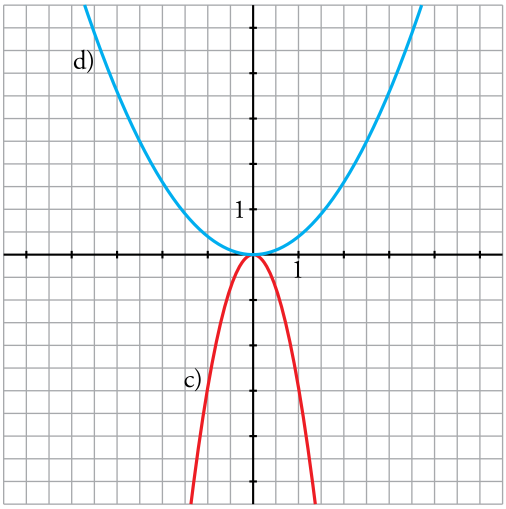
c) $y = -3x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–48	–27	–12	–3	0	–3	–12	–27	–48

d) $y = 0{,}4x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6,4	3,6	1,6	0,4	0	0,4	1,6	3,6	6,4





9. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x+2)^2$ **b)** $y = x^2 - 4x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ **d)** $y = x^2 - 9$

a) Vértice: (–2, 0)

Cortes con los ejes:

(–2, 0), (0, 4)

Otros puntos: (–1, 1), (–3, 1)

b) Vértice: (2, –4)

Cortes con los ejes:

(0, 0), (4, 0)

Otros puntos: (5, 5), (–1, 5)

c) Vértice: (–2, –1)

Cortes con los ejes:

$\left(-\sqrt{2}-2,\ 0\right), \left(\sqrt{2}-2,\ 0\right)$, (0, 1)

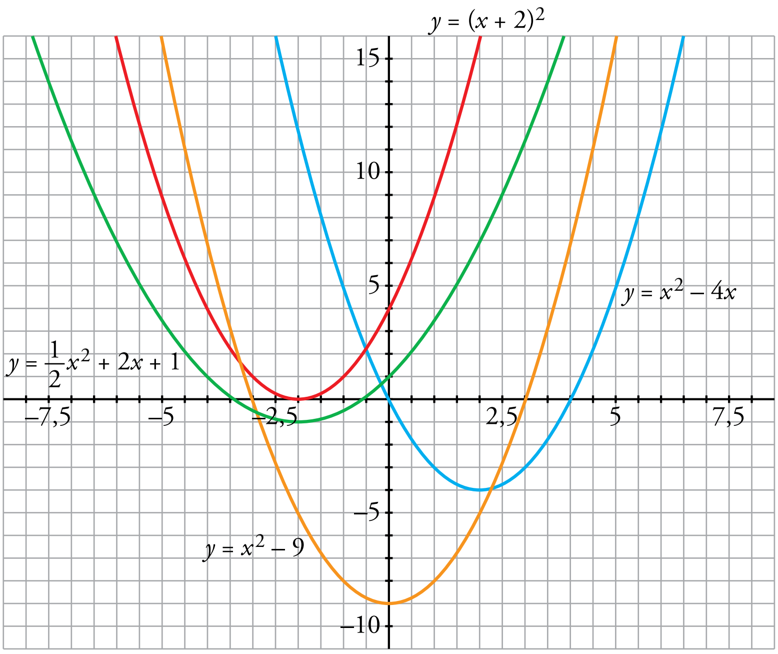
Otros puntos: $\left(1, \frac{7}{2}\right), \left(-5, \frac{7}{2}\right)$

d) Vértice: (0, –9)

Cortes con los ejes:

(–3, 0), (3, 0), (0, –9)

Otros puntos: (–2, –5), (2, –5)



10. **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo. Después, represéntalas.**

a) $y = 8 - x^2$

b) $y = 4 + (3 - x)^2$

c) $y = -x^2 - 2x + 4$

d) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $y = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

f) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

a) Vértice: $(0, 8)$, máximo

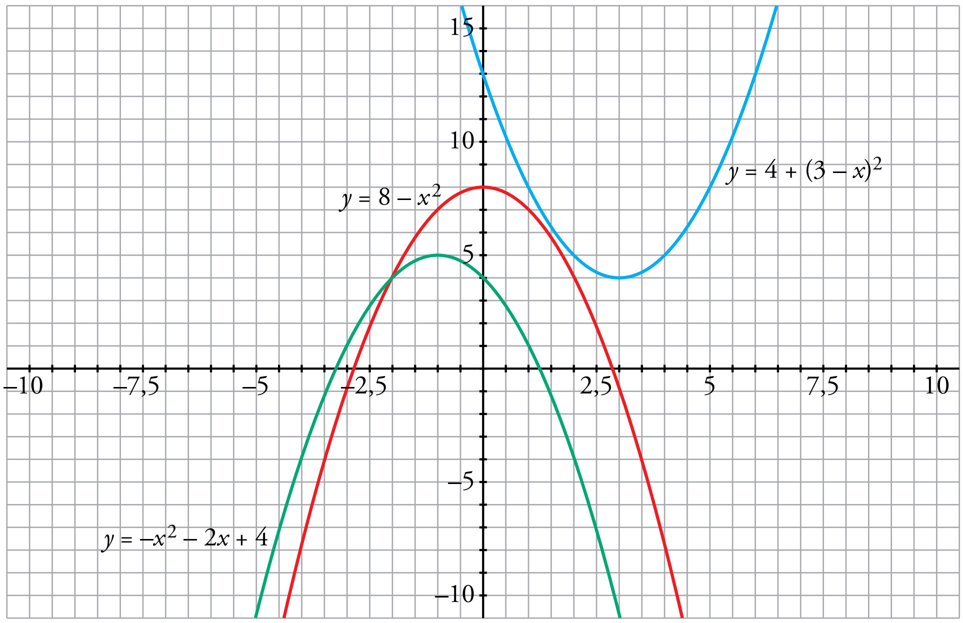
b) Vértice: $(3, 4)$, mínimo

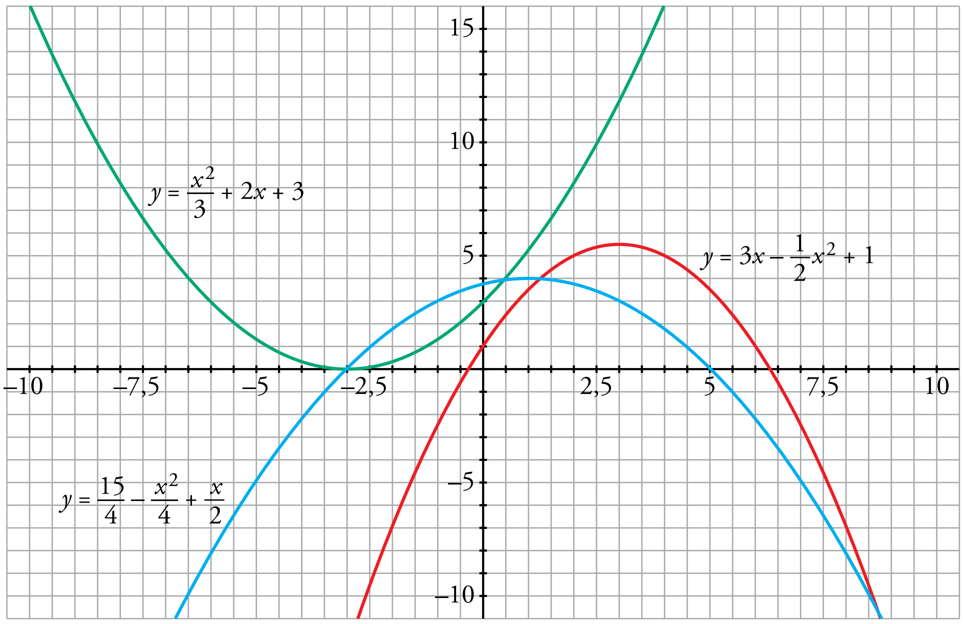
c) Vértice: $(-1, 5)$, máximo

d) Vértice: $\left(3, \frac{11}{2}\right)$, máximo

e) Vértice: $(1, 4)$, máximo

f) Vértice: $(-3, 0)$, mínimo





11. **Representa estas funciones cuadráticas:**

a) $y = (x - 5)^2$ **b)** $y = x \cdot (x - 5)$

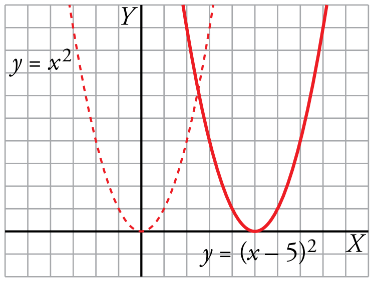
c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$ **d)** $y = 4 - (x - 2)^2$

a) $y = (x - 5)^2 \rightarrow$ Es la traslación 5 unidades a la derecha de $y = x^2$.

Vértice: (5, 0)

Tabla de valores:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	9	4	1	0	1	4	9



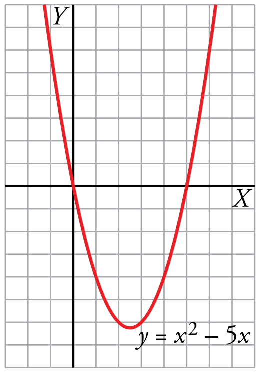
b) $y = x \cdot (x - 5) \rightarrow y = x^2 - 5x$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{5}{2} \rightarrow$ Ordenada: $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} \rightarrow V\left(\frac{5}{2}, \frac{-25}{4}\right)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6
y	6	0	–4	–6	$-\frac{25}{4}$	–6	–4	0	6

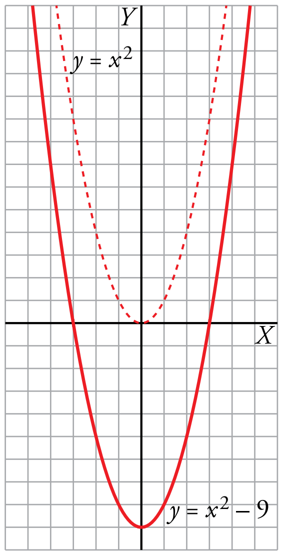


c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3) \rightarrow y = x^2 - 9 \rightarrow$ Es la traslación 9 unidades hacia abajo de $y = x^2$.

Vértice: (0, –9)

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7

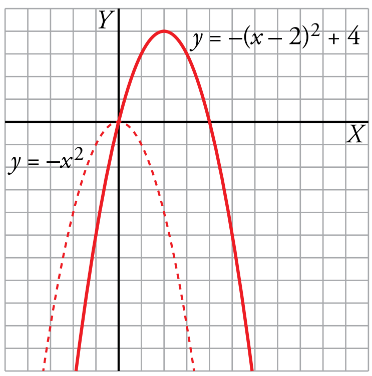


d) $y = 4 - (x - 2)^2 \rightarrow$ Es la traslación 4 unidades hacia arriba y 2 a la derecha de $y = -x^2$.

Vértice: (2, 4)

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–5	0	3	4	3	0	–5



12. **Utiliza una escala adecuada y representa.**

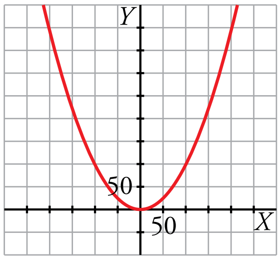
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

a) $y = \dfrac{x^2}{100} \rightarrow$ Vértice: (0, 0)

Tabla de valores:

x	–200	–150	–100	–50	0	50	100	150	200
y	400	225	100	25	0	25	100	225	400



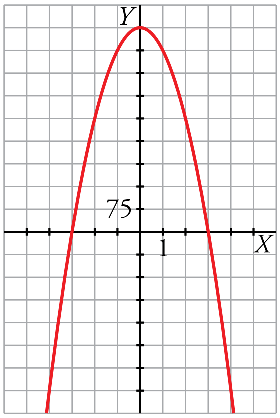
b) $y = -75x^2 + 675$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0}{-150} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 675 \rightarrow V(0, 675)$

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–525	0	375	600	675	600	375	0	–525



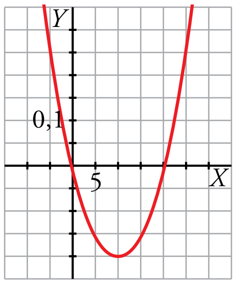
c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0{,}04}{0{,}004} = 10 \rightarrow$ Ordenada: $f(10) = -0{,}2 \rightarrow V(10; -0{,}2)$

Tabla de valores:

x	–5	0	5	10	15	20	25
y	0,25	0	–0,15	–0,2	–0,15	0	0,25



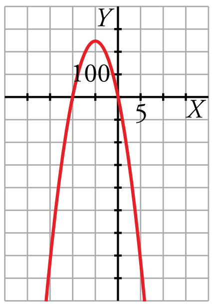
d) $y = -10x^2 - 100x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{100}{-20} = -5 \rightarrow$ Ordenada: $f(-5) = 250 \rightarrow V(-5, 250)$

Tabla de valores:

x	–15	–10	–5	0	5
y	–750	0	250	0	–750



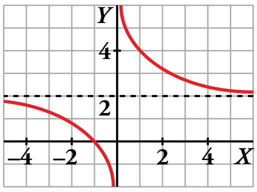
Página 142

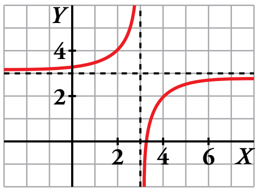
Otras funciones

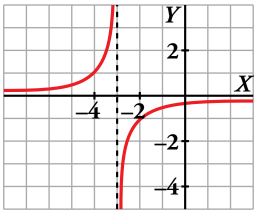
13. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas e indica el dominio de definición de cada una:**

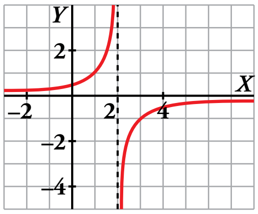
I) $y = \dfrac{1}{2-x}$ **II)** $y = 3 - \dfrac{1}{x-3}$

III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ **IV)** $y = -\dfrac{1}{x+3}$

a)


b)


c)


d)


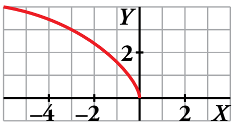
I $\rightarrow$ d) *Dom* = $\mathbb{R} - \{2\}$ II $\rightarrow$ b) *Dom* = $\mathbb{R} - \{3\}$

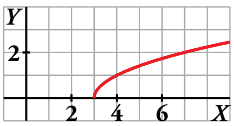
III $\rightarrow$ a) *Dom* = $\mathbb{R} - \{0\}$ IV $\rightarrow$ c) *Dom* = $\mathbb{R} - \{-3\}$

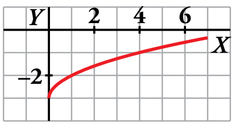
14. **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde e indica su dominio de definición:**

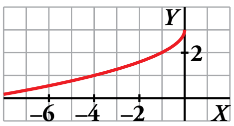
I) $y = \sqrt{x-3}$ **II)** $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$

a)


b)


c)


d)


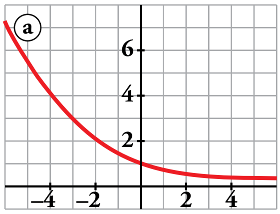
I $\rightarrow$ b) *Dom* = $[3, +\infty)$ II $\rightarrow$ c) *Dom* = $[0, +\infty)$

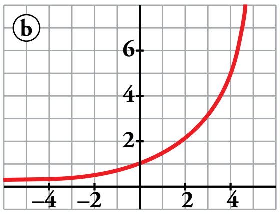
III $\rightarrow$ d) *Dom* = $(-\infty, 0]$ IV $\rightarrow$ a) *Dom* = $(-\infty, 0]$

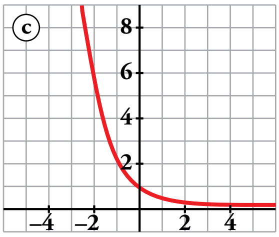
15. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

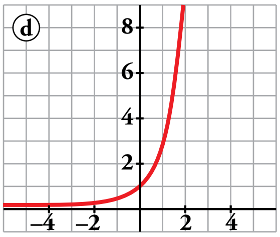
I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1{,}5^x$

III) $y = 0{,}4^x$ **IV)** $y = 0{,}7^x$









Di, en cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I $\rightarrow$ d) Creciente II $\rightarrow$ b) Creciente

III $\rightarrow$ c) Decreciente IV $\rightarrow$ a) Decreciente

16. **Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:**

a) $y = \frac{3}{x}$; $x = -3; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 3$

b) $y = -\frac{3}{x}$; $x = -3; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 3$

c) $y = \frac{5}{x}$; $x = -5; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 5$

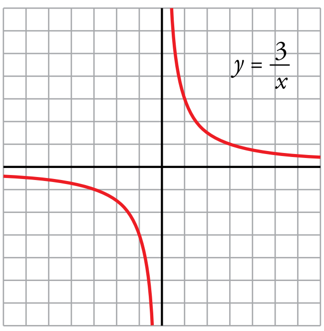
d) $y = -\frac{2}{x}$; $x = -2; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 2$

Todas las funciones son tales que:

- $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No cortan los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.
- $y = 0$ es asíntota horizontal.

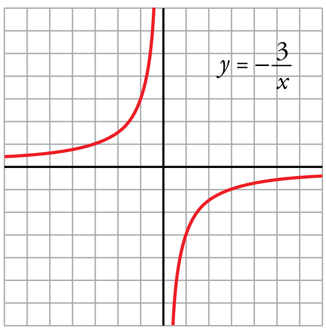
a) $f(x) = \frac{3}{x}$

x	–3	–1	–1/2	1/2	1	3
y	–1	–3	–6	6	3	1



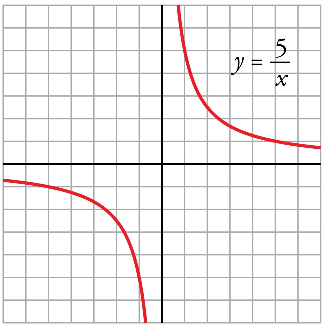
b) $f(x) = -\frac{3}{x}$

x	–3	–1	–1/2	1/2	1	3
y	1	3	6	–6	–3	–1



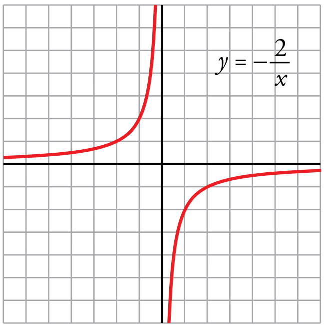
c) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

x	–5	–1	–1/2	1/2	1	5
y	–1	–5	–10	10	5	1



d) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

x	–2	–1	–1/2	1/2	1	2
y	1	2	4	–4	–2	–1



17. **Indica cuáles son las asíntotas de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = -\dfrac{3}{x+1}$

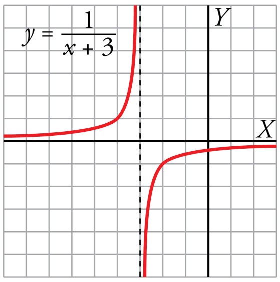
c) $y = \dfrac{1}{1-x} + 2$

d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$

a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntotas: $x = -3$, $y = 0$

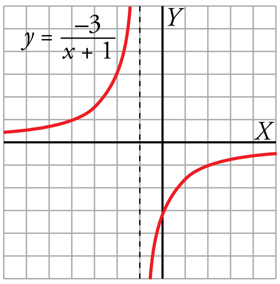
x	–6	–5	–4	–2	–1	0
y	–1/3	–1/2	–1	1	1/2	1/3



b) Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas: $x = -1$, $y = 0$

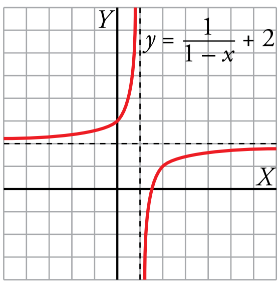
x	–4	–3	–2	0	1	2
y	1	3/2	3	–3	–3/2	–1



c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

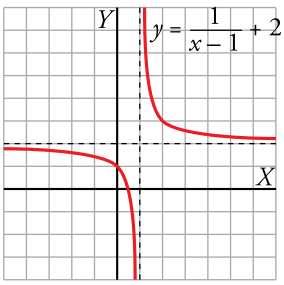
x	–2	–1	0	2	3	4
y	7/3	5/3	3	1	3/2	5/3



d) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

x	–2	–1	0	2	3	4
y	5/3	3/2	1	3	5/2	7/3



18. **Ayúdate de una tabla de valores para representar gráficamente las siguientes funciones e indica el dominio de definición de cada una:**

a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$

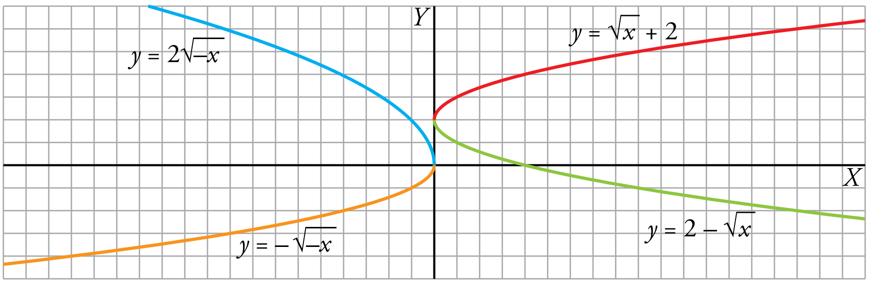
c) $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

A partir de la tabla de valores de $y = \sqrt{x}$ podemos representar las funciones:

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4

a) $y = \sqrt{x} + 2 \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$ b) $y = 2 - \sqrt{x} \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

c) $y = 2\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$ d) $y = -\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$



19. **Representa gráficamente estas funciones dando los valores que se indican en cada caso.**

a) $y = \sqrt{2 - x}$; $x = 2; -2; -7$ **b)** $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$; $x = -2; 0; 6$

c) $y = \sqrt{-x}$; $x = 0; -4; -9$ **d)** $y = 2 + \sqrt{x + 3}$; $x = -3; 1; 6$

a) $y = \sqrt{2 - x}$

x	2	–2	–7
y	0	2	3

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$

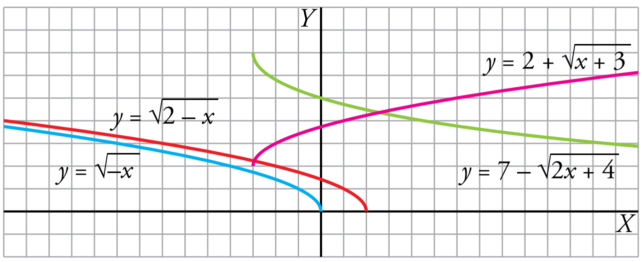
x	–2	0	6
y	7	5	3

c) $y = \sqrt{-x}$

x	0	–4	–9
y	0	2	3

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

x	–3	1	6
y	2	4	5



20. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores (ayúdate de la calculadora):**

a) $y = 2^x$

b) $y = 3^x + 1$

c) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 1$

d) $y = 2^{0,5x}$

e) $y = 1{,}2^{4x}$

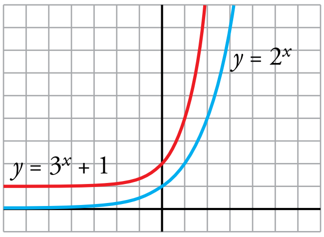
f) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{0,5x}$

a) $y = 2^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

b) $y = 3^x + 1$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1,037	$1{,}\widehat{1}$	$1{,}\widehat{3}$	2	4	10	28

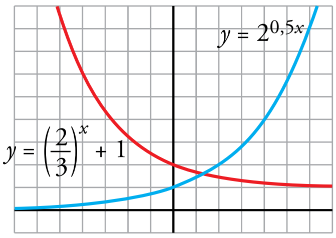


c) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 1$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,375	3,25	2,5	2	$1{,}\widehat{6}$	$1{,}\widehat{4}$	1,296

d) $y = 2^{0,5x}$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4

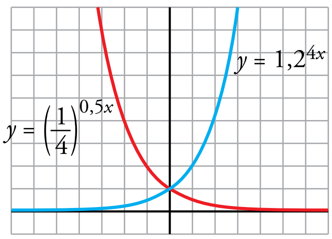


e) $y = 1{,}2^{4x}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,11	0,23	0,48	1	2,07	4,3	8,92

f) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{0,5x} \to \left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0,5}\right]^x \to \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,06



21. **Representa cada par de funciones sobre los mismos ejes coordenados. ¿Qué relación hay entre ellos?**

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 3^x$ **b)** $y = 0,25^x$; $y = 4^x$

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = (1/3)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

$y = 3^x$

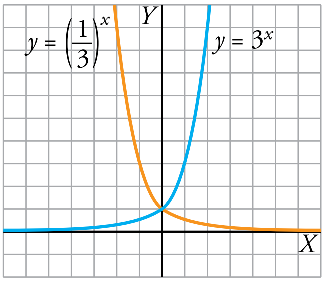
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

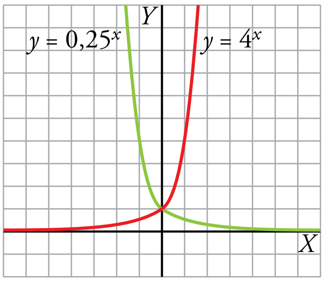
b) $y = 0,25^x \rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 0,25^x$	16	4	1	1/4	1/16

$y = 4^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 4^x$	1/16	1/4	1	4	16





Sus gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Página 143

Resuelve problemas

22. **a) Calcula b y c para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ esté en el punto (3, 1).**

b) ¿Cuál es su eje de simetría?

c) ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?

a) Vértice en $x = 3 \to -\dfrac{b}{2a} = 3 \to -b = 6a = 6 \to b = -6$

Pasa por (3, 1) $\to 1 = 9 - 18 + c \to c = 10$

$y = x^2 - 6x + 10$

b) Su eje de simetría es $x = 3$.

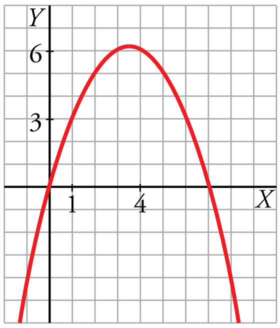
c) Cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = 10 \to$ Punto (0, 10)

$x^2 - 6x + 10 = 0 \to x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \to$ No tiene solución, por tanto, no corta al eje X.

23. **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c?**

Si, además, sabemos que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), halla a y b y representa la parábola.



$c = 0 \qquad y = ax^2 + bx$

$$\left.\begin{array}{l}(1, 3) \to 3 = a + b \\ (4, 6) \to 6 = 16a + 4b\end{array}\right\} \begin{array}{l}a = 3 - b \to a = -1/2 \\ 6 = 16(3 - b) + 4b \to b = 7/2\end{array}$$

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x$

24. **Calcula a y b para que la función $y = \dfrac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

$$\left.\begin{array}{l}2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ -1 = \dfrac{a}{-1 - b}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}a = 4 - 2b \\ a = 1 + b\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}1 + b = 4 - 2b \to b = 1 \\ a = 2\end{array}\right\} \; y = \dfrac{2}{x - 1}$$

25. **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0$ $\rightarrow$ $k = 3$

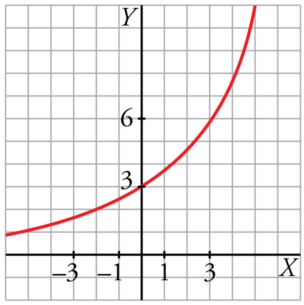
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1$ $\rightarrow$ $3{,}6 = 3a$ $\rightarrow$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función: $y = 3 \cdot 1{,}2^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



26. **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie del cuadro?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) Perímetro = 3 m $\rightarrow$ base + altura = 1,5 m

base = 0,5 m $\rightarrow$ 0,5 + altura = 1,5 $\rightarrow$ altura = 1 m

Área = base · altura $\rightarrow$ Área = 0,5 · 1 = 0,5 m^2

b) Perímetro = 3 m $\rightarrow$ base + altura = 1,5 m

base = x $\rightarrow$ x + altura = 1,5 $\rightarrow$ altura = $1{,}5 - x$

Área = base · altura $\rightarrow$ $A(x) = x \cdot (1{,}5 - x)$ $\rightarrow$ $A(x) = -x^2 + 1{,}5x$

c) $\left.\begin{array}{l} A(x) = -x^2 + 1{,}5x \text{ función cuadrática} \\ a = -1 < 0 \rightarrow \text{ tiene las ramas hacia abajo} \end{array}\right\} \rightarrow A(x)$ alcanza el máximo en su vértice

Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{-b}{2a} \;\; 8 \;\; x = \dfrac{-1{,}5}{-2} = 0{,}75 \\ y = -(0{,}75)^2 + 1{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Vértice: } (0{,}75; 0{,}5625)$$

La superficie es máxima cuando la base mide 0,75 m, siendo dicha superficie máxima 0,5625 m^2.

27. **El sueldo inicial de Ana es de 24 000 € anuales. En su contrato de trabajo figura que subirá un 8 % anual.**

¿Cuánto ganará dentro de 10 años? Escribe la función que relaciona el sueldo con el tiempo.

El sueldo inicial es 24 000 €.

Al cabo de un año será $24\,000 \cdot 1{,}08$ y al cabo de dos años será $24\,000 \cdot 1{,}08^2$.

Es decir, al cabo de 10 años será $24\,000 \cdot 1{,}08^{10} = 51\,814{,}20$ €.

La función que relaciona el sueldo con el tiempo es:

$$s(t) = 24\,000 \cdot 1{,}08^t$$

28. **El coste por unidad de fabricación de un tipo de cajas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la variable independiente, x?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para fabricar 10 cajas. Haz lo mismo para 100 000 cajas.

c) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de cajas se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) • Para 10 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{3 + 1\,000}{10} = 100{,}3$$

Coste total de 10 unidades = 1 003

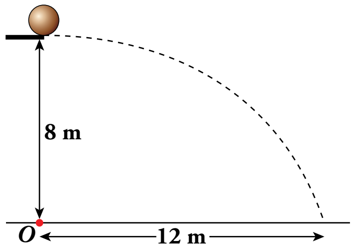
• Para 100 000 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

c) El coste por unidad se acerca a 0,3.

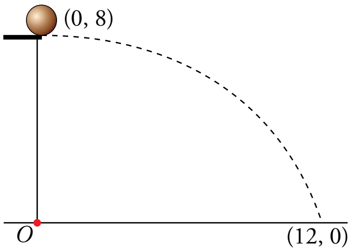
29. **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Esther lanza una pelota rodando y cae al agua a 12 m de la vertical del trampolín.**



Escribe la ecuación de la trayectoria descrita por la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua. Da su dominio de definición.

La trayectoria es una parábola $y = ax^2 + bx + c$ con su vértice en el punto de caída. Toma O como centro de coordenadas y ten en cuenta que el vértice es (0, 8).

RESOLUCIÓN 1



Tomando el centro de coordenadas en el punto O, el vértice de la parábola es (0, 8). La ecuación de la parábola queda así:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ \text{Para } x = 0,\ y = 8 \ \rightarrow\ 8 = b \end{array}\right\} y = ax^2 + 8$$

Calculamos el valor de a sabiendo que pasa por (12, 0):

$$0 = a \cdot 12^2 + 8 \ \rightarrow\ a = -\frac{8}{144} = -\frac{1}{18}$$

La ecuación de la trayectoria es $y = -\frac{1}{18}x^2 + 8$, definida en [0, 12].

RESOLUCIÓN 2

En la resolución anterior se ha tenido en cuenta que la trayectoria es una parábola con su vértice en el punto de caída. Resolvámoslo, ahora, como lo haría un físico, teniendo en cuenta, solamente, las leyes del movimiento:

Tiempo que tarda en caer 8 m: (movimiento uniformemente acelerado. Aceleración, g):

$\frac{1}{2}gt^2 = 8$. Tomamos $g = 10\ \text{m/s}^2 \ \rightarrow\ 5t^2 = 8 \ \rightarrow\ t = \sqrt{\frac{8}{5}}$

¿A qué velocidad rueda la pelota por el trampolín? Tengamos en cuenta que, a esa velocidad, recorre 12 m en $\sqrt{\frac{8}{5}}$ s (componente horizontal).

Movimiento uniforme $e = v \cdot t \ \rightarrow\ 12 = v \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \ \rightarrow\ v = \frac{12}{\sqrt{8/5}}$

Obtengamos la ecuación de la trayectoria tomando O como origen de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Comp. horizontal: } x = \frac{12}{\sqrt{8/5}}t \\ \text{Comp. vertical: } y = 8 - 5t^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{8/5}\,x}{12} \ \rightarrow\ t^2 = \frac{8/5}{144}x^2 = \frac{1}{90}x^2 \\ y = 8 - 5 \cdot \frac{1}{90}x^2 = 8 - \frac{1}{18}x^2 \end{array}$$

Hemos obtenido la trayectoria $y = 8 - \frac{1}{18}x^2$, la misma que antes como es natural.