

# 10 PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL PLANO

Página 191

## Resuelve

- 1** Busca información sobre siete grandes geómetras de la antigua Grecia. Puedes completarla con información de Eratóstenes e Hipatia.

**Tales de Mileto** (600 a. C.). Se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico, como el teorema que lleva su nombre.

**Pitágoras** (572 a. C.). Fundó la escuela pitagórica, a la que se le atribuye la demostración del teorema de Pitágoras y, como consecuencia, el descubrimiento de los números irracionales que contradecían la doctrina básica de la escuela.

**Pappus** de Alejandría (300 a. C.). Hizo anotaciones al teorema de Pitágoras y demostró que el hexágono es la forma geométrica que almacena mayor cantidad de miel utilizando menor cantidad de cera.

**Euclides** (300 a. C.). Se le conoce, sobre todo, por su obra *Elementos*, que durante más de 20 siglos fue la base de las matemáticas en todo el mundo.

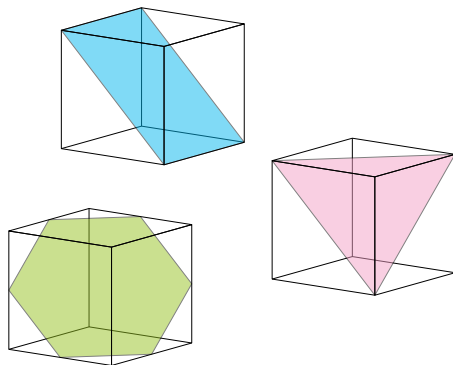
**Arquímedes** de Siracusa (287 a. C.). Elaboró un método para calcular una aproximación del valor de  $\pi$ , la proporción entre el diámetro y la longitud de una circunferencia.

**Eratóstenes** (276 a. C.). Fue el primero en medir la longitud de la Tierra, formulando dos hipótesis muy atrevidas para su época: la Tierra tiene forma esférica y los rayos del Sol son paralelos. También conocemos su criba para encontrar números primos.

**Apolonio** de Perga (262 a. C.). Estudió la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrió muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de la física; por ejemplo, en las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

**Hipatia** de Alejandría (370). Escribió sobre geometría, álgebra y astronomía, mejoró el diseño de los antiguos astrolabios e inventó un densímetro.

- 2** De las tres secciones del cubo que ves en la página de la izquierda, ¿cuál crees que tiene mayor perímetro? ¿Y mayor área? Cuando termines la unidad, sabrás contestar con seguridad a estas cuestiones.



Tomamos como medida de la arista del cubo 1 m. Las diagonales de sus caras miden entonces  $\sqrt{2}$  m.

**Rectángulo.** Su base coincide con la diagonal de las caras de los lados del cubo,  $\sqrt{2}$  m, y su altura coincide con la arista, 1 m. Por tanto:

$$P = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83 \text{ m} \qquad A = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ m}^2$$

**Triángulo.** Es equilátero y su lado coincide con la diagonal de las caras del cubo,  $\sqrt{2}$  m.

$$P = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ m}$$

Calculamos su altura para hallar el área:  $h = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$  m

$$A = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87 \text{ m}^2$$

**Hexágono.** Los vértices del hexágono coinciden con los puntos medios de las aristas del cubo.

Calculamos su lado:  $l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  m

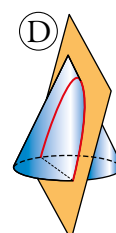
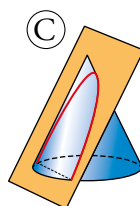
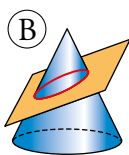
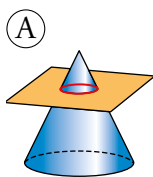
Ahora el perímetro:  $P = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ m}$

Recordando que en los hexágonos regulares coinciden las medidas del radio y el lado, calculamos la apotema:  $ap = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$  m

Por último, calculamos su área:  $A = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{12}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30 \text{ m}^2$

Tras estos resultados, concluimos que el rectángulo es la sección con mayor perímetro y mayor área.

- 3** ¿Qué cónica crees que se obtiene en cada caso?



(A) → Circunferencia

(B) → Elipse

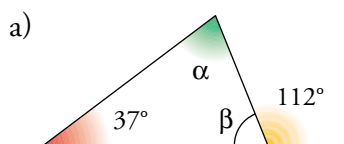
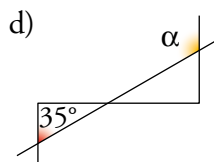
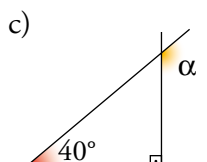
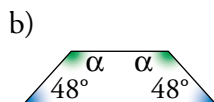
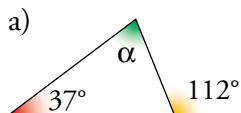
(C) → Hipérbola

(D) → Parábola

# 1 ▶ RELACIONES ANGULARES

Página 192

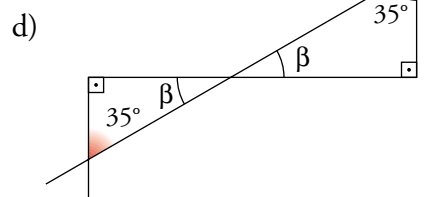
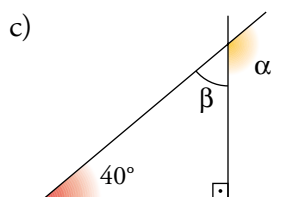
1 Halla el valor de cada ángulo  $\alpha$ :



$$b) 2\alpha = 360^\circ - 48^\circ \cdot 2 \rightarrow \alpha = 132^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 37^\circ - 68^\circ = 75^\circ$$

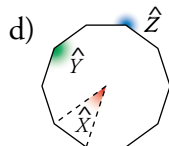
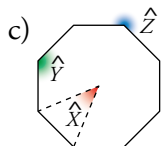
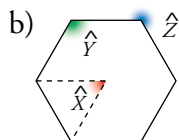
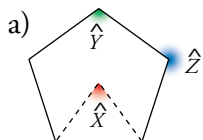


$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

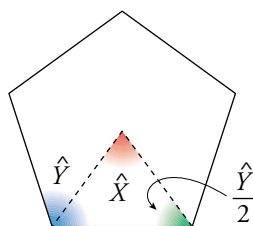
$$\alpha = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

**2** Calcula  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  en estos polígonos regulares:



a)  $\hat{X}$  es un ángulo central del pentágono regular.

Por tanto,  $\hat{X} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ .



$$\frac{\hat{Y}}{2} + \frac{\hat{Y}}{2} + \hat{X} = 180^\circ$$

$$\hat{Y} = 180^\circ - \hat{X} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$\hat{Z} = 360^\circ - \hat{Y} = 360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$$

b)  $\hat{X} = 360^\circ : 6 = 60^\circ$

$$\hat{Y} = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{Z} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

c)  $\hat{X} = 360^\circ : 8 = 45^\circ$

$$\hat{Y} = \frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$$

$$\hat{Z} = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$$

d)  $\hat{X}$  es un ángulo central del decágono regular.

Por tanto,  $\hat{X} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .

$$\hat{Y} = \frac{180^\circ \cdot (10-2)}{10} = 144^\circ; \hat{Z} = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$$

**3** ¿Cuál es la medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia?

Di el valor de los ángulos

$$\widehat{ABC}, \widehat{ACB}, \widehat{FDE}, \widehat{DEF}, \widehat{DFG}, \widehat{FGD}$$

La medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es  $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ .

$$\widehat{ABC} = \frac{2 \cdot 45^\circ}{2} = 45^\circ$$

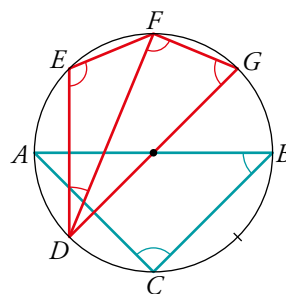
$$\widehat{DFG} = \frac{4 \cdot 45^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\widehat{ACB} = \frac{4 \cdot 45^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\widehat{FDE} = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30'$$

$$\widehat{FGD} = \frac{3 \cdot 45^\circ}{2} = 67^\circ 30'$$

$$\widehat{DEF} = \frac{5 \cdot 45^\circ}{2} = 112^\circ 30'$$



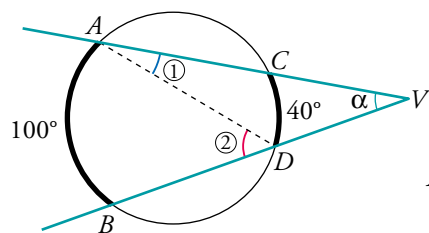
**4** Halla:

a)  $\widehat{CAD} = \textcircled{1}$

b)  $\widehat{ADB} = \textcircled{2}$

c)  $\widehat{ADV} = \alpha$

d)  $\widehat{AVD} = \alpha$



$$\widehat{AB} = 100^\circ$$

$$\widehat{CD} = 40^\circ$$

a)  $\widehat{CAD} = \textcircled{1} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

b)  $\widehat{ADB} = \textcircled{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

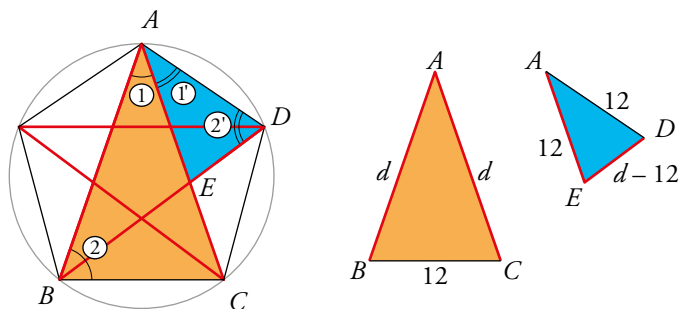
c)  $\widehat{ADV} = 180^\circ - \textcircled{2} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

d)  $\widehat{AVD} = 180^\circ - \textcircled{1} - 130^\circ = 180^\circ - 20^\circ - 130^\circ = 30^\circ$

## 2 ▶ SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

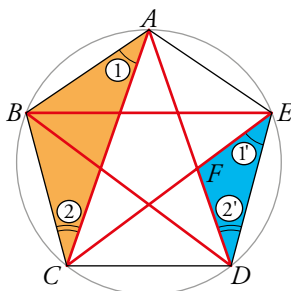
Página 195

- 1 Repite el razonamiento del ejercicio resuelto, pero suponiendo ahora que el lado del pentágono mide 12 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?



$$\frac{d}{12} = \frac{12}{d-12} \rightarrow d^2 - 12d = 144 \rightarrow d = 6 + 6\sqrt{5} = 19,4 \text{ cm}$$

- 2 Prueba que los triángulos  $ABC$  y  $EFD$  del pentágono de arriba son semejantes. A partir de esa semejanza, vuelve a obtener la relación entre  $d$  y  $l$ .



① = ① porque están inscritos en la circunferencia y abarcan arcos iguales.

② = ② por el mismo motivo.

Por tanto, los triángulos  $ABC$  y  $EFD$  son semejantes y sus lados son proporcionales.

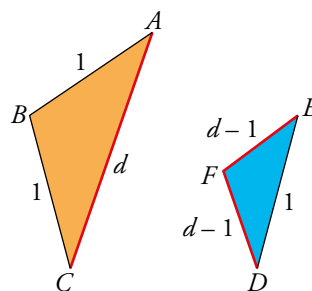
Tomamos como unidad el lado del pentágono,  $l = 1$ . Además,  $\overline{EF} = \overline{FD} = d - 1$ .

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{1}{d-1} = \frac{d}{1} \rightarrow d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomamos la solución positiva.

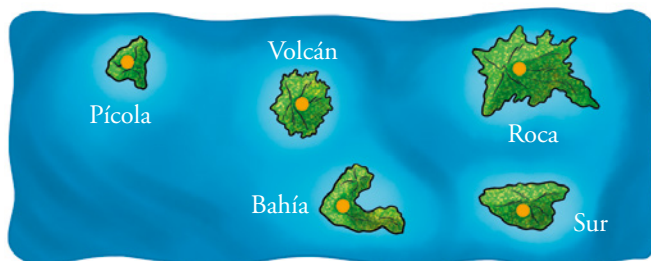
La relación pedida es:  $\frac{d}{l} = \frac{d}{1} = d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$



## 3 ► FIGURAS SEMEJANTES. ESCALAS

Página 196

- 3 a) Teniendo en cuenta que Isla Roca e Isla Volcán distan 10 km, calcula la escala del mapa.  
 b) Halla la distancia real entre Roca y Bahía.  
 c) Isla Tortuga no se ve, ya que se encuentra a 45 km al norte de Isla Volcán. ¿Qué longitud representa dicha distancia en el mapa?



- a) La distancia en el mapa entre las islas Volcán y Roca es de 3 cm.  $10 \text{ km} = 1\,000\,000$

$$\frac{3}{1\,000\,000} \rightarrow \text{Escala } 3 : 1\,000\,000$$

- b) La distancia entre Roca y Bahía en el mapa es de 3 cm.

Por tanto, su distancia real son 10 km.

$$c) \frac{3}{1\,000\,000} = \frac{x}{4\,500\,000} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 4\,500\,000}{1\,000\,000} = 3 \cdot 4,5 = 13,5$$

En el mapa, 45 km, representan 13,5 cm.

## 4 ► TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 197

**1** En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):

a) 37 cm y 45 cm

b) 16 cm y 30 cm

$a$  = hipotenusa

$$a) a = \sqrt{37^2 + 45^2} = \sqrt{3394} \approx 58,3 \text{ cm}$$

$$b) a = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{1156} = 34 \text{ cm}$$

**2** En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):

a) 45 cm y 37 cm

b) 39 cm y 15 cm

$c$  = cateto que falta

$$a) c = \sqrt{45^2 - 37^2} = \sqrt{656} \approx 25,6 \text{ cm}$$

$$b) c = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1296} = 36 \text{ cm}$$

**3** Averigua cómo son los triángulos de lados:

a) 7 cm, 8 cm, 11 cm

b) 11 cm, 17 cm, 15 cm

c) 34 m, 16 m, 30 m

d) 65 m, 72 m, 97 m

e) 12 cm, 13 cm, 20 cm

f) 15 m, 36 m, 39 m

$$a) 7^2 + 8^2 = 113; 11^2 = 121$$

Como  $11^2 > 7^2 + 8^2$ , entonces el triángulo es obtusángulo.

$$b) 11^2 + 15^2 = 346; 17^2 = 289$$

Como  $17^2 < 11^2 + 15^2$ , entonces el triángulo es acutángulo.

$$c) 16^2 + 30^2 = 1156; 34^2 = 1156$$

Como  $34^2 = 16^2 + 30^2$ , entonces el triángulo es rectángulo.

$$d) 65^2 + 72^2 = 9409; 97^2 = 9409$$

Como  $97^2 = 65^2 + 72^2$ , entonces el triángulo es rectángulo.

$$e) 12^2 + 13^2 = 313; 20^2 = 400$$

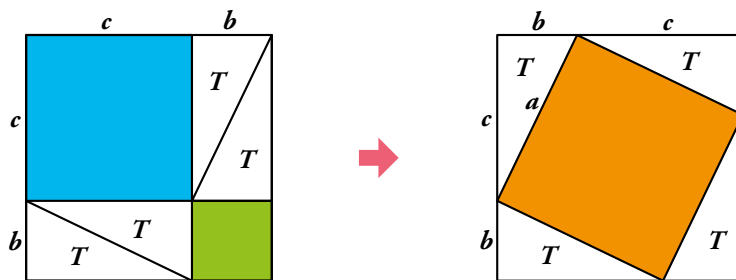
Como  $20^2 > 12^2 + 13^2$ , entonces el triángulo es obtusángulo.

$$f) 15^2 + 36^2 = 1521; 39^2 = 1521$$

Como  $39^2 = 15^2 + 36^2$ , entonces el triángulo es rectángulo.



- 4 Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado  $b + c$  que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado  $a$ .



Puesto que los cuatro triángulos blancos son rectángulos de catetos  $b$  y  $c$ , sus hipotenusas, que coinciden con el lado del cuadrado, miden  $a$ . Por tanto, la figura naranja es un cuadrado de lado  $a$  y área  $a^2$ .

En el otro cuadrado vuelven a aparecer los mismos triángulos blancos, dejando ahora un cuadrado verde de lado  $b$ , cuya área será  $b^2$ , y otro azul de lado  $c$  y área  $c^2$ .

Por último, nos fijamos en los dos cuadrados completos de lado  $b + c$ . Si a dos cuadrados iguales les quitamos la misma parte (los cuatro triángulos blancos), la parte que queda también será igual. En este caso, en el primer cuadrado nos quedan dos cuadrados más pequeños, el verde y el azul, de áreas  $b^2$  y  $c^2$  y en el segundo cuadrado queda el cuadrado naranja de área  $a^2$ .

Por tanto,  $b^2 + c^2 = a^2$ .

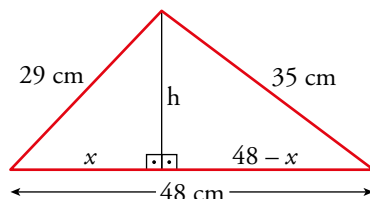
## 5 ► APLICACIÓN ALGEBRAICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 198

- 1** Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.

$$29^2 + 35^2 = 2066; 48^2 = 2304$$

Como  $48^2 > 29^2 + 35^2$ , el triángulo es obtusángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + h^2 = 29^2 \\ (48 - x)^2 + h^2 = 35^2 \end{array} \right\} \text{Restando: } x^2 - (48 - x)^2 = 29^2 - 35^2$$

Se resuelve la ecuación y se obtiene  $x = 20$  cm.

Calculamos  $h$ :

$$20^2 + h^2 = 29^2 \rightarrow h = 21 \text{ cm}$$

La altura sobre el lado mayor mide 21 cm.

- 2** Los lados de un trapecio miden 13 m, 20 m, 19 m y 40 m. Los dos últimos son paralelos. Halla la altura del trapecio.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

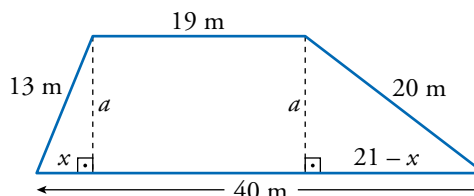
$$\left. \begin{array}{l} a^2 + x^2 = 13^2 \\ a^2 + (21 - x)^2 = 20^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{Restando: } x^2 - (21 - x)^2 = 13^2 - 20^2$$

Se resuelve la ecuación y se obtiene  $x = 5$  m.

$$\text{Ahora se obtiene el valor de } a: a^2 + 5^2 = 13^2 \rightarrow a = 12 \text{ m}$$

La altura del trapecio mide 12 m.



## 6 ▶ ÁREAS DE LOS POLÍGONOS

Página 199

- 1** Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

Aplicamos la fórmula de Herón:

$$\text{Perímetro} = p = 10 + 17 + 21 = 48 \text{ m}; \quad s = \frac{48}{2} = 24 \text{ m}$$

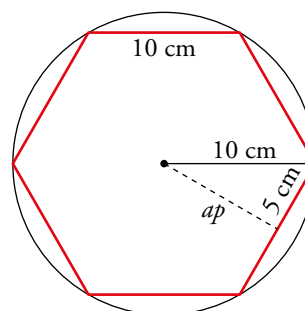
$$A = \sqrt{24 \cdot (24 - 10) \cdot (24 - 17) \cdot (24 - 21)} = \sqrt{7056} = 84 \text{ m}^2$$

- 2** Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la apotema.

$$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$$

$$A = \frac{10 \cdot 6 \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$$



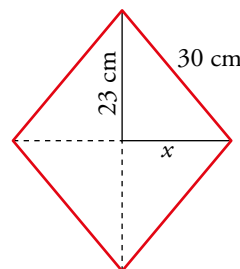
- 3** Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.

$$\text{Lado} = 3 \text{ dm} = 30 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{30^2 - 23^2} = \sqrt{371} \approx 19,26 \text{ cm}$$

$$\text{La otra diagonal mide } 2 \cdot 19,26 = 38,52 \text{ cm}$$

$$A = \frac{46 \cdot 38,52}{2} = 885,96 \text{ cm}^2$$



- 4** Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.

Los lados iguales del triángulo isósceles miden 30 cm, y el otro lado, 10 cm.

No puede ser de otra forma, porque si los lados iguales miden 10 cm, el otro no podría medir 30 cm.

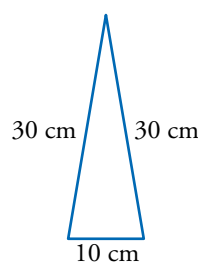
$$(10 + 10 = 20 < 30)$$

Aplicamos la fórmula de Herón:

$$p = 30 + 30 + 10 = 70 \text{ cm}$$

$$s = 35 \text{ cm}$$

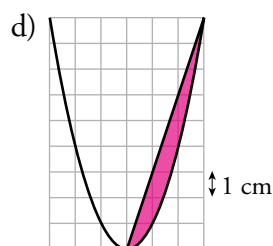
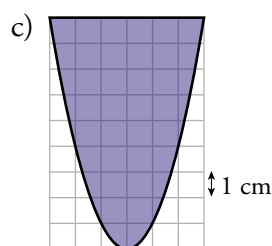
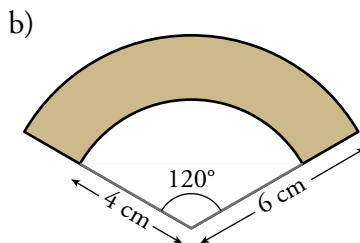
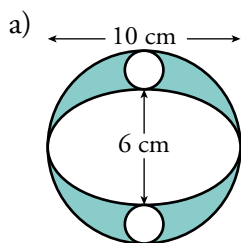
$$A = \sqrt{35 \cdot (35 - 30)^2 \cdot (35 - 10)} \approx 147,9 \text{ cm}^2$$



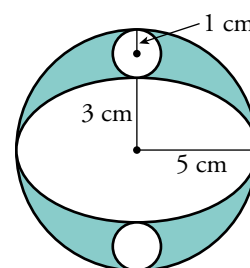
## 7 ▶ ÁREAS DE LAS FIGURAS CURVAS

Página 200

1 Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:



$$\begin{aligned} \text{a) } A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} &= \pi \cdot 5^2 \approx 78,54 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} &= \pi \cdot 1^2 \approx 3,14 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{ELIPSE}} &= \pi \cdot 5 \cdot 3 \approx 47,12 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{PARTE COLOREADA}} &= 78,54 - 2 \cdot 3,14 - 47,12 = 25,14 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



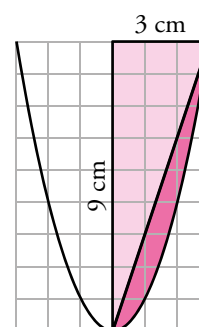
$$\text{b) } A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} \approx 20,94 \text{ cm}^2$$

$$\text{c) } A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{d) } A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 36 \text{ cm}^2 \text{ (según el ejercicio anterior)}$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \frac{A_{\text{SECTOR PARÁBOLA}}}{2} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{36}{2} - 13,5 = 4,5 \text{ cm}^2$$



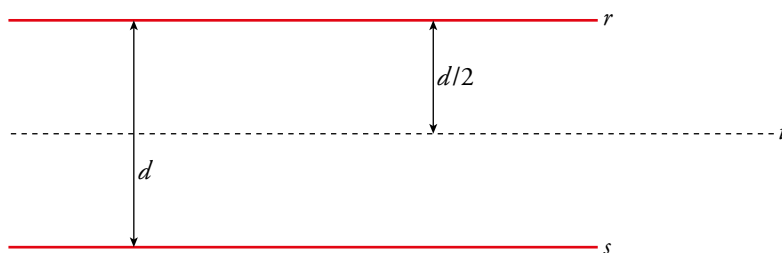
## 8 ► LUGARES GEOMÉTRICOS

Página 201

- 1** Define como lugar geométrico una circunferencia de centro  $C$  y radio 8 cm.

La circunferencia de centro  $C$  y radio 8 cm es el lugar geométrico de los puntos  $P$  cuya distancia a  $C$  es 8 cm:  $\overline{CP} = 8$  cm.

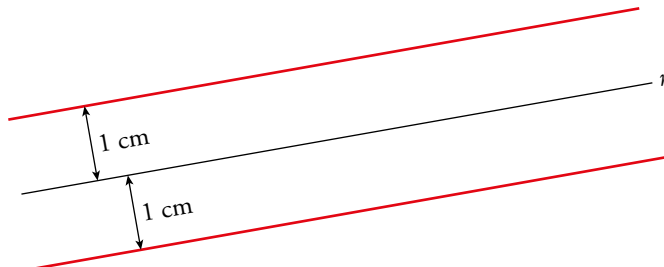
- 2** Dadas dos rectas paralelas,  $r$  y  $s$ , ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo en tu cuaderno.



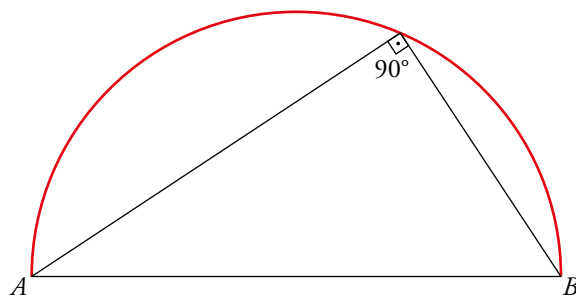
La recta  $t$  es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas  $r$  y  $s$ .

A la recta  $t$  se la llama **paralela media** a  $r$  y  $s$ .

- 3** Dibuja en negro una recta  $r$ . Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a  $r$  es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).



- 4** Dibuja una circunferencia de diámetro  $AB$ . Defínela como lugar geométrico (arco capaz de  $90^\circ$ ).



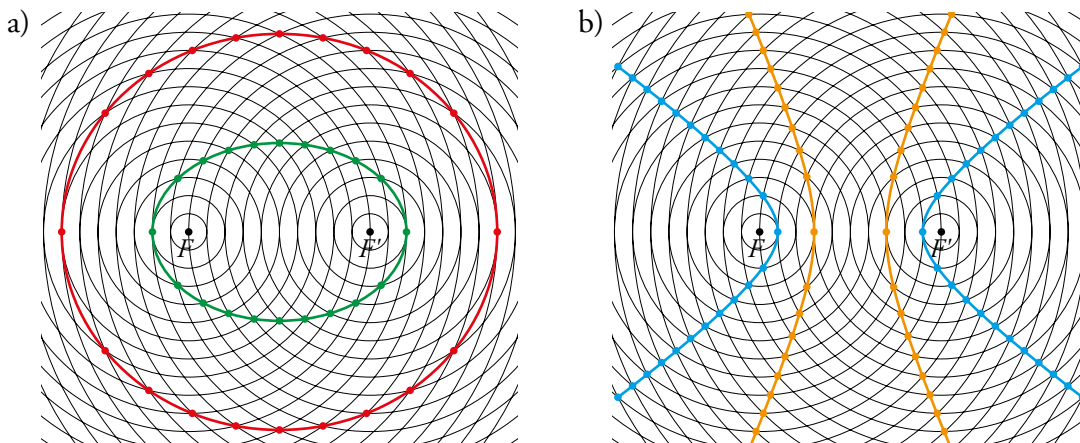
La circunferencia de diámetro  $AB$  (el arco rojo) es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento  $AB$  bajo un ángulo de  $90^\circ$ . Se llama arco capaz de  $90^\circ$  para el segmento  $AB$ .

## 9 ▶ LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

Página 203

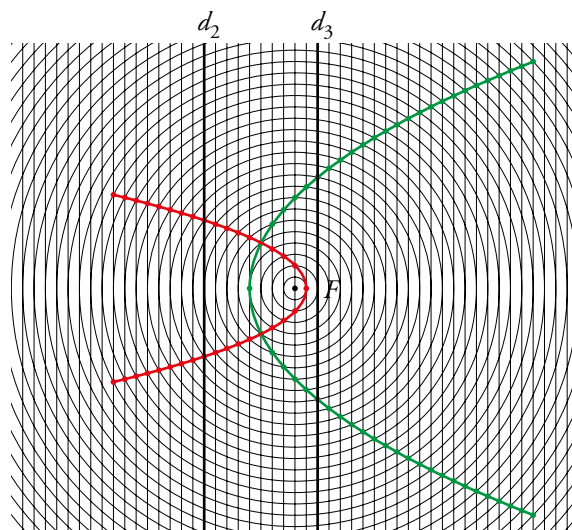
**1** Toma de la web una trama como la del ejercicio resuelto 1 y dibuja en ella:

- Dos elipses con  $d = 14$  y  $d = 24$ .
- Dos hipérbolas con  $d = 8$  y  $d = 4$ .



**2** Toma de la web una trama como la del ejercicio resuelto 2 y dibuja en ella:

- Una parábola de foco  $F$  y directriz  $d_2$ .
- Una parábola de foco  $F$  y directriz  $d_3$ .



## EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 205

### 3 Tangente a una circunferencia

Hazlo tú

- Supón un problema similar, y calcula el radio de la circunferencia si  $\overline{OP} = 39$  cm y  $\overline{PT} = 36$  cm.

$$r = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

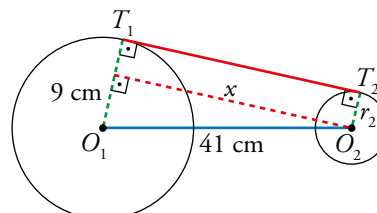
### 4 Tangente común a dos circunferencias

Hazlo tú

- Halla la longitud de la tangente suponiendo que los radios miden 15 cm y 6 cm, y que la distancia entre sus centros es de 41 cm.

La longitud del segmento  $T_1T_2$  es igual que  $x$ :

$$x = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$



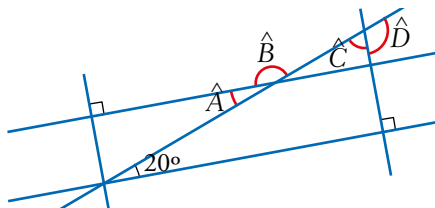
## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 206

### Practica

#### Ángulos

1 Halla el valor de cada ángulo indicado:



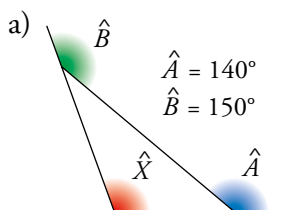
$$\hat{A} = 20^\circ \text{ (alternos interno)}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$$

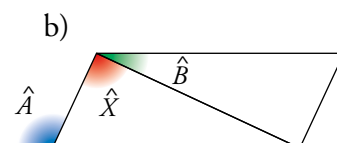
$$\hat{D} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

2 Calcula la medida de  $\hat{X}$  en cada caso:



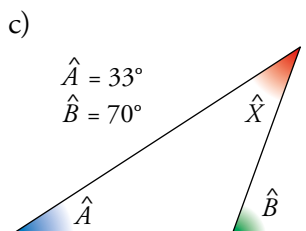
$$\hat{A} = 140^\circ$$

$$\hat{B} = 150^\circ$$



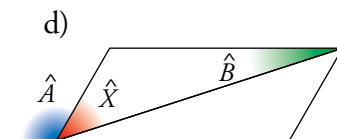
$$\hat{A} = 115^\circ$$

$$\hat{B} = 25^\circ$$



$$\hat{A} = 33^\circ$$

$$\hat{B} = 70^\circ$$

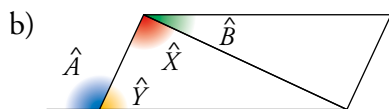


$$\hat{A} = 120^\circ$$

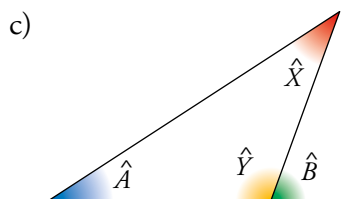
$$\hat{B} = 18^\circ$$

a)  $\hat{A} = 140^\circ \rightarrow 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ ;  $\hat{B} = 150^\circ \rightarrow 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ ;

$$\hat{X} = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$$

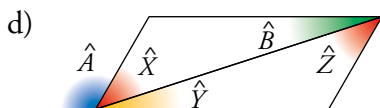


$$\hat{Y} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$
;  $\hat{Z} = 180^\circ - 25^\circ - 65^\circ = 90^\circ$ ;  $\hat{X} = \hat{Z} = 90^\circ$



$$\hat{Y} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$
;  $\hat{X} = 180^\circ - 110^\circ - 33^\circ = 37^\circ$





$$\hat{X} + \hat{Y} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ; \hat{B} + \hat{Z} = 60^\circ \rightarrow \hat{Z} = 60^\circ - 18^\circ = 42^\circ; \hat{X} = \hat{Z} = 42^\circ$$

### 3 Calcula los ángulos central e interior de un polígono regular de:

- a) 7 lados.                                      b) 12 lados.                                      c) 13 lados.  
d) 15 lados.                                      e) 20 lados.                                      f) 100 lados.

a) Ángulo central:  $\frac{360^\circ}{7} \approx 51,43^\circ$

Ángulo interior:  $\frac{180^\circ(7-2)}{7} = \frac{180^\circ \cdot 5}{7} \approx 128,57^\circ$

b) Ángulo central:  $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

Ángulo interior:  $\frac{180^\circ(12-2)}{12} = 150^\circ$

c) Ángulo central:  $\frac{360^\circ}{13} \approx 27,69^\circ$

Ángulo interior:  $\frac{180^\circ(13-2)}{13} \approx 152,31^\circ$

d) Ángulo central:  $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

Ángulo interior:  $\frac{180^\circ(15-2)}{15} = 156^\circ$

e) Ángulo central:  $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$

Ángulo interior:  $\frac{180^\circ(20-2)}{20} = 162^\circ$

f) Ángulo central:  $\frac{360^\circ}{100} = 3,6^\circ$

Ángulo interior:  $\frac{180^\circ(100-2)}{100} = 176,4^\circ$

### 4 ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si su ángulo interior es de $140^\circ$ ? ¿Puede haber un polígono regular cuyo ángulo interior sea $40^\circ$ ? ¿Y uno que tenga un ángulo interior de $150^\circ$ ?

- Si el ángulo interior es  $140^\circ$ , entonces:

$$140^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \rightarrow 140n = 180n - 360 \rightarrow n = \frac{360}{40} = 9$$

El polígono tiene 9 lados.

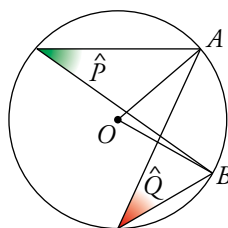
- $40^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \rightarrow 40n = 180n - 360 \rightarrow n = \frac{360}{140} \approx 2,57$

Como  $n$  no es un número entero, no existe un polígono cuyo ángulo interior sea  $40^\circ$ .

- $150^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \rightarrow 150n = 180n - 360 \rightarrow n = \frac{360}{30} = 12$

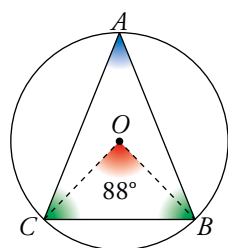
Un polígono regular de 12 lados tiene un ángulo interior de  $150^\circ$ .

- 5 Indica cuánto miden los ángulos  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$ , sabiendo que  $\widehat{AOB} = 70^\circ$ .



$$\hat{P} = \hat{Q} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

- 6 El triángulo  $ABC$  es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?



$\hat{A}$  es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es  $\widehat{BOC} = 88^\circ$ .

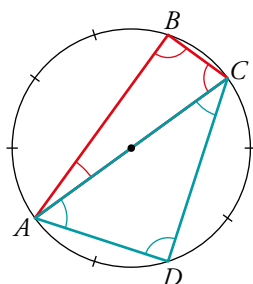
$$\hat{A} = 88^\circ : 2 = 44^\circ$$

$\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  suman  $180^\circ$  y  $\hat{B} = \hat{C}$ .

$$(180^\circ - 44^\circ) : 2 = 136^\circ : 2 = 68^\circ$$

$$\hat{A} = 44^\circ, \hat{B} = \hat{C} = 68^\circ$$

- 7 ¿Cuál es la medida angular de cada uno de los diez arcos iguales? Halla el valor de los ángulos  $\widehat{CAB}$ ,  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$ ,  $\widehat{CAD}$ ,  $\widehat{ADC}$ ,  $\widehat{ACD}$ .



La medida angular de cada uno de los diez arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .

$$\widehat{CAB} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

$$\widehat{CAD} = \frac{3 \cdot 36^\circ}{2} = 54^\circ$$

$$\widehat{ABC} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

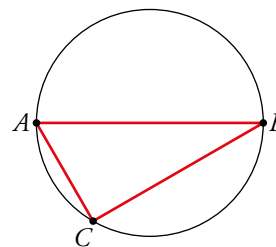
$$\widehat{ADC} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\widehat{BCA} = \frac{4 \cdot 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

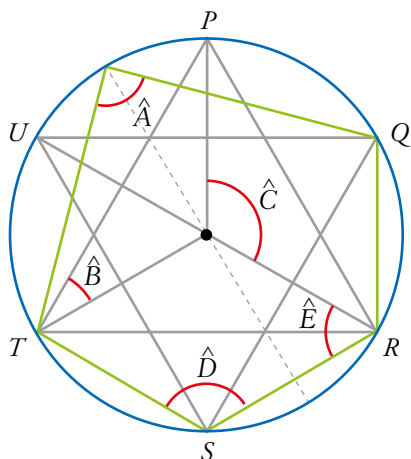
$$\widehat{ACD} = \frac{2 \cdot 36^\circ}{2} = 36^\circ$$

- 8 Dibuja un triángulo  $ABC$  inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices  $A$  y  $B$  sean extremos de un diámetro y el arco  $\widehat{AC}$  sea la sexta parte de la circunferencia. ¿Cuánto miden sus ángulos?

$$\begin{aligned}\widehat{AC} &= 60^\circ \rightarrow \hat{B} = 30^\circ \\ \widehat{AB} &= 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{A} &= 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 60^\circ\end{aligned}$$



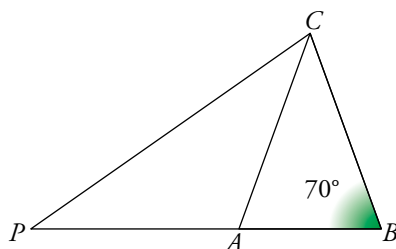
- 9 Calcula los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  y  $\hat{E}$  dentro del polígono inscrito en la circunferencia.



PQRSTU es un hexágono regular.

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{\widehat{QT}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \\ \hat{B} &= \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \\ \hat{C} &= \widehat{PR} = 120^\circ \\ \hat{D} &= \frac{\widehat{TR}}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ \\ \hat{E} &= \frac{\widehat{SU}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ\end{aligned}$$

- 10 Sabiendo que  $\overline{PA} = \overline{AC} = \overline{BC}$ ,  $\hat{B} = 70^\circ$ , halla el ángulo  $\widehat{PCB}$  en el siguiente triángulo:



Si  $\overline{AC} = \overline{BC}$ , el triángulo  $ABC$  es isósceles, tiene dos ángulos iguales,  $\hat{A} = \hat{B} = 70^\circ$ .

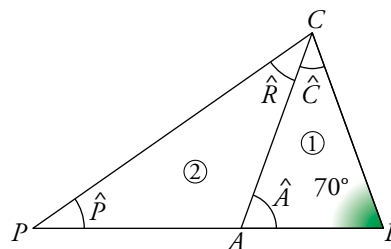
El otro ángulo mide  $\hat{C} = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$ .

Si  $\overline{PA} = \overline{AC}$ , el triángulo  $ACP$  es isósceles, tiene dos ángulos iguales,  $\hat{P} = \hat{R}$ .

El otro ángulo mide  $\hat{Q} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$  y, por tanto,

$$\hat{R} = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ.$$

Por último,  $\widehat{PCB} = \hat{C} + \hat{R} = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$ .



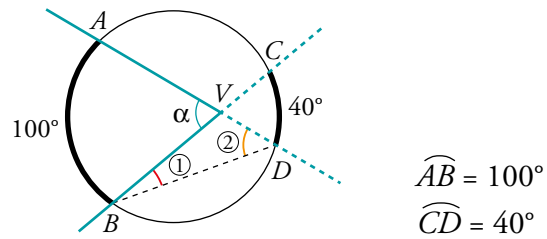
11 Halla:

a)  $\widehat{CBD} = \textcircled{1}$

b)  $\widehat{ADB} = \textcircled{2}$

c)  $\widehat{BVD}$

d)  $\widehat{AVB} = \alpha$



a)  $\widehat{CBD} = \textcircled{1} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

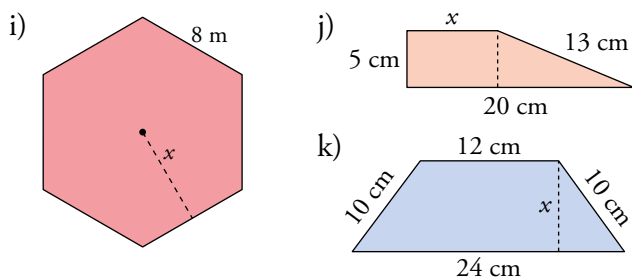
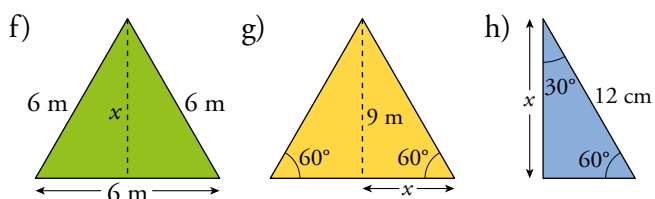
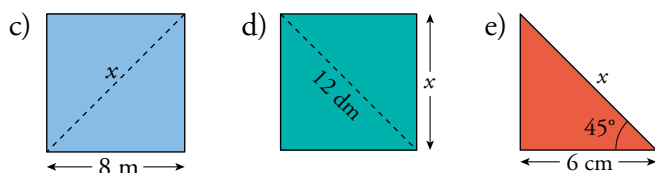
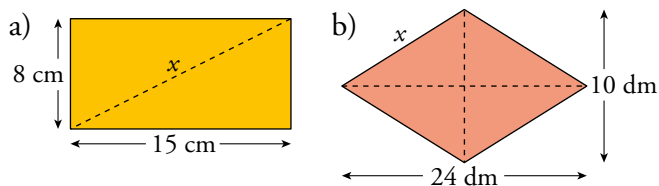
b)  $\widehat{ADB} = \textcircled{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

c)  $\widehat{BVD} = 180^\circ - \textcircled{1} - \textcircled{2} = 180^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 110^\circ$

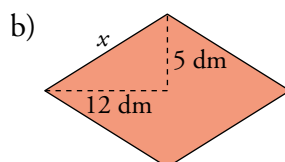
d)  $\widehat{AVB} = \alpha = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

Teorema de Pitágoras

12 Calcula el valor de  $x$  en cada caso:



a)  $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$

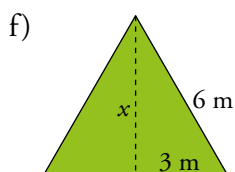


$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ dm}$

c)  $x = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,3 \text{ m}$

d)  $x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow 2x^2 = 144 \rightarrow$   
 $\rightarrow x = \sqrt{72} \approx 8,5 \text{ dm}$

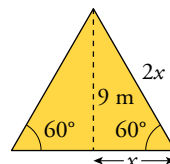
e) Como es un triángulo rectángulo con un ángulo de  $45^\circ$ , el otro tendrá que medir  $45^\circ$  también, por lo que sabemos que el triángulo es isósceles. Así:  $x = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8,5 \text{ cm}$



$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ m}$

- g) Como dos de sus ángulos miden  $60^\circ$ , el otro también medirá  $60^\circ$ . Como tiene los tres ángulos iguales, el triángulo es equilátero. Si medio lado mide  $x$ , el lado entero medirá  $2x$ .

$$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \rightarrow 3x^2 = 81 \rightarrow x = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ m}$$

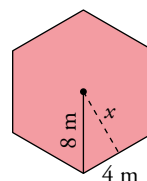


- h) El triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por tanto, utilizando el mismo razonamiento que en el apartado a), el lado que no mide ni 12 cm ni  $x$ , es la mitad de 12 cm, es decir, 6 cm. Por tanto:

$$x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,4 \text{ cm}$$

- i) Como es un hexágono, el radio es igual que el lado. Por eso:

$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6,9 \text{ cm}$$

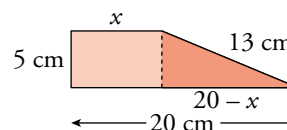


- j) Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo:

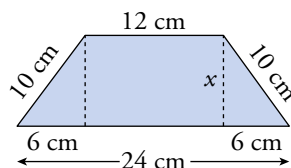
$$13^2 = 5^2 + (20 - x)^2 \rightarrow x^2 - 40x + 256 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 32 \text{ cm}, x = 8 \text{ cm}$$

La solución  $x = 32 \text{ cm}$  no tiene sentido, ya que  $x < 20$ . Por tanto,  $x = 8 \text{ cm}$ .



- k)



$$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

### 13 Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

a) 11 m, 13 m, 20 m.

b) 20 m, 21 m, 29 m.

c) 25 m, 29 m, 36 m.

d) 7 m, 24 m, 25 m.

a)  $11^2 + 13^2 = 290$ ;  $20^2 = 400$

Como  $20^2 > 11^2 + 13^2$ , el triángulo es obtusángulo.

b)  $20^2 + 21^2 = 841$ ;  $29^2 = 841$

Como  $29^2 = 20^2 + 21^2$ , el triángulo es rectángulo.

c)  $25^2 + 29^2 = 1466$ ;  $36^2 = 1296$

Como  $36^2 < 25^2 + 29^2$ , el triángulo es acutángulo.

d)  $7^2 + 24^2 = 625$ ;  $25^2 = 625$

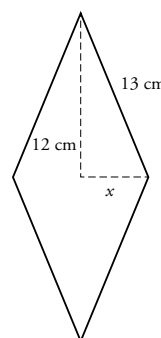
Como  $25^2 = 7^2 + 24^2$ , el triángulo es rectángulo.

### 14 De un rombo, conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal y su área.

$$\rightarrow 13^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

• La otra diagonal mide 10 cm.

• Calculamos el área:  $\frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ cm}^2$



- 15** La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro.

$l \rightarrow$  lado de falta

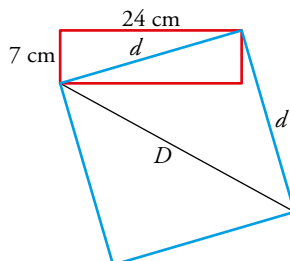
$$l = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1225} = 35 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 35 + 2 \cdot 12 = 94 \text{ cm}$$

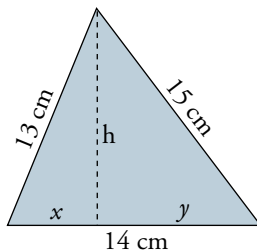
- 16** La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.

$$d = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$$

$$D = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1250} \approx 35,36 \text{ cm}$$



- 17** Halla, con la ayuda de un sistema de ecuaciones, los valores de  $h$ ,  $x$  e  $y$ .



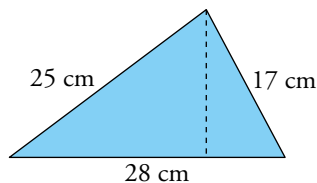
$$y = 14 - x$$

$$\left. \begin{array}{l} h^2 + x^2 = 13^2 \\ h^2 + (14 - x)^2 = 15^2 \end{array} \right\} \text{Restando, } x^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - 15^2 \rightarrow x^2 - 196 + 28x - x^2 = -56 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-56 + 196}{28} = 5$$

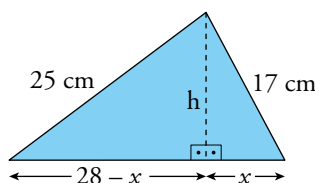
Por tanto,  $x = 5$  cm,  $h = \sqrt{169 - 25} = 12$  cm,  $y = 14 - 5 = 9$  cm.

- 18** Calcula la altura de este triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área.

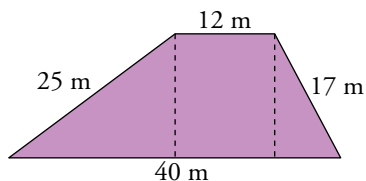


$$\left. \begin{array}{l} h^2 + x^2 = 17^2 \\ (28 - x)^2 + h^2 = 25^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array} \right\}$$

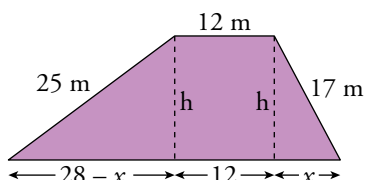
$$A = \frac{28 \cdot 15}{2} = 210 \text{ cm}^2$$



**19** Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.

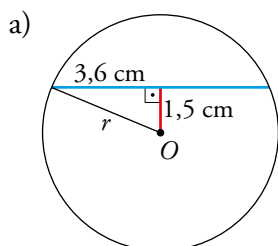
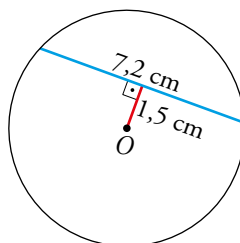


$$\left. \begin{array}{l} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28 - x)^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 8 \text{ m} \\ h = 15 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow A = \frac{40 + 12}{2} \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$$

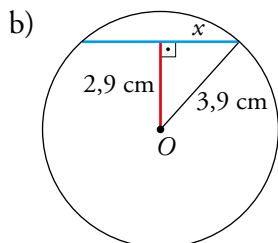


**20 a)** Calcula el radio de esta circunferencia.

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?



$$r = \sqrt{3,6^2 + 1,5^2} = \sqrt{15,21} = 3,9 \text{ cm}$$



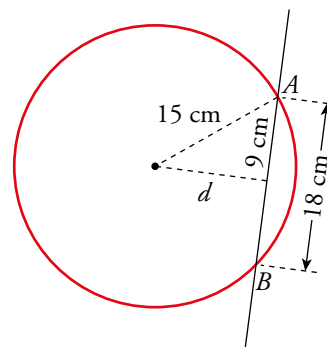
$$x = \sqrt{3,9^2 - 2,9^2} = \sqrt{6,8} \approx 2,6 \text{ cm}$$

La longitud de la cuerda será  $2 \cdot 2,6 = 5,2 \text{ cm}$

**21** Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta,  $r$ , corta a la circunferencia en dos puntos,  $A$  y  $B$ . La distancia entre  $A$  y  $B$  es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?

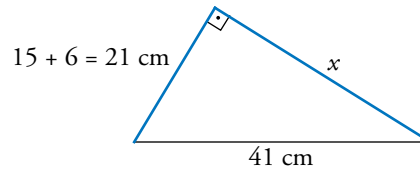
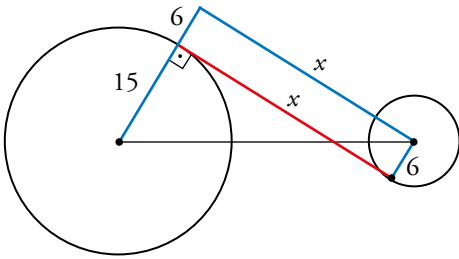
$$d = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

La distancia del centro de la circunferencia a la recta es 12 cm.





**23** Halla la longitud del segmento tangente interior común a dos circunferencias de radios 15 cm y 6 cm cuya distancia entre sus centros es de 41 cm.

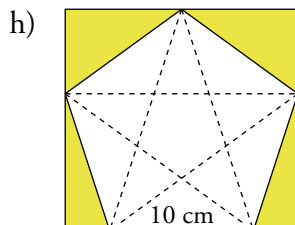
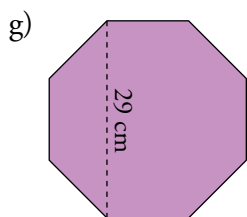
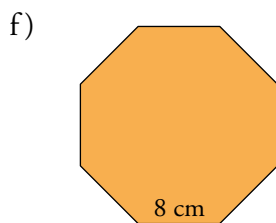
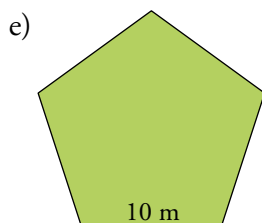
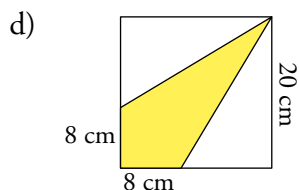
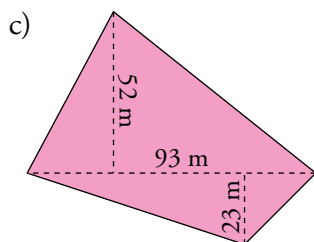
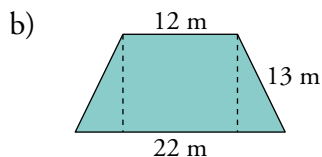
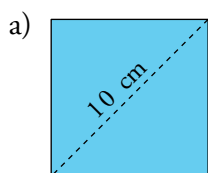


$$x = \sqrt{41^2 - 21^2} = \sqrt{1240} \approx 35,21 \text{ cm}$$

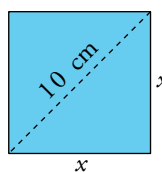
El segmento tangente interior común mide 35,21 cm, aproximadamente.

Áreas y perímetros

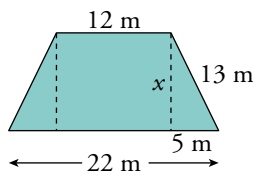
24 Halla el área de la parte coloreada de las figuras siguientes:



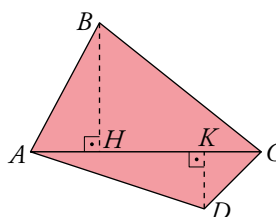
a)  $x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{50} \approx 7,1 \text{ cm}$   
 $A = 7,1^2 = 50 \text{ cm}^2$



b)  $x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$   
 $A = \frac{20+12}{2} \cdot 12 = 192 \text{ m}^2$



c)  $A_{\text{TRIÁNGULO } ABC} = \frac{93 \cdot 52}{2} = 2418 \text{ m}^2$   
 $A_{\text{TRIÁNGULO } ACD} = \frac{93 \cdot 23}{2} = 1069,5 \text{ m}^2$   
 $A_{\text{TOTAL}} = 2418 + 1069,5 = 3487,5 \text{ m}^2$



d)  $A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 400 - 2 \cdot 120 = 160 \text{ cm}^2$$

e)  $a = 0,6882 \cdot 10 = 6,882 \text{ cm}$  (ver ejercicio resuelto 1, apartado d), de la página 196).

Por tanto, el área del pentágono es  $A = \frac{5 \cdot 10 \cdot 6,882}{2} = 172,05 \text{ cm}^2$ .

f)  $a = 1,2071 \cdot 8 = 9,6568 \text{ cm}$  (ver ejercicio resuelto 1, apartado e), de la página 197).

Por tanto, el área del octógono es  $A = \frac{8 \cdot 8 \cdot 9,6568}{2} \approx 309,02 \text{ cm}^2$ .

g) Imaginemos que el octógono está inscrito en un cuadrado de 29 cm de lado, y llamaremos  $x$  a la medida del lado del octógono. Utilizando el resultado del ejercicio resuelto 2 de la

página 197,  $x = \frac{29}{\sqrt{2} + 2} \approx 8,49 \text{ cm}$ .

Siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior,  $a = 1,2071 \cdot 8,49 \approx 10,2483 \text{ cm}$ .

Por tanto, el área del octógono es  $A = \frac{8 \cdot 8,49 \cdot 10,2483}{2} \approx 348,03 \text{ cm}^2$ .

h) El pentágono es el mismo que el del apartado e), su área es  $172,05 \text{ cm}^2$ . Vamos a calcular el área del cuadrado exterior y las restaremos.

La diagonal del pentágono regular es igual a  $\Phi l$ . Por tanto,  $d = \frac{(1 + \sqrt{5}) \cdot 10}{2} \approx 16,18 \text{ cm}$ .

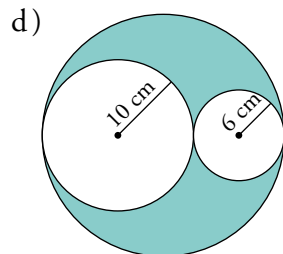
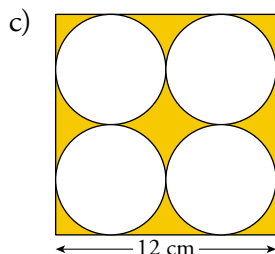
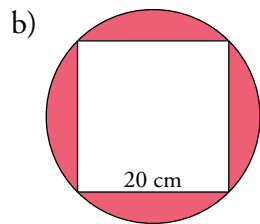
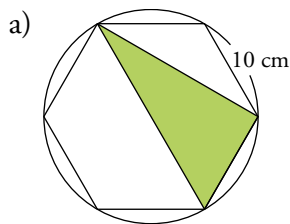
Elegimos el triángulo isósceles que tiene como base la del pentágono y como lados iguales dos de las diagonales del pentágono, y calculamos su altura:  $h = \sqrt{16,18^2 - 5^2} \approx 15,39 \text{ cm}$ .

Esta altura coincide con el lado del cuadrado, cuya área será:

$$A_{\text{CUADRADO}} = 15,39^2 = 236,85 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la parte coloreada es  $A = 236,85 - 172,05 = 64,8 \text{ cm}^2$ .

**25** Halla el área y el perímetro de la parte coloreada de cada figura:



Recuerda que el perímetro es la periferia interior y exterior.

a) Como sabemos, el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él. Por eso, del triángulo (que sabemos que es rectángulo) conocemos las siguientes medidas:

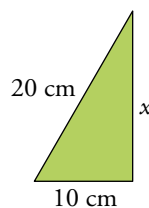
$$\text{hipotenusa} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm}$$

$$\text{un cateto} = 10 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17,32 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{10 \cdot 17,32}{2} = 86,6 \text{ cm}^2$$

$$\bullet P = 10 + 20 + 17,32 = 47,32 \text{ cm}$$



b)  $x = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28,28 \text{ cm}$

$$\text{radio} = \frac{x}{2} = 14,14 \text{ cm}$$

$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 14,14^2 \approx 628,13 \text{ cm}^2$$

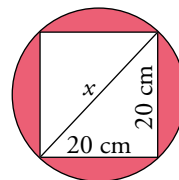
$$A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = 628,13 - 400 = 228,13 \text{ cm}^2$$

$$\bullet P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2 \cdot \pi \cdot 14,14 \approx 88,84 \text{ cm}$$

$$P_{\text{CUADRADO}} = 4 \cdot 20 = 80 \text{ cm}$$

$$P_{\text{TOTAL}} = 88,84 + 80 = 168,84 \text{ cm}$$



c)  $r = \frac{12}{4} = 3 \text{ cm}$

$$A_{\text{CUADRADO}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$$

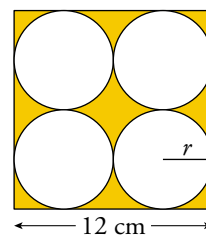
$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 3^2 \approx 28,27 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 28,27 = 30,92 \text{ cm}^2$$

$$\bullet P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 18,85 \text{ cm}$$

$$P_{\text{CUADRADO}} = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}$$

$$P_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 18,85 + 48 = 123,4 \text{ cm}$$



d) El diámetro del círculo grande mide  $2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32$  cm.

Su radio medirá  $\frac{32}{2} = 16$  cm.

$$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 16^2 \approx 804,25 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CÍRCULO MEDIANO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314,16 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113,1 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 804,25 - 314,16 - 113,1 \approx 377 \text{ cm}^2$$

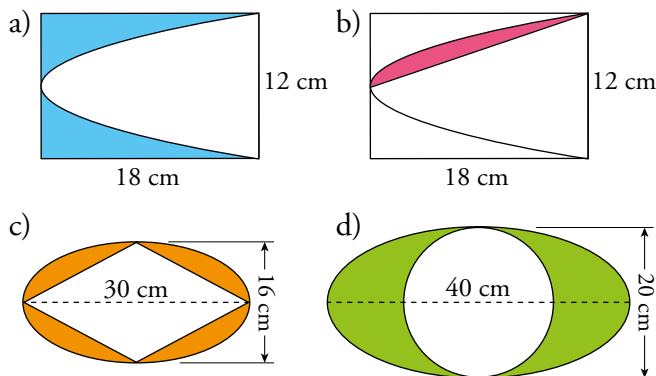
$$\bullet P_{\text{CIRCUNFERENCIA GRANDE}} = 2 \cdot \pi \cdot 16 \approx 100,53 \text{ cm}$$

$$P_{\text{CIRCUNFERENCIA MEDIANA}} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \approx 62,83 \text{ cm}$$

$$P_{\text{CIRCUNFERENCIA PEQUEÑA}} = 2 \cdot \pi \cdot 6 \approx 37,70 \text{ cm}$$

$$P_{\text{TOTAL}} = 100,53 + 62,83 + 37,70 = 201,06 \text{ cm}$$

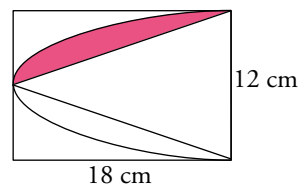
## 26 Halla las áreas de estas figuras coloreadas:



a) Área del segmento de parábola:  $A = \frac{2}{3} \cdot 18 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

Área de la zona coloreada =  $18 \cdot 12 - 144 = 72 \text{ cm}^2$

b) Área de la zona coloreada =  $\frac{A_{\text{SEGMENTO DE PARÁBOLA}} - A_{\text{TRIÁNGULO}}}{2} =$   
 $= \frac{144 - 12 \cdot 18/2}{2} = 18 \text{ cm}^2$



c) Área de la elipse =  $\pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi \text{ cm}^2 \approx 377 \text{ cm}^2$

Área del rombo =  $\frac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$

Área total =  $120\pi - 240 = 136,9 \text{ cm}^2$

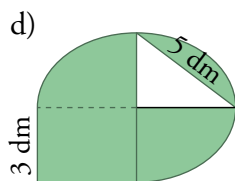
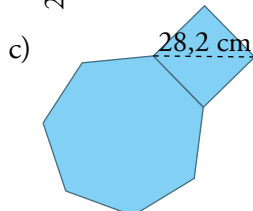
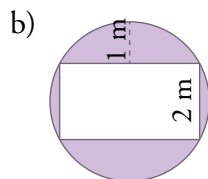
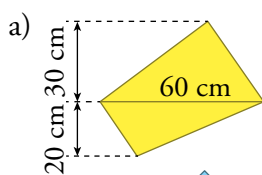
d) Calculamos el área de la elipse:  $A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 628,32 \text{ cm}^2$

Calculamos el área del círculo:  $A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$

Obtenemos el área de la figura coloreada restando las áreas anteriores:

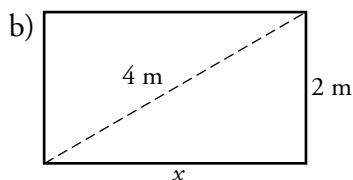
$$A = 628,32 - 314,16 = 314,16 \text{ cm}^2$$

**27** En a) no tienes suficientes herramientas para calcular el perímetro, pero sí el área. Indica en cuáles puedes hallar el perímetro y en cuáles el área. En los que puedas, hálloslos.



a) Calculamos el área dividiendo la figura en dos triángulos de base 60 cm.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 20 = 900 + 600 = 1500 \text{ cm}^2$$



$$x = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

- $A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 2^2 \approx 12,57 \text{ m}^2$

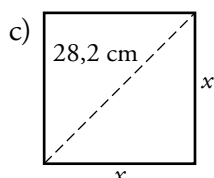
$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = A_{\text{CÍRCULO}} - A_{\text{RECTÁNGULO}} = 12,57 - 4\sqrt{3} \approx 5,64 \text{ m}^2$$

- $P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2\pi \cdot 2 \approx 12,57 \text{ m}$

$$P_{\text{CUADRADO}} = 2(2\sqrt{3} + 2) = (4\sqrt{3} + 4) \text{ m}$$

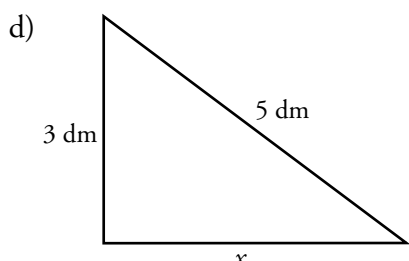
$$P_{\text{PARTE COLOREADA}} = P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} - P_{\text{RECTÁNGULO}} = 12,57 + 4\sqrt{3} + 4 = 23,50 \text{ m}$$



$$x^2 + x^2 = 28,2^2 \rightarrow 2x^2 = 795,24 \rightarrow x \approx 19,94 \text{ cm}$$

Podemos calcular el perímetro, pero no el área.

$$P_{\text{PARTE COLOREADA}} = 9 \cdot 19,94 = 179,46 \text{ cm}$$



$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ dm}$$

Podemos calcular el área, pero no el perímetro. La figura está formada por tres cuartas partes de una elipse, más un rectángulo menos un triángulo.

- $A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 3 \cdot 4 \approx 37,70 \text{ dm}^2$

$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ dm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ dm}^2$$

$$P_{\text{PARTE COLOREADA}} = \frac{3}{4} \cdot A_{\text{ELIPSE}} + A_{\text{RECTÁNGULO}} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{3}{4} \cdot 37,70 + 12 - 6 = 34,275 \text{ dm}^2$$

**28** Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:

a) 90°

b) 120°

c) 65°

d) 140°

$$a) A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360^\circ} \cdot 90^\circ \approx 176,71 \text{ cm}^2$$

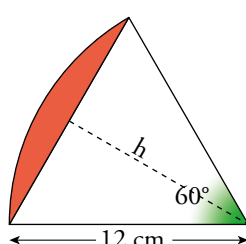
$$b) A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360^\circ} \cdot 120^\circ \approx 235,62 \text{ cm}^2$$

$$c) A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360^\circ} \cdot 65^\circ \approx 127,63 \text{ cm}^2$$

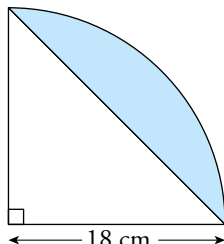
$$d) A = \frac{\pi \cdot 15^2}{360^\circ} \cdot 140^\circ \approx 274,89 \text{ cm}^2$$

**29** Halla el área de estos segmentos circulares:

a)



b)



$$a) A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 75,4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Altura del triángulo equilátero: } h = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10,4 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{12 \cdot 10,4}{2} = 62,4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 75,4 - 62,4 = 13 \text{ cm}^2$$

$$b) A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 254,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254,5 - 162 = 92,5 \text{ cm}^2$$

**30** Comprueba que los siguientes triángulos son rectángulos y calcula sus áreas de dos formas: a partir de sus catetos y aplicando la fórmula de Herón.

a) 51 cm, 68 cm y 85 cm.

b) 110 m, 264 m y 286 m.

c) 72 dam, 135 dam y 153 dam.

d) 48 m, 140 m y 148 m.

$$a) 51^2 + 68^2 = 7225 = 85^2$$

$$b) 110^2 + 264^2 = 81796 = 286^2$$

$$A = \frac{51 \cdot 68}{2} = 1734 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{110 \cdot 264}{2} = 14520 \text{ m}^2$$

$$A = \sqrt{102 \cdot 51 \cdot 34 \cdot 17} = 1734 \text{ cm}^2$$

$$A = \sqrt{330 \cdot 220 \cdot 66 \cdot 44} = 14520 \text{ m}^2$$

$$c) 72^2 + 135^2 = 23409 = 153^2$$

$$d) 48^2 + 140^2 = 21904 = 148^2$$

$$A = \frac{72 \cdot 135}{2} = 4860 \text{ dam}^2$$

$$A = \frac{48 \cdot 140}{2} = 3360 \text{ m}^2$$

$$A = \sqrt{180 \cdot 108 \cdot 45 \cdot 27} = 4860 \text{ dam}^2$$

$$A = \sqrt{168 \cdot 120 \cdot 28 \cdot 20} = 3360 \text{ m}^2$$

Semejanza. Escalas

**31** Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes con razón de semejanza 1,2.

Calcula los lados del triángulo  $A'B'C'$  sabiendo que:

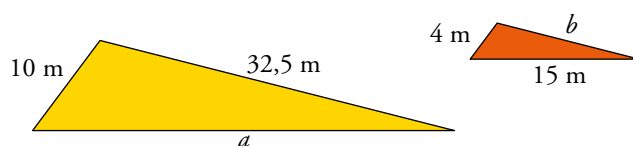
$$\overline{AB} = 16 \text{ cm} \quad \overline{BC} = 25 \text{ cm} \quad \overline{AC} = 39 \text{ cm}$$

$$\overline{A'B'} = 1,2 \cdot 16 = 19,2 \text{ cm}$$

$$\overline{B'C'} = 1,2 \cdot 25 = 30 \text{ cm}$$

$$\overline{A'C'} = 1,2 \cdot 39 = 46,8 \text{ cm}$$

**32** Halla las longitudes de los lados  $a$  y  $b$  sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:



Como todos sus lados son paralelos, sus ángulos son iguales, por lo que los dos triángulos son semejantes. Así:

$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} = \frac{32,5}{b}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} \rightarrow 4a = 150 \rightarrow a = 37,5 \text{ m}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{32,5}{b} \rightarrow 10b = 130 \rightarrow b = 13 \text{ m}$$

**33** Si  $BD$  es paralelo a  $AE$ , y  $\overline{AC} = 15 \text{ cm}$ ,  $\overline{CE} = 11 \text{ cm}$ ,  $\overline{BD} = 6,4 \text{ cm}$ ,  $\overline{AE} = 18 \text{ cm}$ :

a) Calcula  $\overline{CD}$  y  $\overline{BC}$ .

b) Si  $\hat{A} = 37^\circ$  y  $\hat{C} = 80^\circ$ , halla  $\hat{E}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{D}$ .

Por semejanza de triángulos:

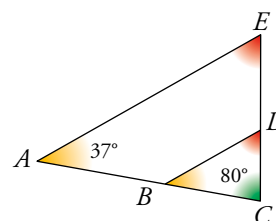
$$a) \frac{18}{6,4} = \frac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \frac{11 \cdot 6,4}{18} \approx 3,9 \text{ cm}$$

$$\frac{18}{6,4} = \frac{15}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{15 \cdot 6,4}{18} \approx 5,33 \text{ cm}$$

$$b) \hat{E} = 180^\circ - 37^\circ - 80^\circ = 63^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{A} = 37^\circ$$

$$\hat{D} = \hat{E} = 63^\circ$$





**34** En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 1 \rightarrow 1\,500\,000 \\ \quad 2,5 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = 2,5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000 \text{ cm} = 37,5 \text{ km}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } 1 \rightarrow 1\,500\,000 \\ \quad x \rightarrow 36\,000\,000 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24 \text{ cm}$$

**35** Indica, en cada caso, cuál es la escala del plano:

a) 1 mm del plano representa 10 m reales.

b) 50 km reales se representan por 1 dm en el plano.

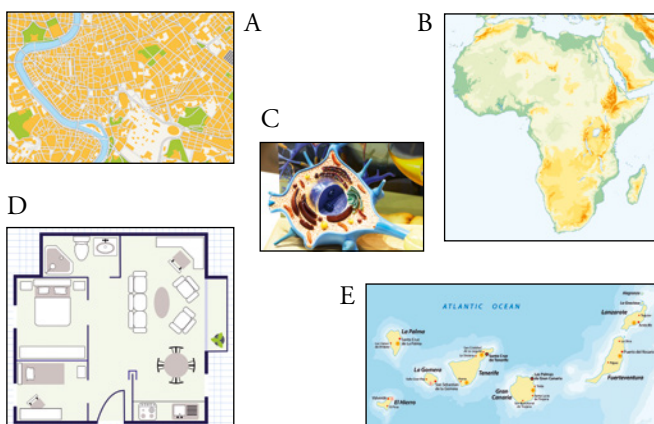
c) 0,001 mm reales se representan por 1 cm en el plano.

a) 1 mm equivale a 10 m = 10 000 mm  $\rightarrow$  Escala 1 : 10 000.

b) 1 dm equivale a 50 km = 500 000 dmm  $\rightarrow$  Escala 1 : 500 000.

c) 1 cm = 10 mm equivale a 0,001 mm  $\rightarrow$  Escala 10 000 : 1.

**36** Asocia cada imagen con su escala:



a) 1:300

b) 10 000:1

c) 1:10 000 000

d) 1:100 000

e) 1:375 000 000

A  $\rightarrow$  d)

B  $\rightarrow$  e)

C  $\rightarrow$  b)

D  $\rightarrow$  a)

E  $\rightarrow$  c)

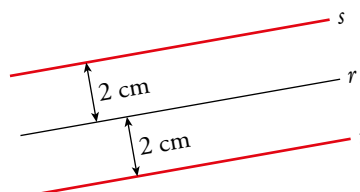
### Lugares geométricos y cónicas

**37** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta  $r$  es de 2 cm?

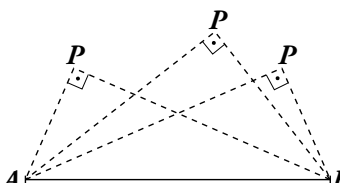
Dibújalo.

Las rectas  $s$  y  $t$  son el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta  $r$  es de 2 cm.

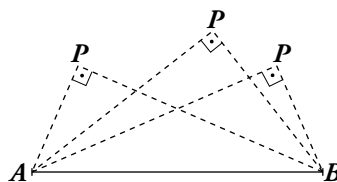
Las rectas  $s$  y  $t$  son paralelas a  $r$ , cada una a un lado de esta y a 2 cm de distancia de  $r$ .



**38** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano tales que el ángulo  $\widehat{APB}$  es recto?



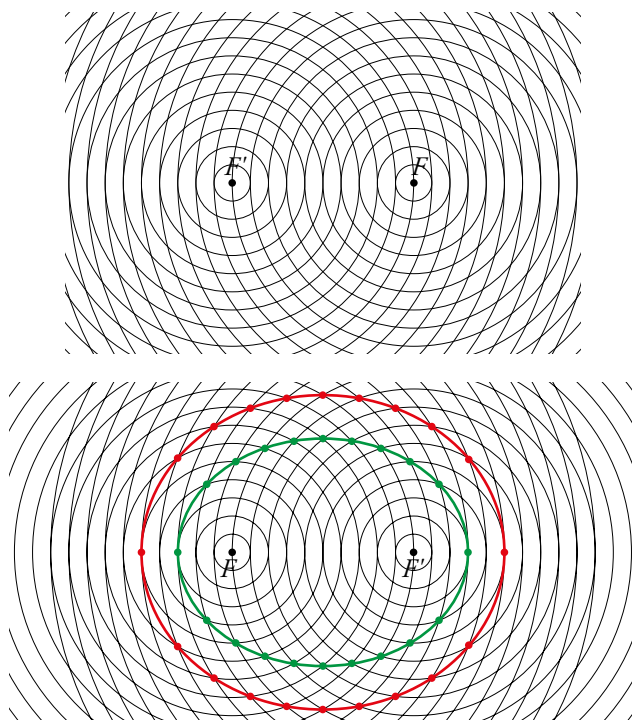
La circunferencia de centro el punto medio de  $\overline{AB}$  (exceptuando los puntos  $A$  y  $B$ ) es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano tales que el ángulo  $\widehat{APB}$  es recto.



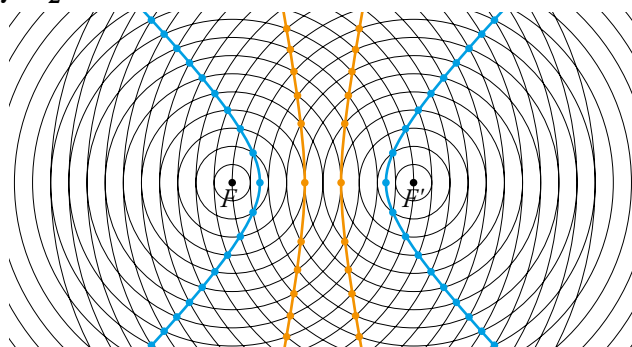
**39** Define como lugar geométrico el circuncentro y el incentro de un triángulo.

El circuncentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus vértices. El incentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados.

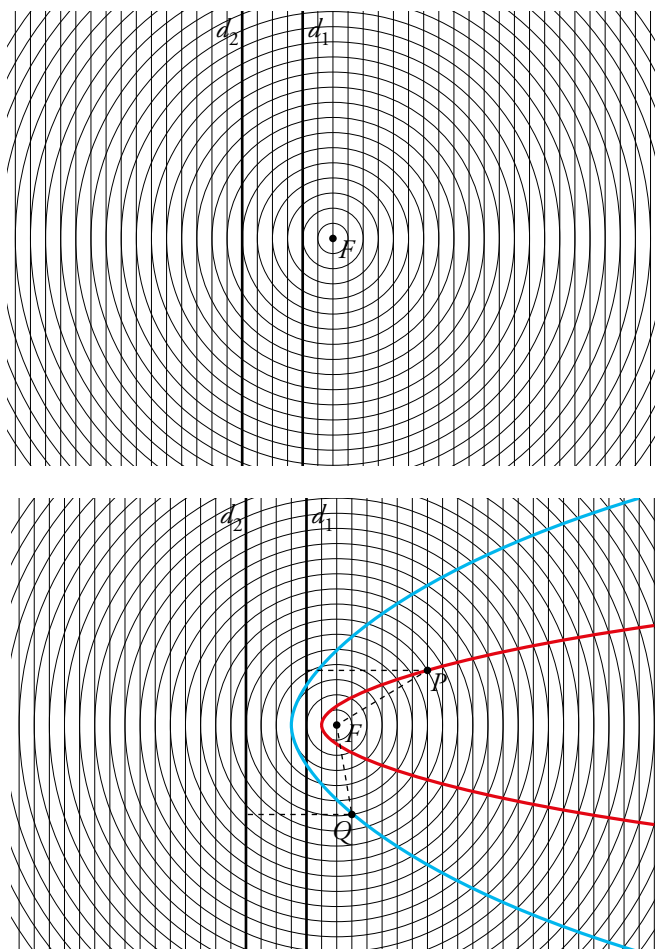
**40** Utiliza una trama como la siguiente para dibujar dos elipses de focos  $F$  y  $F'$  y constantes  $d_1 = 16$  y  $d_2 = 20$  (tomando como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).



**41** En una trama como la del ejercicio anterior, dibuja dos hipérbolas de focos  $F$  y  $F'$  y constantes  $d_1 = 2$  y  $d_2 = 7$ .



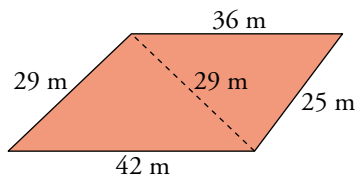
**42** Utiliza esta trama para dibujar dos parábolas de foco  $F$  y de directrices  $d_1$  y  $d_2$ .



La parábola roja tiene como directriz  $d_1$  y la azul tiene como directriz  $d_2$ .

Resuelve problemas

43 Una finca tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.



Aplicamos la fórmula de Herón:

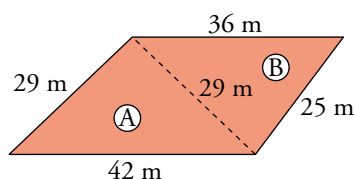
$$s_{\text{A}} = \frac{29 + 29 + 42}{2} = 50 \text{ m}$$

$$A_{\text{A}} = \sqrt{50(50 - 29)^2(50 - 42)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ m}^2$$

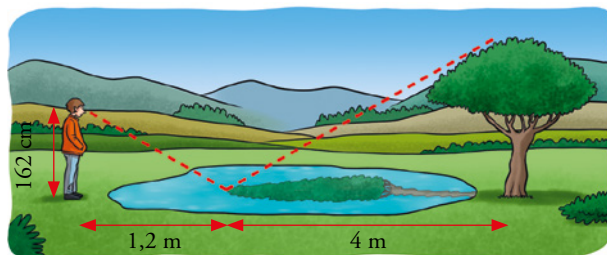
$$s_{\text{B}} = \frac{29 + 36 + 25}{2} = 45 \text{ m}$$

$$A_{\text{B}} = \sqrt{45(45 - 29)(45 - 36)(45 - 25)} = \sqrt{129\,600} = 360 \text{ m}^2$$

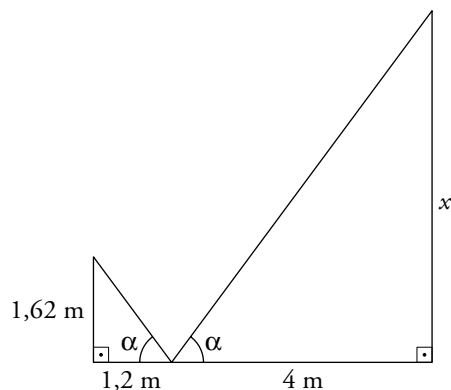
$$A_{\text{finca}} = A_{\text{A}} + A_{\text{B}} = 780 \text{ m}^2$$



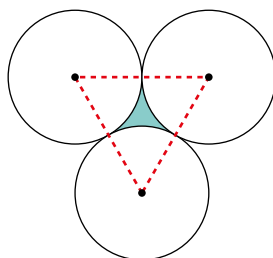
44 Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?



Por semejanza de triángulos:  $\frac{4}{1,2} = \frac{x}{1,62} \rightarrow x = 5,4 \text{ m}$



- 45** Calcula el área del recinto que tiene Sara para sembrar, es el que está entre los tres depósitos de agua cilíndricos de 5 m de radio que ha puesto su padre en el jardín.



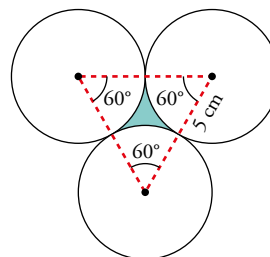
Como es un triángulo equilátero, sus ángulos son de  $60^\circ$ .

$$A_{\text{SECTOR } 60^\circ} = \frac{\pi \cdot 5^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ \approx 13,09 \text{ cm}^2$$

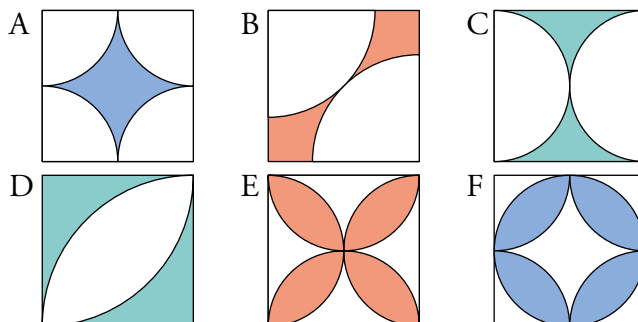
Aplicamos la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de lado 10 cm:

$$s = \frac{30}{2} = 15 \rightarrow A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{15 \cdot (5)^3} \approx 43,3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 43,3 - 3 \cdot 13,09 = 4,09 \text{ cm}^2$$



- 46** A cada uno de los seis mejores grafiteros y grafiteras de un certamen les han dado un lienzo cuadrado de 1 m de lado para que representen algún motivo geométrico. Estos son los resultados:



Fijándote en la superficie coloreada de cada lienzo, ordénalos de mayor a menor.

$$A_{\text{CUADRADO}} = 100^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

Figura A

$$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \frac{7\,854}{4} \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 4 \cdot \frac{7\,854}{4} = 2\,146 \text{ cm}^2$$

Figura B

Calculamos la diagonal del cuadrado,  $d = \sqrt{100^2 + 100^2} \approx 141,42 \text{ cm}$

El radio de las circunferencias es  $\frac{141,42}{2} = 70,71 \text{ cm}$ .

$$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 70,71^2 \approx \frac{15\,707,66}{4} \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot \frac{15\,707,66}{4} = 2\,146,17 \text{ cm}^2$$

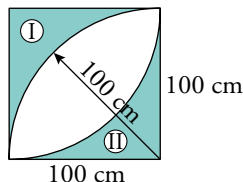
Figura C

El radio de las circunferencias es 50 cm.

$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \frac{7854}{2} \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10000 - 2 \cdot \frac{7854}{2} = 2146 \text{ cm}^2$$

Figura D



$$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{1}{4} \pi \cdot 100^2 \approx 7854 \text{ cm}^2$$

$$A_I = A_{II} = 10000 - 7854 \approx 2146 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 2 \cdot 2146 = 4292 \text{ cm}^2$$

Figura E

El área de la parte coloreada de la figura C es la mitad del área de las partes blancas de esta figura. Por tanto,  $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10000 - 2 \cdot 2146 = 5708 \text{ cm}^2$

Figura F

La parte coloreada de la figura A es la parte blanca del centro de esta figura.

$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 50^2 \approx 7854 \text{ cm}^2$$

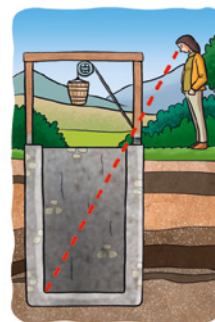
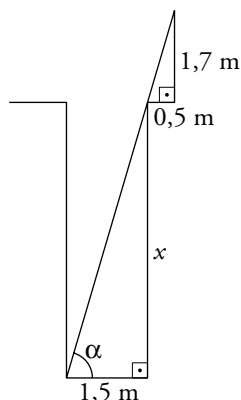
$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 7854 - 2146 = 5708 \text{ cm}^2$$

Ordenamos las superficies coloreadas de mayor a menor:

$$E = F > D > B > A = C$$

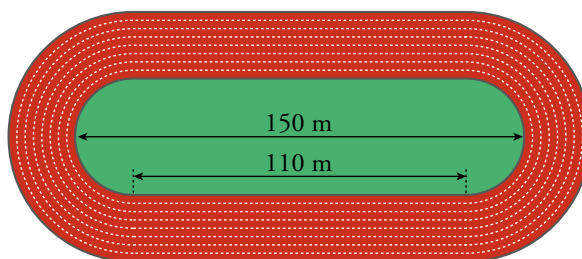
- 47** ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, observas que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

Por semejanza de triángulos:  $\frac{1,5}{0,5} = \frac{x}{1,7} \rightarrow x = 5,1 \text{ m}$



**48** Se quiere renovar con material sintético, que cuesta 15 €/m<sup>2</sup>, el piso de una pista de atletismo como la que ves en la figura, compuesta por 8 calles de 1 m de anchura.

¿A cuánto ascenderá el presupuesto para la compra del material?



$$A_{\text{PISTA}} = \pi \cdot 9^2 - \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot (110 \cdot 8) \approx 2011,33 \text{ m}^2$$

$$\text{PRESUPUESTO} = 2011,33 \cdot 15 \approx 30170 \text{ €}$$

**49** ¿Cuál es el diámetro de la tubería más gruesa que se puede introducir por el agujero cuya sección es un triángulo equilátero de 6 cm de lado?

El diámetro de la tubería coincidirá con el de la circunferencia inscrita en el triángulo. Esta circunferencia tiene por radio la apotema del triángulo y sabemos que la apotema de un triángulo equilátero es 1/3 de su altura.

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5,20 \text{ cm}$$

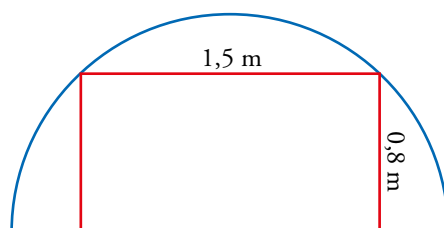
$$ap = \frac{1}{3}5,20 \approx 1,73 \text{ cm}$$

$$d = 2 \cdot 1,73 = 3,46 \text{ cm}$$

El diámetro de la tubería es 3,46 cm.

**50** Se va a perforar un túnel semicircular por el que circulará una vagoneta de 1,5 m de ancho por 0,8 m de alto.

¿Qué diámetro, como mínimo, debe tener la sección del túnel?

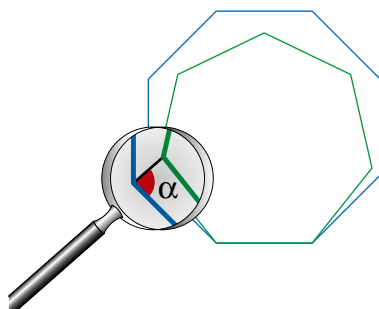


Si dibujamos el círculo completo, tendremos un rectángulo de base 1,5 m y altura  $2 \cdot 0,8 = 1,6$  m inscrito en él. La diagonal de este rectángulo coincide con el diámetro del círculo.

$$d = \sqrt{1,5^2 + 1,6^2} \approx 2,19 \text{ m}$$

La sección del túnel debe tener, como mínimo, 2,19 m.

**51** Calcula el valor del ángulo  $\alpha$  señalado en el dibujo.



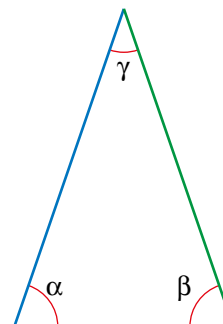
- El triángulo dibujado es isósceles, pues los lados del octógono regular y del heptágono regular miden lo mismo. Por tanto,  $\alpha = \beta$ .
- Calculamos el valor de  $\gamma$  como la diferencia del ángulo interno del octógono menos el ángulo interno del heptágono:

$$\gamma = \frac{180^\circ \cdot 6}{8} - \frac{180^\circ \cdot 5}{7} = 135^\circ - 128,57^\circ = 6,43^\circ$$

- $\alpha + \rho + \gamma = 180^\circ \rightarrow 2\alpha = 180^\circ - \gamma \rightarrow$

$$\rightarrow \alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \frac{180^\circ - 6,43^\circ}{2} = 86,79^\circ$$

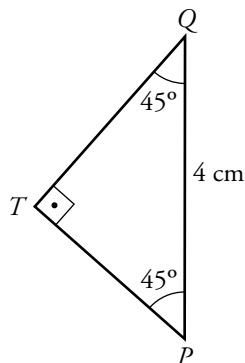
El ángulo  $\alpha$  buscado mide  $86,79^\circ$ , aproximadamente.





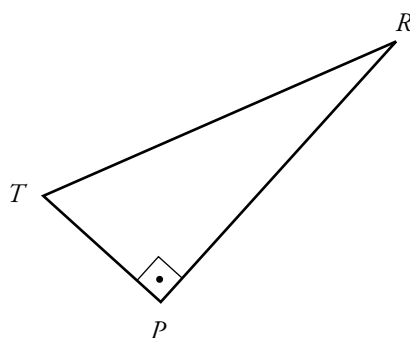
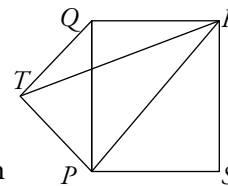
Resuelve: un poco más difícil

52 Calcula el área del triángulo  $PTR$  del dibujo sabiendo que el triángulo  $PTQ$  es rectángulo isósceles y que  $\overline{PQ} = 4$  cm y  $\overline{QR} = 3$  cm.



Por ser rectángulo isósceles:

$$\overline{PT} = \overline{TQ} \rightarrow \overline{PT}^2 + \overline{PT}^2 = 4^2 \rightarrow \overline{PT} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$



— Es rectángulo porque:

$$\widehat{TPR} = \widehat{TPQ} + \widehat{QPR} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

—  $PR$  es la diagonal de  $PQRS \rightarrow$

$$\rightarrow \widehat{PR} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm.}$$

$$- A_{PTR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PT} \cdot \overline{PR} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 =$$

$$= 5\sqrt{2} \text{ cm}^2 \approx 7,07 \text{ cm}^2.$$

53 En una circunferencia de  $\frac{5}{\sqrt{2}}$  cm de radio inscribimos un triángulo rectángulo. Sus catetos, dados en centímetros, son números naturales diferentes. Calcula el área del triángulo.

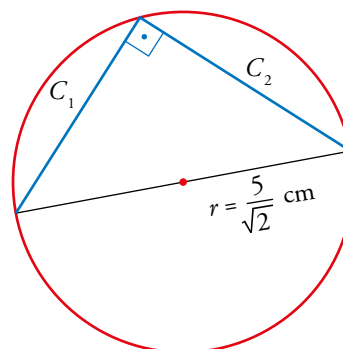
Si inscribimos un ángulo recto en una circunferencia, necesariamente abarca un arco de  $180^\circ$ , es decir, media circunferencia.

Por tanto, si inscribimos un triángulo rectángulo en una circunferencia, necesariamente la hipotenusa coincide con un diámetro.

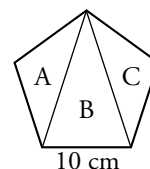
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$C_1^2 + C_2^2 = \left(2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50$$

La única pareja de números naturales diferentes que verifican la condición anterior son  $C_1 = 1$  y  $C_2 = 7$ .

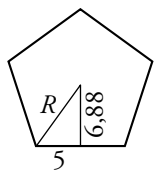


- 54** Calcula el área de cada uno de los tres triángulos en que se ha dividido un pentágono regular de 10 cm de lado por las dos diagonales que salen de un vértice.



La apotema del pentágono es  $0,688 \cdot 10 = 6,88$  cm.

Radio del pentágono,  $R = \sqrt{5^2 + 6,88^2} \approx 8,5$  cm



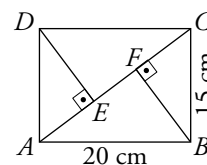
$$A_{\text{PENTÁGONO}} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 6,88}{2} = 172 \text{ cm}^2$$

$$A_B \approx \frac{10 \cdot (6,88 + 8,5)}{2} = 76,9 \text{ cm}^2$$

$$A_A = A_C \approx \frac{172 - 76,9}{2} = 47,55 \text{ cm}^2$$

- 55** Observando esta figura, halla:

- El área del triángulo  $ABC$ .
- La longitud del segmento  $BF$ .
- La longitud del segmento  $EF$ .



Calculamos primero la diagonal  $AC$  del rectángulo:  $\overline{AC} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$  cm.

- a) Aplicamos la fórmula de Herón:  $s = \frac{20 + 15 + 25}{2} = 30$

$$A = \sqrt{30 \cdot (30 - 20) \cdot (30 - 15) \cdot (30 - 25)} = 150 \text{ cm}^2$$

- b) Despejamos la medida de la altura,  $\overline{BF}$ , de la fórmula del área del triángulo  $ABC$ :

$$150 = \frac{25 \cdot h}{2} \rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

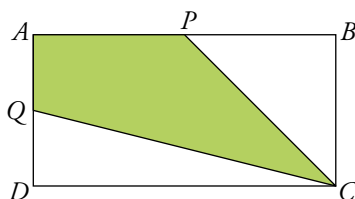
- c) Los triángulos  $ABC$  y  $ADC$  son iguales, y también lo son sus alturas  $\overline{BF}$  y  $\overline{DE}$ . Sabiendo esto vamos a calcular:

$$\text{La base del triángulo } DEC \rightarrow \overline{EC} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm}$$

$$\text{La base del triángulo } BFC \rightarrow \overline{FC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}$$

$$\text{Por último, } \overline{EF} = \overline{EC} - \overline{FC} = 16 - 9 = 7 \text{ cm}$$

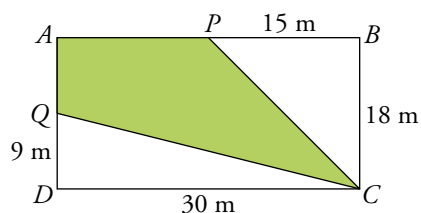
**56** El perímetro de este rectángulo es 96 m, y la base mide 12 m más que la altura.



Halla el área de la parte coloreada. ( $P$  y  $Q$  son los puntos medios de los lados  $AB$  y  $AD$ ).

Primero hallamos las medidas de la base y la altura del rectángulo. Llamamos  $x$  a la altura y  $x + 12$  a la base, entonces:

$$96 = 2x + 2(x + 12) \rightarrow x = 18 \text{ m} \rightarrow \text{La base mide } 30 \text{ m, y la altura, } 18 \text{ m.}$$

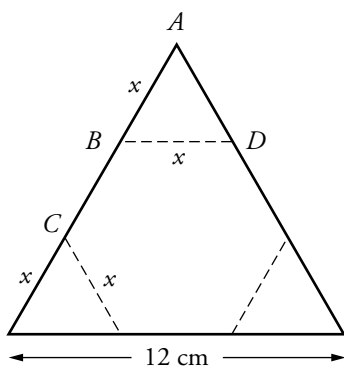


Para averiguar el área de la parte coloreada, calculamos el área de los triángulos rectángulos  $PBC$  y  $QDC$  y se las restamos al área del rectángulo:

$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ m}^2; A_{PBC} = \frac{15 \cdot 18}{2} = 135 \text{ m}^2; A_{QDC} = \frac{9 \cdot 30}{2} = 135 \text{ m}^2$$

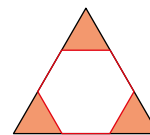
$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 540 - 2 \cdot 135 = 270 \text{ m}^2$$

**57** Tenemos un triángulo equilátero de 12 cm de lado. ¿Cómo hemos de cortar las esquinas para obtener un hexágono regular?



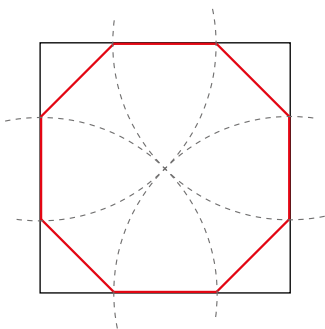
$\overline{BC}$  debe ser igual a  $\overline{BD}$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} = 12 - 2x \\ \overline{BD} = x \end{array} \right\} 12 - 2x = x \rightarrow x = 4$$

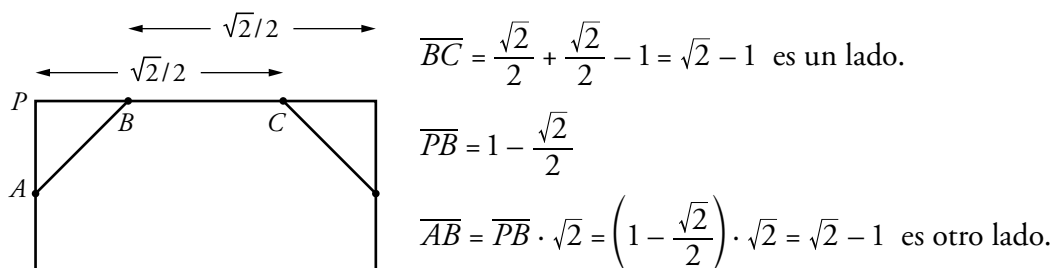


Hemos de cortar tres triángulos equiláteros de 4 cm de lado. Es decir, hemos de dividir los lados en tres trozos iguales y, así, cortar por las esquinas.

**58** Comprobar que el octógono que se obtiene del siguiente modo es regular:



Los ángulos de este octógono son, evidentemente, iguales a  $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ . Para probar que es regular, hemos de ver que también sus lados son iguales. Si el lado del cuadrado inicial es 1, su diagonal es  $\sqrt{2}$ . Por tanto, el radio con el que se trazan los arcos es  $\sqrt{2}/2$ .



Hemos visto que  $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2} - 1$ . Todos los lados del octógono son iguales. Por tanto, el octógono es regular.

**59** El cuadrilátero  $ABCD$  está inscrito en una circunferencia. Observa este razonamiento:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2}, \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$$

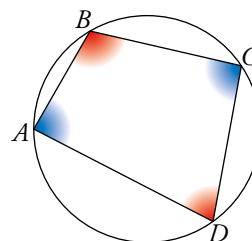
$$\hat{C} + \hat{A} = \frac{\widehat{BAD} + \widehat{BCD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Comprueba de igual forma que  $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ .

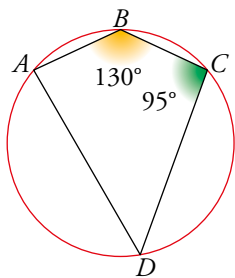
Esta es la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Exprésala con palabras.

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2}, \hat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{ADC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que sus ángulos opuestos sumen  $180^\circ$ .



**60** Calcula los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{D}$ .



(Ten en cuenta el problema anterior).

A Teniendo en cuenta el problema anterior, sabemos que los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$  deben sumar  $180^\circ$ , luego  $\hat{A} = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$ .

Haciendo el mismo razonamiento para  $\hat{B}$  y  $\hat{D}$ ,  $\hat{D} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ .

### Reflexiona

**61** ¿Qué puedes afirmar de un triángulo si uno de los lados coincide con el diámetro de su circunferencia circunscrita?

Se puede asegurar que es un triángulo rectángulo, puesto que, el ángulo opuesto al diámetro va a ser siempre recto.

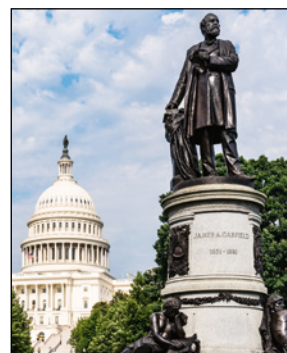
**62** ¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.

- Si en un plano mides una longitud y conoces la real, puedes hallar la escala.
- El ángulo inscrito en una circunferencia es igual al doble del ángulo que abarca.
- Dos triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.
- Dos figuras semejantes tienen los ángulos proporcionales.
- Con los tres lados de un triángulo se puede saber si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.
- Con los tres lados de un triángulo se puede hallar su área.
- Los ángulos de un pentágono regular suman  $540^\circ$ , pero si no es regular, no se sabe cuánto suman.
- Si una recta corta a dos rectas paralelas, se obtienen ocho ángulos distintos.
  - Verdadero. La escala es el cociente entre la longitud del plano y la real.
  - Falso. El ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco que abarca.
  - Verdadero. Es una de las condiciones de semejanza de triángulos.
  - Falso. Dos figuras semejantes tienen los ángulos iguales.
  - Verdadero. Es una de las aplicaciones del teorema de Pitágoras.
  - Verdadero. Basta con aplicar la fórmula de Herón.
  - Falso. Los ángulos de un pentágono, sea o no regular, siempre suman  $540^\circ$ .
  - Falso. Al menos cuatro ángulos son iguales entre sí, y los otros cuatro, también.

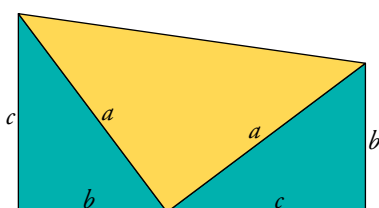
Lee y comprende

Una curiosa demostración del teorema de Pitágoras

- James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente de Estados Unidos, fue profesor de Lenguas Clásicas, militar y político y, además, aficionado a las matemáticas, como puedes comprobar con esta demostración que publicó en el *New England Journal of Education*:



Se toma un triángulo rectángulo cualquiera apoyado sobre un cateto ( $b$ ). Se repite el mismo triángulo apoyado sobre el otro cateto ( $c$ ) y se construye un trapecio, como indica la figura.



$$\text{Área del trapecio} \rightarrow A = \frac{b+c}{2} \cdot (b+c)$$

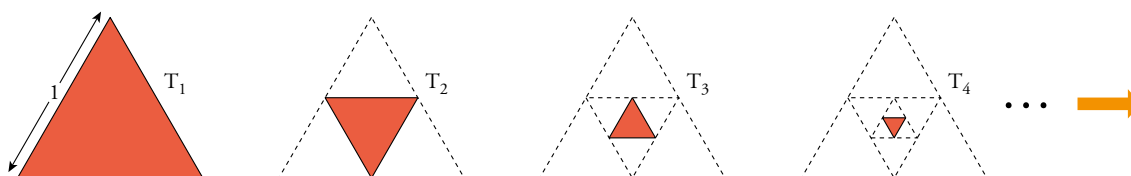
$$\text{Área del trapecio} \rightarrow A = \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot a}{2}$$

Igualando ambas expresiones del área del trapecio se obtiene, simplificando, la expresión del teorema de Pitágoras. Intenta hacerlo tú.

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{2} \cdot (b+c) &= \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot a}{2} \rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2cb+a^2}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow b^2 + c^2 + 2cb = 2cb + a^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Generaliza

- Observa la siguiente serie de triángulos equiláteros:



¿Cuál es la razón de semejanza entre dos triángulos consecutivos? ¿Y la razón de sus áreas?

Completa la tabla, resolviendo los primeros casos particulares y, después, generalizando:

	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	...	$T_{10}$	...	$T_n$
LADO $\rightarrow l$	1	1/2	1/4	?	...	?	...	?
ÁREA $\rightarrow A$	$\sqrt{3}/4$	?	?	?	...	?	...	?

Entrénate resolviendo otros problemas

- Un camionero presupuesta cierta cantidad de dinero para el gasto de carburante en un recorrido de 600 km. Sin embargo, una rebaja en el precio del gasóleo le supone un ahorro de 0,14 € por kilómetro, lo que le permite realizar un recorrido de 750 km con el mismo gasto.



¿Cuál fue la cantidad presupuestada para carburante?

En 600 km ahora  $0,14 \cdot 600 = 84$  €.

Ahora hace 750 km; es decir,  $750 - 600 = 150$  km más.

Con 84 € hace 150 km. Ahora, cada kilómetro le cuesta  $84 : 150 = 0,56$  €.

La cantidad presupuestada es de  $750 \cdot 0,56 = 420$  €.

- Nuria quiere repartir su pulsera de oro de siete eslabones entre sus siete sobrinos y sobrinas.

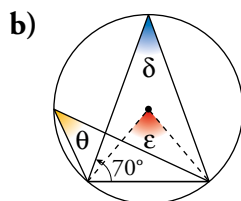
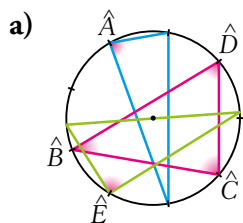


¿Cuántos eslabones debe partir para poder dar uno a cada sobrino y sobrina? (Se supone que quiere estropear lo menos posible su pulsera).

Debe partir tres eslabones: el segundo, el cuarto el texto

## AUTOEVALUACIÓN

### 1 Calcula los ángulos desconocidos en estas figuras:



a) La circunferencia está dividida en 9 arcos iguales: cada uno de los arcos mide  $40^\circ$ .

$$\hat{A} = \frac{4 \cdot 40^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{2 \cdot 40^\circ}{2} = 40^\circ$$

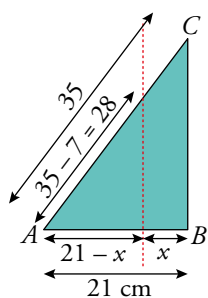
$$\hat{C} = \frac{4 \cdot 40^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\hat{D} = \frac{3 \cdot 40^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\hat{E} = 90^\circ \text{ (está inscrito en una semicircunferencia).}$$

b) Observamos que los tres ángulos pedidos abarcan el mismo arco y que el triángulo del que es ángulo  $\delta$ , es isósceles. Así:  $\delta = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$ ,  $\theta = 40^\circ$  y  $\epsilon = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$

### 2 ¿A qué altura, $x$ , hay que cortar el triángulo $ABC$ para que la hipotenusa se reduzca en siete centímetros?



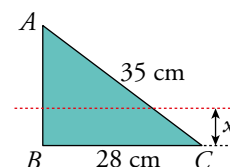
Calculamos el lado desconocido,

$$\overline{AB} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21 \text{ cm.}$$

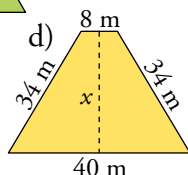
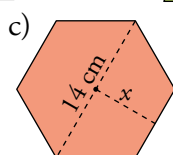
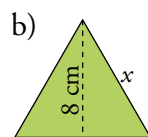
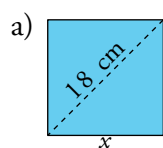
Si giramos la figura, observamos dos triángulos en posición de Tales, son semejantes:

$$\frac{35}{21} = \frac{28}{21 - x} \rightarrow 735 - 35x = 588 \rightarrow x = \frac{588 - 735}{-35} = 4,2$$

Debemos cortar el triángulo a una altura de 4,2 cm.



### 3 Calcula el valor de $x$ en cada caso:



Utilizamos los resultados del ejercicio resuelto 1 de la página 196.

a)  $l = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 18 \approx 12,73 \text{ cm}$

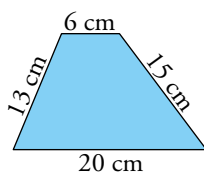
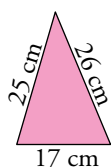
b)  $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \rightarrow x = \frac{8 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 9,24 \text{ cm}$

c)  $ap = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \approx 6,06 \text{ cm}$

d)  $x = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30 \text{ m}$



#### 4 Calcula las alturas del triángulo y del trapecio:



##### Triángulo

Utilizamos la fórmula de Herón y la del área del triángulo.

$$s = \frac{25 + 26 + 17}{2} = 34 \text{ cm}$$

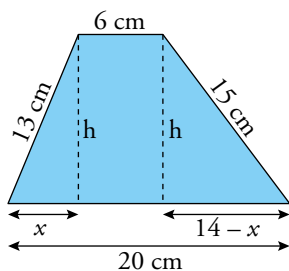
$$A = \sqrt{34 \cdot (34 - 25) \cdot (34 - 26) \cdot (34 - 17)} = 204 \text{ cm}^2$$

$$204 = \frac{17 \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{204 \cdot 2}{17} = 24 \text{ cm}$$

La altura del triángulo mide 24 cm

##### Trapecio

Observando la figura planteamos el siguiente sistema y lo resolvemos por igualación:



$$\left. \begin{array}{l} h^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \\ h^2 = 13^2 - x^2 \end{array} \right\} \rightarrow 15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2 \rightarrow x = 5$$

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

La altura del trapecio mide 12 cm.

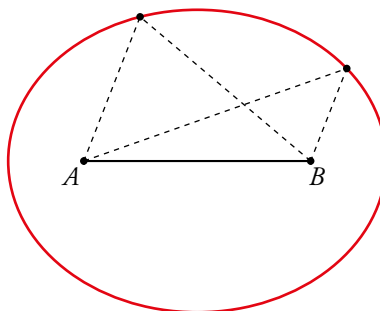
#### 5 Dibuja dos puntos, $A$ y $B$ , a 6 cm de distancia.

- a) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ ? Dibújalo.  
b) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a  $A$  y  $B$  es 10 cm? Dibújalo aproximadamente.

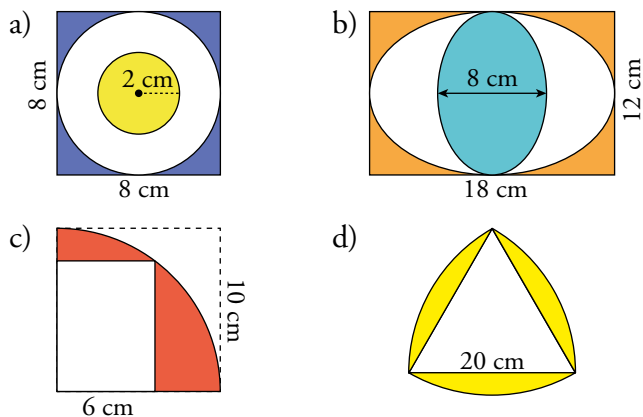
- a) Es la mediatriz del segmento.



- b) Es la elipse de focos  $A$  y  $B$ .



**6** Calcula el área de la zona coloreada en cada una de las siguientes figuras:



a)  $A = 8^2 - \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 2^2 = 64 - 12\pi \approx 26,30 \text{ cm}^2$

b)  $A = 12 \cdot 18 - \pi \cdot 9 \cdot 6 + \pi \cdot 4 \cdot 6 = 216 - 30\pi \approx 121,75 \text{ cm}^2$

c) Para hallar el área de la parte coloreada calculamos la del cuarto de círculo y le restamos la del rectángulo blanco. Observamos que tanto el radio de la circunferencia como la diagonal del rectángulo miden 10 cm.

$$A_{I/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \approx 78,54 \text{ cm}^2$$

$$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm} \rightarrow A_{\text{RECTÁNGULO}} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78,54 - 48 = 30,54 \text{ cm}^2$$

d) El triángulo blanco es equilátero, por lo que todos sus ángulos miden  $60^\circ$ . Calculamos el área del sector circular de  $60^\circ$  y el área del triángulo:

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 60^\circ \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{360^\circ} \approx 209,44 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{30 \cdot (30 - 20)^3} \approx 173,21 \text{ cm}^2$$

Restamos ambas áreas para obtener una de las partes amarillas de la figura:

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 3 \cdot (209,44 - 173,21) = 108,69 \text{ cm}^2$$

**7** Si en el plano de una vivienda se representa una mesa de 5 m de largo con un rectángulo de 2 cm de largo:

a) ¿Cuál es la escala que se ha utilizado?

b) ¿Qué longitud tiene el pasillo si su representación tiene 4 cm de largo?

c) ¿Cuál es el ancho real de la cocina si en el plano tiene 3 cm?

a)  $5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$ .

$$\left. \begin{array}{l} 500 \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 1 \end{array} \right\} \rightarrow x = 250 \rightarrow \text{Escala } 1 : 250$$

b)  $\left. \begin{array}{l} 250 \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 4 \end{array} \right\} \rightarrow x = 250 \cdot 4 = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$

El pasillo mide 10 m en realidad.

c)  $\left. \begin{array}{l} 250 \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 3 \end{array} \right\} \rightarrow x = 250 \cdot 3 = 750 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}$

El ancho real de la cocina son 7,5 cm.