8 FUNCIONES. CARACTERÍSTICAS

Página 153

Resuelve

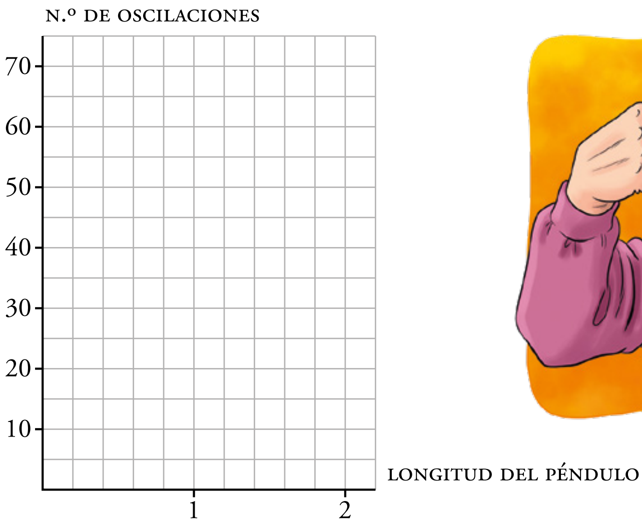
1 **El matemático que introdujo la notación $f(x)$, que utilizamos hoy en día para el manejo de funciones, fue Leonhard Euler. Busca información de su vida y de sus logros en el campo de las matemáticas.**

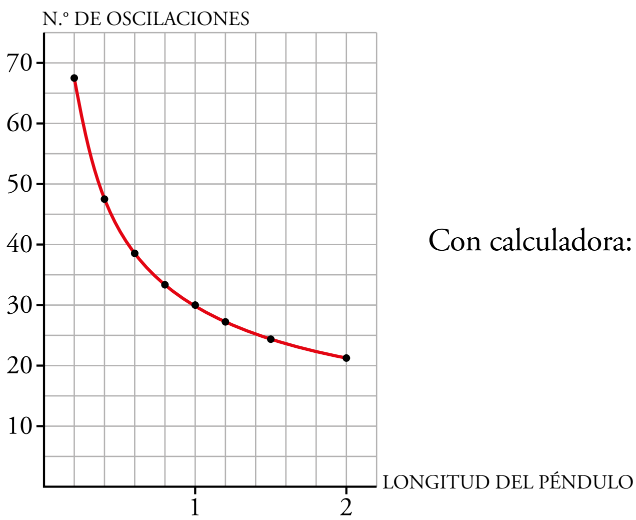
Respuesta abierta.

2 **Supón que realizamos un experimento similar al del joven Galileo, con el péndulo, y obtenemos los siguientes resultados (siendo «l» la longitud del péndulo (en m) y «n» el número de oscilaciones por minuto):**

l	2	1,50	1,20	1	0,80	0,60	0,40	0,20
n	21	24,5	27,5	30	33,5	38,5	47,5	67

Representa estos datos en tu cuaderno elaborando un sistema de referencia como el que te presentamos a continuación. Comprueba que los valores de la tabla responden bastante bien a la relación: $n = \dfrac{30}{\sqrt{l}}$





Con calculadora: 30 ÷ √ 2 = 21.21320343 ≈ 21

30 ÷ √ 1,5 = 24.49489742 ≈ 24,5

Etcétera.

1 LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Página 154

1 Observa la gráfica del helicóptero y responde:

a) ¿Cuánto tiempo ha empleado en realizar la misión?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja a coger agua? ¿Y para apagar el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para soltarla sobre el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 300 m de altura?

a) Ha empleado 27 minutos.

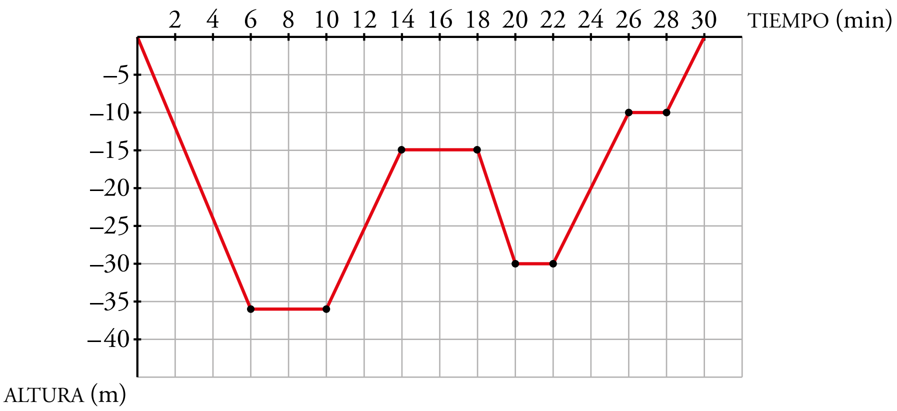
b) A los 20 min estaba a 60 metros. Baja a coger agua a 10 metros. Para apagar el fuego se sitúa a 60 metros.

c) Necesita 2 minutos para llenar el depósito. Para soltar el agua necesita 1,5 minutos, aproximadamente.

d) $v = \dfrac{300 \text{ m}}{3 \text{ min}} = 100 \text{ m/min}$

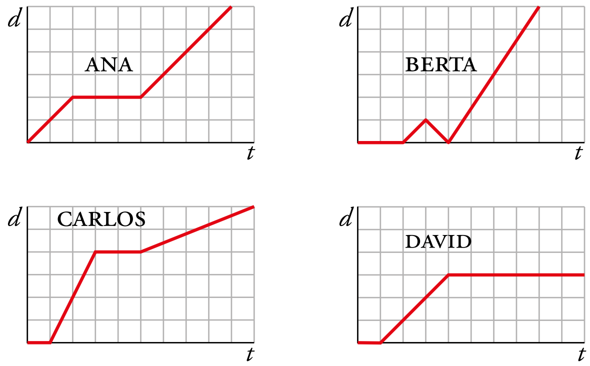
2 Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.

En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.



Página 155

3 **Dos hermanas y dos hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (*d*) - tiempo (*t*) de cada uno:**



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos han ido a buscar a sus amigos para ir a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo sin moverse?

a) Ha salido antes Ana.

b) Ha llegado más tarde Carlos.

c) Ana y Carlos.

d) Se le ha olvidado algo a Berta.

e) No ha ido a clase David.

f) Ha andado más lento Carlos.

g) Berta ha ido más rápido.

h) David.

2 ASPECTOS RELEVANTES DE UNA FUNCIÓN

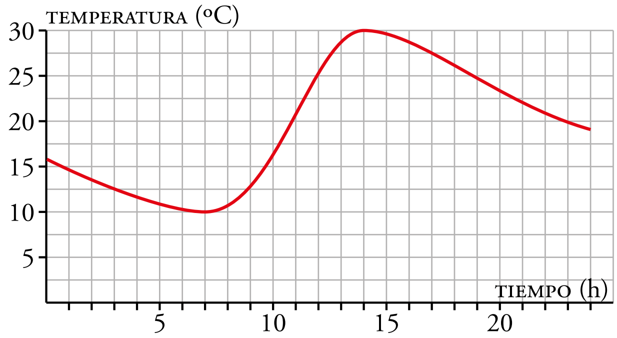
Página 156

1 **La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.**

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



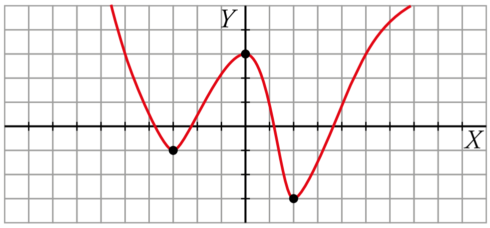
a) La temperatura en Jaca aumenta en el intervalo 7-14 horas y decrece en los intervalos 0-7 horas y 14-24 horas.

b) Por los cambios de temperatura a lo largo del día. Por la mañana las temperaturas van aumentando y, al acercarse la noche, las temperaturas disminuyen.

c) La temperatura más alta que alcanza son los 30 °C durante el día y la temperatura más baja que alcanza son los 10 °C. Por tanto, cuando se ha hecho esta gráfica era verano.

Página 157

2 **a) Indica en qué puntos de la gráfica hay máximos y mínimos relativos.**



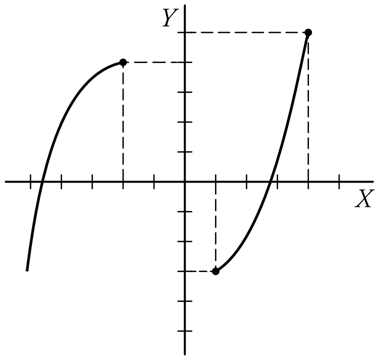
b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Máximo relativo en (0, 3). Mínimos relativos en (–3, –1) y en (2, –3).

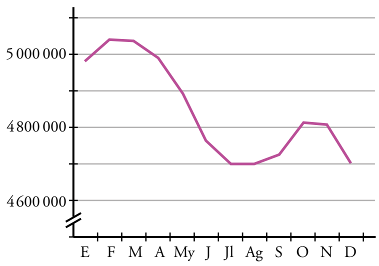
b) La función crece en (–3, 0) ∪ (2, +∞), y decrece en (–∞, –3) ∪ (∞, 2).

3 **Sobre unos ejes, dibuja una gráfica creciente que tenga dos máximos relativos en (–2, 4) y (4, 5) y un mínimo relativo en (1, –3).**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



4 Meta. 8.5. **La siguiente gráfica muestra la tasa de paro en un cierto país en 2020:**



a) ¿En qué meses se encuentran los máximos y mínimos relativos?

b) ¿Qué crees que causa estas fluctuaciones en la tasa de paro?

c) ¿Has oido hablar del empleo estacional? Búscalo en Internet y relaciónalo con lo que ocurre en la gráfica.

a) Los máximos, en Marzo y Noviembre. Los mínimos, en Enero, Agosto y Diciembre.

b) El descenso en el paro lo provoca las campañas de Navidad y de verano.

c) El empleo estacional es el que se produce en determinadas épocas del año por estar asociado a una industria o sector económico donde la demanda de empleo es mucho más alta en unas temporadas que en otras.

Por ejemplo, en nuestra gráfica, la campaña comercial de Navidad o la campaña turística veraniega hacen que descienda mucho el paro.

Página 158

5 **La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.**

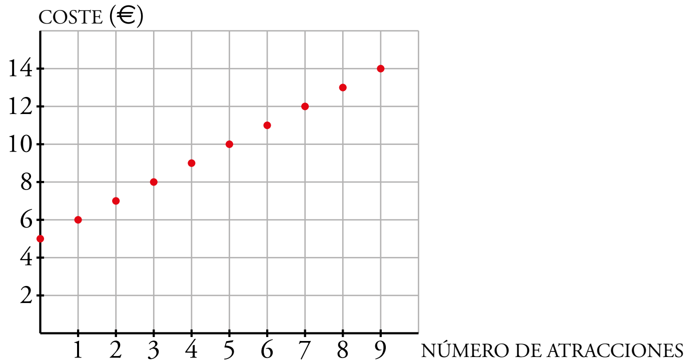
a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta* → *coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

a)



b) No pueden unirse porque una persona no puede montarse en media atracción o solo pagar medio viaje.

c) Subir a doce atracciones costará 5 € más un euro por atracción, es decir, 5 + 12 = 17 €.

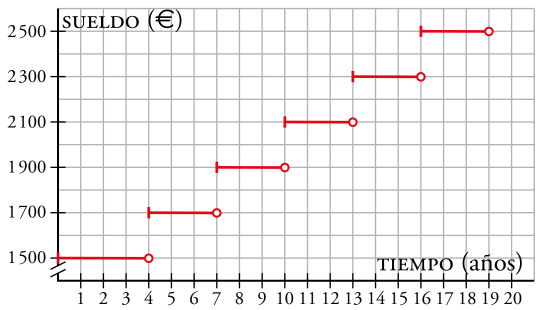
Subir a 20 atracciones costará 5 + 20 = 25 €.

6 **La gráfica de la abajo muestra el sueldo mensual de una persona en una empresa a lo largo de su vida.**

a) ¿Cuánto tiempo lleva la persona en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? Suponiendo que se sigue la tendencia, ¿cuánto gana a los 20 años?

c) ¿Es una función continua?



a) Cuando le suben el sueldo por primera vez, la persona lleva en la empresa 4 años.

b) A los 12 años de entrar cobra 2 100 €, y a los 20, 2 500 €.

c) No, no es continua.

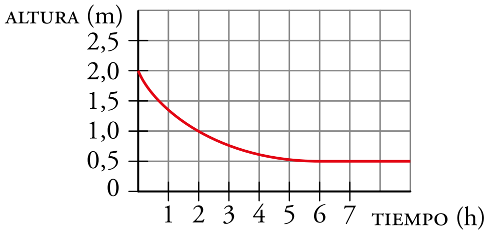
Página 159

7 **A un depósito cilíndrico de 2 m de alto lleno de agua se le hace un pequeño agujero a una distancia de 0,5 m de su base. El agua sale al principio con mucha presión, pero según se va vaciando el depósito, el agua va perdiendo presión hasta que, a las 4 h, el agujero rezuma solo un hilillo y no para hasta las 5 h.**

a) Representa la gráfica de la función:

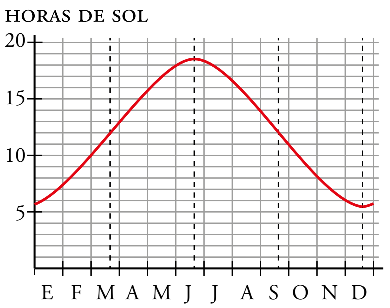
tiempo transcurrido → *altura del agua*

b) ¿A cuánto tiende la función? ¿En qué se traduce dicha tendencia?

a) 

b) La función tiende a 0,5 m, lo que quiere decir que la altura del agua en el depósito tiende a estabilizarse a 0,5 m.

8 **Esta gráfica muestra las horas de sol que hay a lo largo del año en Oslo (Noruega).**



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿Cuántas horas de sol hay en el solsticio de invierno? ¿Y en el de verano?

c) ¿Aproximadamente en qué momentos del año hay 14 horas de sol?

a) Sí, es periódica de periodo 1 año.

b) 5,5 h, aproximadamente, en el de invierno. En el de verano hay 18,5 h, aproximadamente.

c) A mitad de abril, y a finales de agosto y principios de septiembre.

3 EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN

Página 160

1 **Indica cuáles de los siguientes pares de valores corresponden a la base y al área de algún rectángulo del ejemplo anterior:**

a) Base: $x = 1$ cm $\rightarrow$ Área: $A = 39$ cm^2

b) $x = 5 \rightarrow A = 35$

c) $x = 22 \rightarrow A = 396$

d) $x = 42 \rightarrow A = -84$

La fórmula que deben cumplir para que sean como el ejemplo anterior es $A = x(40 - x)$.

a) $1 \cdot 39 = 39 = A \rightarrow$ Sí es igual.

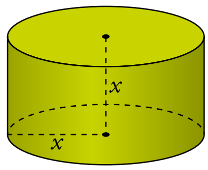
b) $5 \cdot 35 = 175 \neq 35 \rightarrow$ No es igual.

c) $22 \cdot 18 = 396 = A \rightarrow$ Sí es igual.

d) El área no puede ser negativa.

Página 161

2 **Imagina un cilindro cuya altura, x, sea igual al radio de su base.**



a) ¿Cuál es la expresión analítica de su volumen?

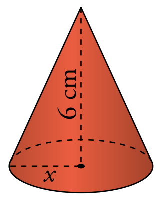
Recuerda que el volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

b) Obtén la expresión analítica del área del cilindro.

a) $V = \pi x^2 \cdot x \;\rightarrow\; V = \pi x^3$

b) $A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \;\rightarrow\; A = 2\pi x^2 + 2\pi x^2 \;\rightarrow\; A = 4\pi x^2$

3 **Indica cuál es la expresión analítica del volumen de un cono sabiendo que su altura son 6 cm y el radio de su base es variable.**



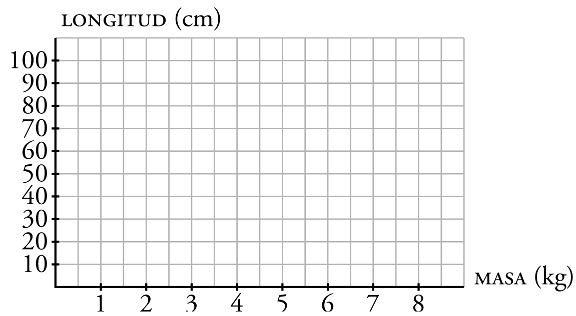
Recuerda que el volumen de un cono es 1/3 del área de la base por la altura.

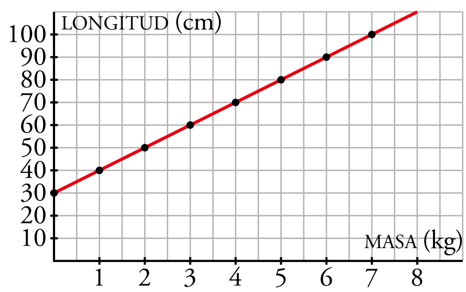
$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 6 \;\rightarrow\; V = 2\pi x^2$

4 **Un muelle mide 30 cm y se alarga otros 10 cm por cada kilogramo que se cuelga de él. Pero no se pueden colgar más de 7,5 kg.**

La función que relaciona la longitud, L, del muelle con la masa, m, que soporta es: $L = 30 + 10m$.

Represéntala en tu cuaderno en unos ejes cartesianos como estos:





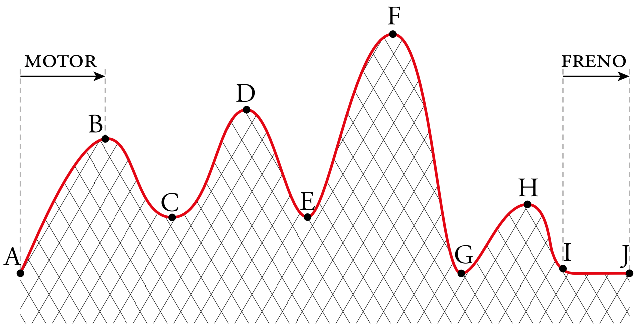
EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

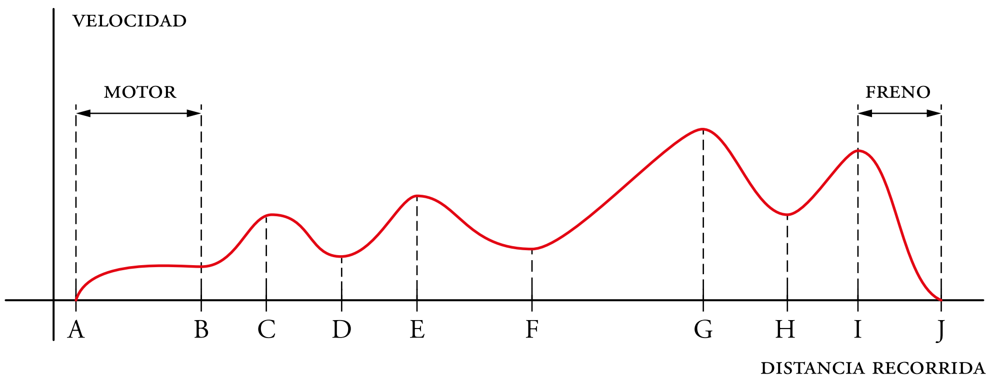
Página 162

1. Construcción de gráficos

Hazlo tú

- **Dibuja, de forma aproximada, la gráfica de la función *distancia recorrida - velocidad* para la montaña rusa de la derecha.**





2. Interpretación de dos gráficas sobre la misma cuadrícula

Hazlo tú

- **Las siguientes gráficas muestran la evolución de los medios de comunicación.**

  a) ¿En qué años coincide Internet con los demás?

  b) Indica cómo ha evolucionado Internet con respecto a los demás.

  a) Internet coincide con los diarios en 2010, y con las revistas en 2012.

  b) Los diarios se mantuvieron en un 40 %, aproximadamente, hasta el año 2008, momento en que empezaron a bajar hasta llegar a un 30 %, más o menos, en 2016.

  Las revistas se mantuvieron con pequeñas fluctuaciones hasta el año 2008 en un 55 %, aproximadamente. Después comenzaron a descender sin parar llegando a 2016 con un 40 %.

  La televisión se mantuvo durante todos esos años en torno al 90 %, con mínimas variaciones.

  Por su parte, Internet ha ido subiendo año tras años de manera prácticamente lineal desde un 5 % en 2008 hasta un 70 % en 2016.

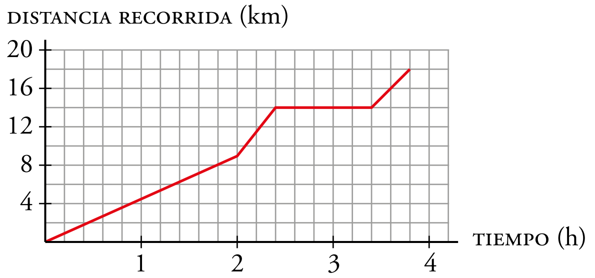
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 163

Practica

Interpretación de gráficas

1 **Ana sale a las 10:00 con la intención de subir una montaña para luego volver por el mismo camino hasta llegar al punto de partida. Esta gráfica muestra la distancia recorrida a lo largo de su caminata:**



a) ¿Cuánto tiempo dura la caminata? ¿A qué hora acaba de andar?

b) ¿Cuándo ha llegado a la cima?

c) ¿Qué distancia ha recorrido antes de parar a descansar? ¿Cuánto tiempo descansa?

d) ¿En qué intervalo de tiempo baja la cuesta más empinada?

e) Explica por qué la gráfica nunca es decreciente.

a) La caminita dura 4,8 h = 4 h 48 min. Acaba de andar a las 10 h + 3 h 48 min = 13 h 48 min.

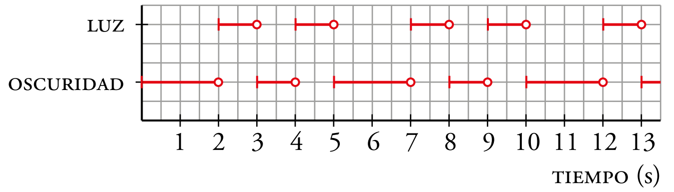
b) Ha llegado a la cima a las 2 horas; es decir, a las 12:00.

c) Ha recorrido 14 km antes de parar a descansar. Descansa durante 1 horas.

d) Entre las 2 h y las 2,4 h de empezar a caminar; es decir, entre las 12:00 y las 12:24 h.

e) Nunca es decreciente porque la distancia que camina aumenta constantemente, nunca puede decrecer.

2 **La luz de un faro que se enciende y se apaga varias veces en una secuencia de tiempo única (cada faro tiene la suya propia) se muestra en esta gráfica:**



a) ¿Cada cuánto tiempo se repite, es decir, cuál es el periodo de esta función?

b) La luz a los 6 s, ¿está encendida o apagada? ¿Y a los 7 s?

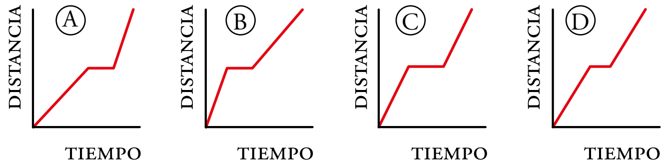
c) ¿Cómo estará la luz a los 15 s? ¿Y al minuto?

a) Se repite cada 5 segundos. Es una función periódica de periodo 5 segundos.

b) A los 6 segundos está apagada. A los 7 segundos se enciende.

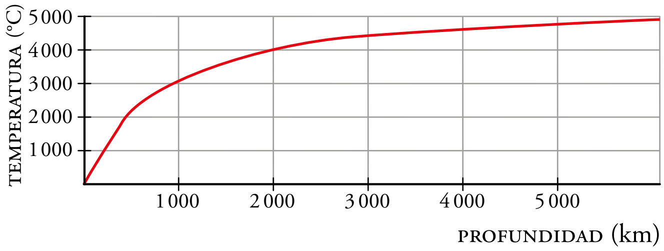
c) A los 15 segundos estará apagada. Al minuto también estará apagada.

3 **Guillermo sale corriendo de casa para no llegar tarde a clase. A medio camino para un rato a descansar y continúa andando tranquilamente hasta que llega. Indica qué gráfica muestra la distancia que recorre.**



La gráfica correspondiente es la Ⓑ: al principio, como Guillermo va corriendo, la recta tiene mucha inclinación, lo que significa que la distancia que recorre aumenta rápidamente; a mitad de camino se para, lo que indica que la distancia que recorre se mantiene constante, ni sube ni baja; por último, sigue andando, más despacio que al principio, por lo que aumenta la distancia pero a menor velocidad, por lo que la recta tiene menos pendiente.

4 **La temperatura de la Tierra va aumentando en función de la profundidad. Al principio aumenta de manera constante y poco a poco se estabiliza. La gráfica muestra una estimación de dicha variación:**



a) ¿Qué temperatura hay a 1 500 km de profundidad, aproximadamente? ¿Y a 3 000 km?

b) Estima la temperatura en el centro de la Tierra (6 371 km).

c) Suponiendo que en el primer tramo la temperatura crece de forma constante unos 20 °C/km, ¿a qué profundidad se alcanzan 1 000 °C? ¿Y 2 000 °C?

d) El punto de fusión del hierro es de 1 538 °C. ¿Desde qué profundidad podemos asegurar que el hierro se encuentra en estado líquido?

a) A 1 500 km, unos 3 500 °C. A 3 000 km, unos 4 500 °C.

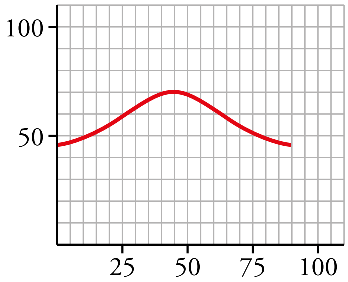
b) La función parece que tiende a estabilizarse a 5 000 °C, por lo que estimamos que en el centro de la Tierra hará esa temperatura.

c) $\frac{1000}{20} = 50 \rightarrow$ A 50 km se alcanzan 1 000 °C, aproximadamente.

$\frac{2000}{20} = 100 \rightarrow$ A 100 km se alcanzan 2 000 °C, aproximadamente.

c) $\frac{1538}{20} = 76{,}9 \rightarrow$ A partir de los 76,9 km.

5 **Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros. Esta gráfica muestra su distancia al Sol:**

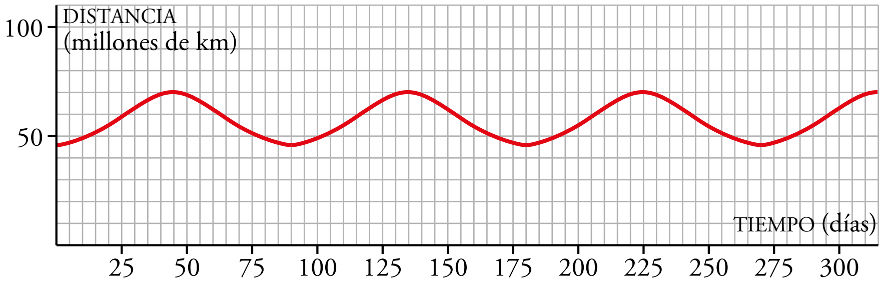


a) Copia y completa la gráfica para 300 días.

b) Estima su distancia al Sol dentro de dos años terrestres.

c) Cuando comienza la gráfica, Mercurio se encuentra a 46 millones de kilómetros del Sol. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que está a 60 millones de kilómetros?

a)



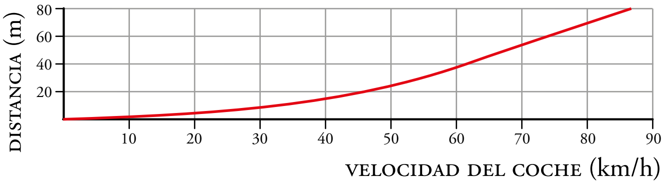
b) 2 años = 365 · 2 = 730 días.

730 días = 88 · 8 + 26 → En el día 730 estará en la misma posición que en el día 26.

Mirado la gráfica, estimamos que su distancia al sol dentro de dos años será de 62 millones de kilómetros.

c) Mirando la gráfica vemos que pasan 25 días, pues la función pasa por el punto (25, 60).

6 **La siguiente gráfica muestra la distancia que recorre un vehículo desde que presiona el freno hasta que para, en función de la velocidad que lleva:**



a) Aproximadamente, ¿cuántos metros recorre un vehículo al frenar si va a 55 km/h?

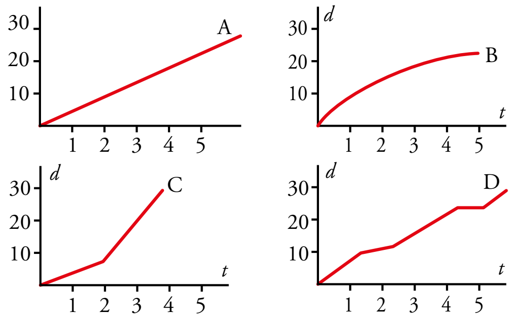
b) ¿A qué velocidad iba un vehículo que ha necesitado 50 m para frenar?

a) Aproximadamente, 30 metros.

b) Aproximadamente, a 65 km/h.

Página 164

7 **Las siguientes gráficas nos muestran la distancia recorrida por cuatro senderistas en función del tiempo que dura su marcha:**



a) Describe el ritmo de cada senderista.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

d) ¿Quién alcanza más velocidad?

e) Inventa una gráfica correspondiente a una senderista que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

a) El montañero A lleva un ritmo constante.

El montañero B va decreciendo el ritmo según avanza el tiempo.

El montañero C comienza a un ritmo y a las dos horas acelera hasta que se para a las cuatro horas.

El montañero D va alternando un ritmo rápido con un ritmo más lento.

b) El montañero B recorre menos camino, recorre 20 km aproximadamente.

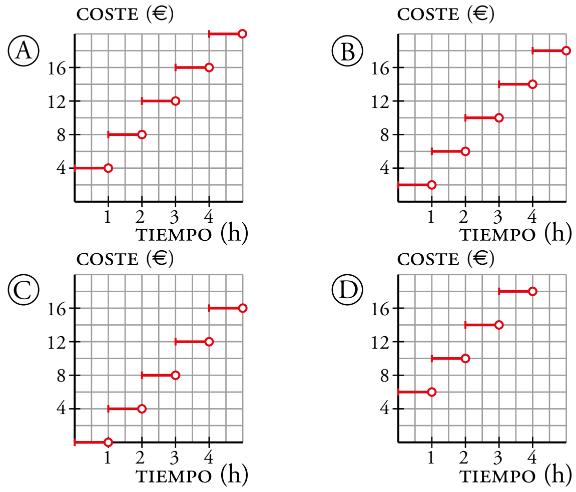
c) El montañero C camina durante menos tiempo, camina casi cuatro horas.

d) Alcanza más velocidad el montañero C.

e)

8 **La entrada a un parque de atracciones cuesta 2 €, y la pulsera para subir a todas las atracciones, 4 € cada hora o fracción (es decir, que te cobran la hora completa aunque la uses solo un rato).**

a) ¿Cuál de estas gráficas representa mejor el coste de entrar y montar en las atracciones?

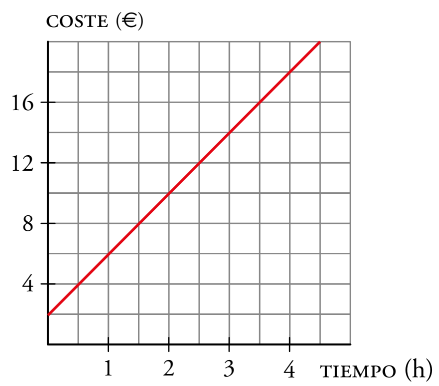


b) Dibuja en tu cuaderno una gráfica que represente el coste si cobran exactamente por el tiempo que has utilizado la pulsera.

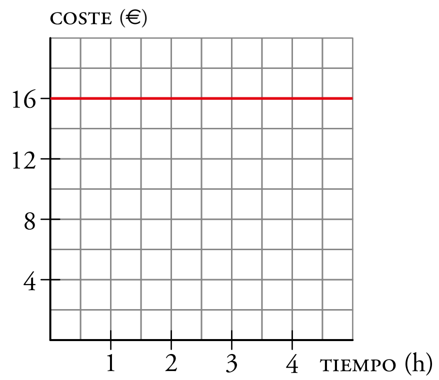
c) Dibuja otra que represente el coste de un bono en el que pagas 16 € para entrar y montarte en todas las atracciones el tiempo que quieras hasta que cierre el parque.

a) La gráfica Ⓓ, ya que por estar la 1ª hora te cobran 2 € de entrada más 4 € de la pulsera; es decir 6 €. Después, el precio de cada hora siguiente sube de 4 € en 4 €.

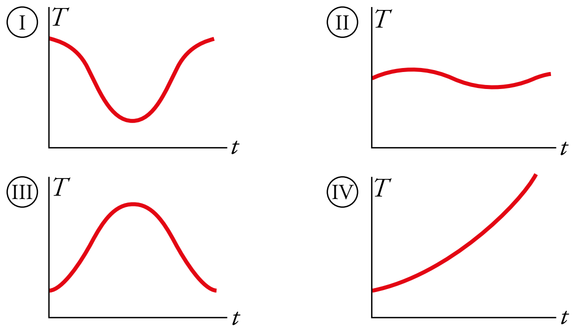
b)



c)



9 **Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:**



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de I y II, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

f) Dibuja una gráfica correspondiente a un lugar en el desierto del Sahara y otra a uno en la Antártida.

a) En la ciudad b.

b) Las gráficas a y c, porque cuando en una la temperatura es alta en la otra es baja y al revés.

c) La grafica d es absurda, porque la temperatura solo crece.

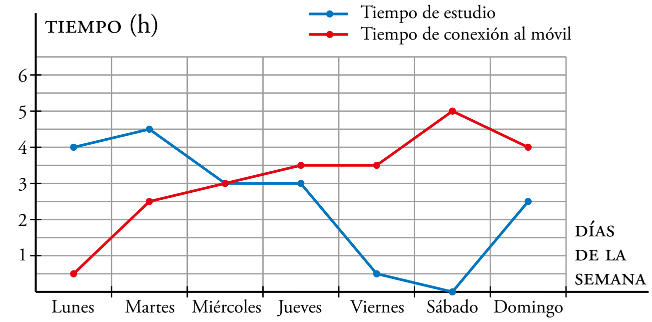
d) Para la variable tiempo, podemos hacer corresponder cada cuadradito con un mes.

Para la variable temperatura, cada cuadradito pueden ser 2 ó 5 grados centígrados.

e) El dominio es el intervalo 1-12 (o de Enero a Diciembre).

Son ciudades que no tienen inviernos muy fríos, ya que en ningún caso se alcanzan temperaturas bajo cero. La ciudad a tiene más variación entre sus temperaturas. En la ciudad b, la temperatura no varía demasiado a lo largo de los meses.

10 **Arancha dedica demasiado tiempo a mirar el móvil. Para controlarse, decide anotar minuciosamente durante una semana el número de sus horas de estudio y del tiempo que está con el móvil. Estos son los resultados:**



a) ¿Qué día ha estudiado más? ¿Y menos?

b) ¿Cuándo ha pasado más tiempo con el móvil?

c) ¿Qué día hay más diferencia entre los tiempos dedicados a cada actividad?

d) ¿Algún día ha estado con el móvil el mismo tiempo que estudiando? ¿Cuándo?

e) ¿Qué día ocupa más tiempo entre ambas actividades?

a) Ha estudiado más el martes, y menos, el sábado.

b) Ha pasado más tiempo con el móvil el sábado.

c) El sábado, pues hay 5 horas de diferencia.

d) Sí. El miércoles.

e) Lunes: 0,5 + 4 = 4,5 h. Martes: 2,5 + 4,5 = 7 h.

Miércoles: 3 + 3 = 6 h. Jueves: 3,5 + 3 = 6,5 h. Viernes: 3,5 + 0,5 = 4 h.

Sábado: 5 + 0 = 5 h. Domingo: 4 + 2,5 = 6,5 h.

El martes es el día que ocupa más tiempo con ambas actividades.

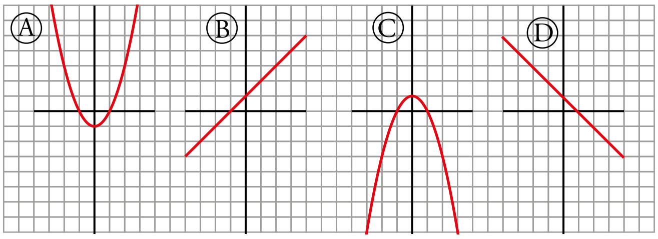
Página 165

Relaciones gráficas y expresiones analíticas

11 **Relaciona cada gráfica con una de estas expresiones analíticas:**

i) $y = x + 1$ **ii)** $y = 1 - x^2$

iii) $y = x^2 - 1$ **iv)** $y = -x + 1$



i) → Ⓑ ii) → Ⓒ iii) → Ⓐ iv) → Ⓓ

12 **a) Sabiendo que la libra es una unidad de peso que equivale a 0,45 kg, copia y completa esta tabla:**

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)		0,45				

b) Escribe la expresión analítica que convierte libras en kilos.

c) Escribe la que convierte kilos en libras.

d) Representa en unos ejes coordenados las dos expresiones analíticas anteriores.

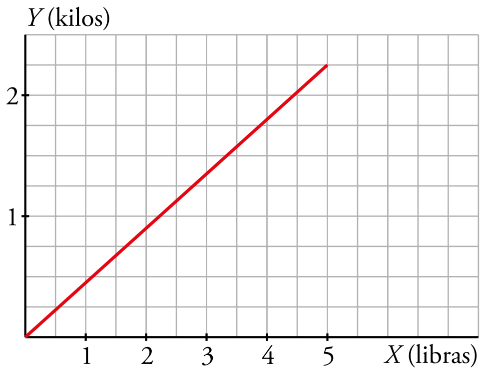
a)

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4	x
y (KILOS)	0,225	**0,45**	0,675	0,9	1,35	1,8	0,45x

b) $y = 0{,}45x \;\rightarrow\; 0{,}45x - y = 0$

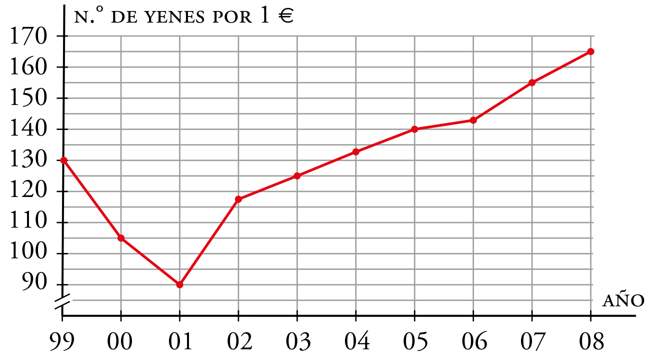
c) $\dfrac{y}{0{,}45} = x \;\rightarrow\; 0{,}45x - y = 0$

d)



Son la misma gráfica.

13 **La siguiente gráfica muestra la evolución del precio del yen (moneda japonesa) en el primer día de los años desde 1999 a 2008:**



Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas corresponden al cambio de euros a yenes en los años 1999, 2003, 2005 y 2008. Es decir, dado un número de euros (*e*), obtener directamente el número de yenes (*y*) correspondiente.

a) $y = \frac{e}{130}$ **b)** $y = 125e$ **c)** $y = 140e$

d) $y = \frac{e}{90}$ **e)** $y = 130e$ **f)** $y = e - 155$

g) $y = 165e$ **h)** $y - e = 90$ **i)** $y = 90e$

- Año 1999 $\rightarrow$ e)
- Año 2003 $\rightarrow$ b)
- Año 2005 $\rightarrow$ c)
- Año 2008 $\rightarrow$ g)

14 **Indica, como se hace en el ejemplo, la expresión analítica que corresponde a cada una de las siguientes situaciones:**

- **¿Cuánto tiempo de viaje nos queda si vamos a 120 km/h hacia nuestro destino, que está a *x* km?**

$$t = \frac{x}{120}$$

a) **Si una garrafa vale 1,30 € y el litro de mosto cuesta 0,90 €, ¿cuánto cuesta una garrafa con *x* litros de mosto?**

b) **¿Cuál es el área de un triángulo de 10 cm de base y *x* cm de altura?**

c) **Si una botella de 5 litros tiene 1,5 litros de agua en su interior, ¿cuántos litros caben todavía después de echar *x* litros?**

d) **En una carrera de 10 km, ¿a qué distancia me encontraré de la meta después de correr a 8 km/h durante *x* horas?**

e) **¿Cuál es el volumen de un ortoedro de base cuadrada de lado *x* cm y 20 cm de altura?**

f) **Si la temperatura de un líquido desciende 3 °C cada dos minutos, ¿qué temperatura tendrá un café *t* min después de sacarlo del microondas a 70 °C?**

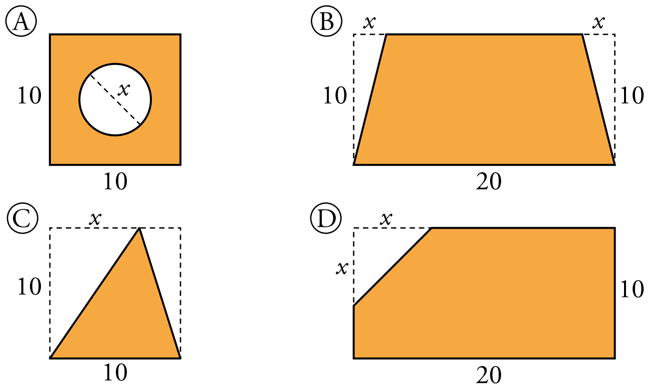
g) **Si 60 folios tienen 1,2 cm de grosor, ¿qué grosor tiene una pila de *x* folios?**

a) $y = 1{,}3 + 0{,}9x$ b) $A = \frac{10 \cdot x}{2} = 5x$ c) $y = 3{,}5 - x$

d) $e = 10 - 8x$ e) $V = 20x^2$ f) $T = 70 - \frac{3}{2}t$

g) $g = \frac{1{,}2}{60} \cdot x$

15 **El área de la parte coloreada de las siguientes figuras se puede escribir en función del parámetro** x**:**



¿Cuál de estas expresiones analíticas corresponde al área de cada una de ellas?

a) $A = 100 - x^2$ b) $A = \dfrac{10x}{2}$ c) $A = 200 - \dfrac{x^2}{2}$

d) $A = 100 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \pi$ e) $A = 200 - 10x$ f) $A = 200 - 5x$

g) $A = 50$ h) $A = (10 - x)(20 - x)$ i) $A = 200 - x^2$

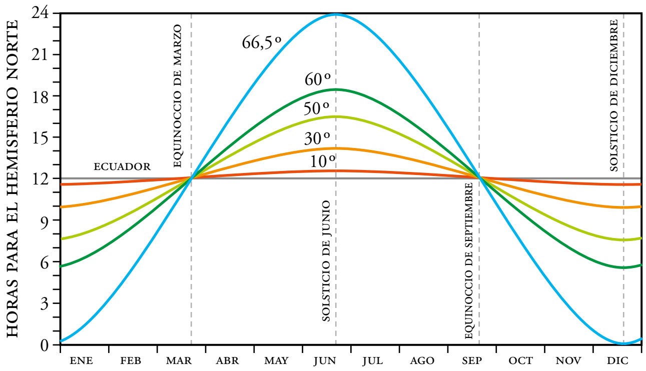
Ⓐ → d) Ⓑ → e)

Ⓒ → g) Ⓓ → c)

Página 166

Resuelve problemas

16 **En esta gráfica se muestra la duración del día (en horas) según la latitud:**



a) ¿Cuántas horas de sol tiene como máximo una persona que vive en el paralelo 60°? ¿Y como mínimo?

b) En el ecuador, ¿varían las horas de sol según el mes?

c) ¿Qué ocurre en el paralelo 66,5° el 21 de junio? ¿Y el 21 de diciembre? Busca una ciudad que se encuentre más o menos en ese paralelo.

d) ¿Cuántas horas de sol tienen en cualquier lugar del planeta en los equinoccios de primavera y otoño?

e) Busca información sobre el número de horas de sol en el Polo Norte a lo largo del año.

a) Como máximo, 18 horas. Como mínimo, casi 6 horas.

b) No, no varían.

c) El 21 de junio no se pone el sol. El 21 de diciembre no sale el sol. Por ejemplo, la ciudad noruega de Bodø.

d) Tienen 12 horas de sol.

e) En el polo Norte, el sol sale y se pone solo una vez por año. Por tanto, la mitad del año es de día y la otra mitad, de noche.

17 Lucía observó un delfín durante un rato. Al principio, el delfín estaba en la superficie tomando aire. Luego se sumergió hasta el fondo. Desde el fondo invirtió 8 min en subir para tomar aire otra vez. Tres minutos después estaba de nuevo en el fondo. Lucía se percató de que este proceso era muy regular.

a) ¿Dónde estaba el delfín al cabo de media hora? ¿Y a la hora?

b) Si una de cada tres veces que desciende al fondo caza un pez, ¿cuántos habrá cazado en 1 hora?

c) Representa de manera aproximada la gráfica de la profundidad a la que está el delfín en función del tiempo durante la primera media hora.

a) El delfín emplea, cada vez, 3 min en bajar y 8 min en subir:

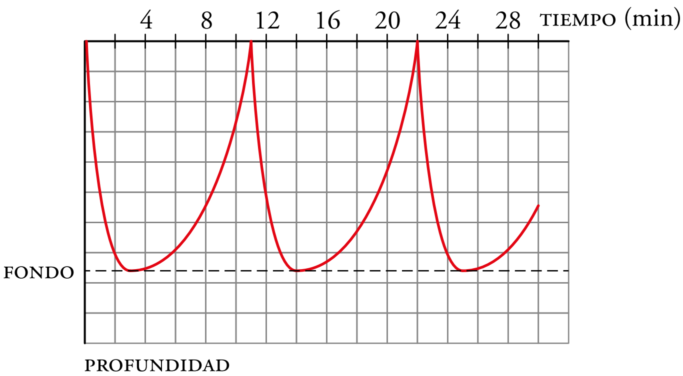
$(3 + 8) + (3 + 8) + (3 + 5) = 30$

A los 30 minutos el delfín está subiendo hacia la superficie.

b) 1 h = 60 min $\rightarrow$ 60 min = $5 \cdot 11 + 5$

En 1 h ha bajado al fondo 6 veces. Por tanto, ha cazado 2 peces.

c)



18 En la factura mensual del gas de una ciudad se paga una cantidad fija de 15 € y 0,75 € más por cada metro cúbico consumido.

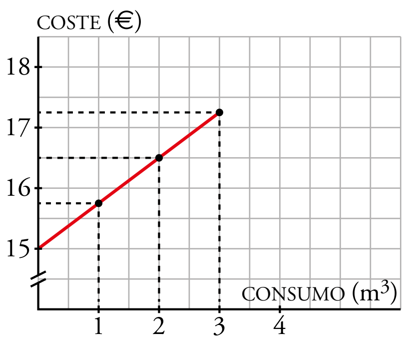
a) ¿Cuánto se paga por consumir 15 m^3 en un mes?

b) Dibuja la función: *metros cúbicos consumidos-coste.*

c) Escribe la expresión analítica que indique el importe de la factura en función del volumen de gas consumido.

a) Por 15 m^3 se pagan $15 + 0,75 \cdot 15 = 26,25$ €

b)



c) $y = 15 + 0,75x$, donde x son los metros cúbicos consumidos e y es el importe total de la factura.

19 **La tabla recoge el perímetro craneal de un bebé:**

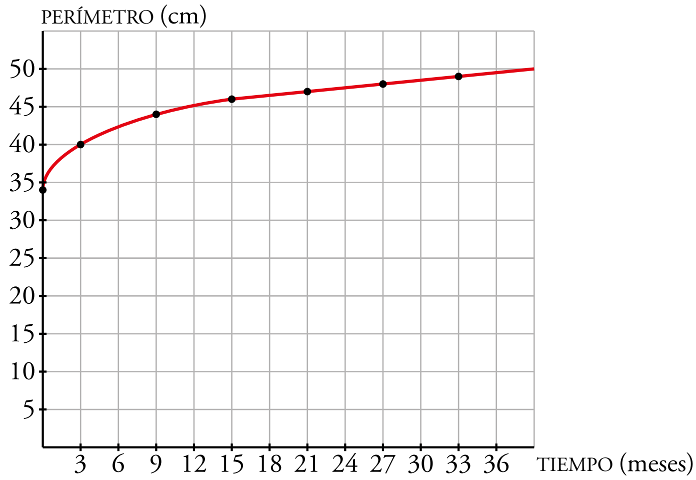
TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables.

b) ¿Qué tendencia se observa?

c) Estima el perímetro craneal de un niño de 3 años.

a)



b) El tamaño del cráneo parece estabilizarse alrededor de los 50 cm.

c) Medirá unos 50 cm aproximadamente.

20 **Los cestillos de una noria suben y bajan a medida que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:**

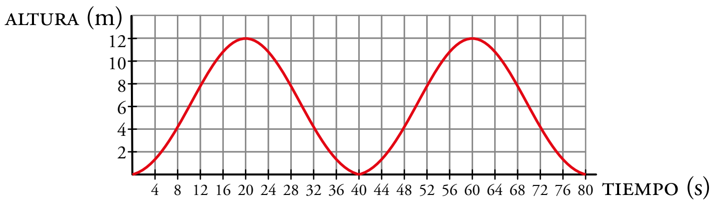
TIEMPO (s)	0	4	8	12	16	20
ALTURA (m)	0	1,2	4,1	7,9	10,8	12

a) Representa la gráfica de la función *tiempo-altura* de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.

b) ¿Es una función periódica? ¿A qué tiempos corresponden sus máximos y mínimos relativos?

c) ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

a)



b) Sí, es periódica de periodo 40. Los máximos y mínimos están en los múltiplos de 20.

c) $150 = 40 \cdot 3 + 30 \rightarrow$ A los 150 s estará a la misma altura que a los 30 segundos. Es decir, a unos 6 m.

21 **Cuando nieva, se echa sal en las calles. Al echarle sal, el hielo se derrite a menor temperatura (a unos –6 °C). Hasta que un bloque de hielo no está derretido completamente, no empieza a aumentar su temperatura. Estas son las gráficas *tiempo-tempertura* de un bloque de hielo (luego agua) con sal y de otro sin sal:**

a) ¿Cuál corresponde a cada uno?

b) ¿Cuánto tiempo tarda cada uno en derretirse?

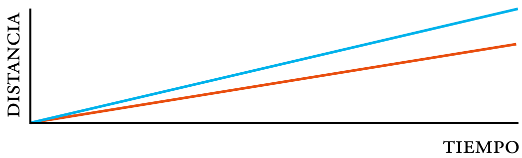
c) ¿Tendría sentido echar sal a la nieve con una temperatura ambiente de –12 °C? ¿Por qué?

a) La gráfica azul es el bloque de hielo con sal.

b) Los dos tardan 4 horas en derretirse.

c) No tendría sentido, ya que a esa temperatura el hielo no se derretiría aunque echásemos sal.

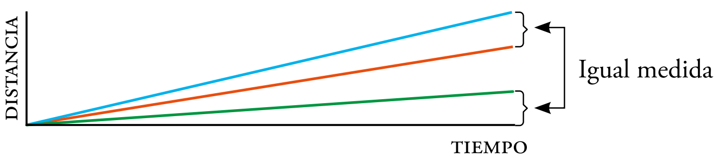
22 **Ana camina sobre el pasillo móvil de un aeropuerto y Marcos prefiere ir andando sobre el suelo. El siguiente gráfico permite comparar sus movimientos:**



Si ambos caminan igual de rápido, representa otra recta que muestre a Ana quieta sobre el pasillo móvil.

En el enunciado, la recta roja representa a Marcos y la azul, a Ana.

Si ambos caminan a la misma velocidad, la diferencia de alturas entre ambas rectas en cada punto la aporta el movimiento del pasillo móvil. Por tanto:



La recta verde representa a Ana quieta sobre el pasillo móvil.

Página 167

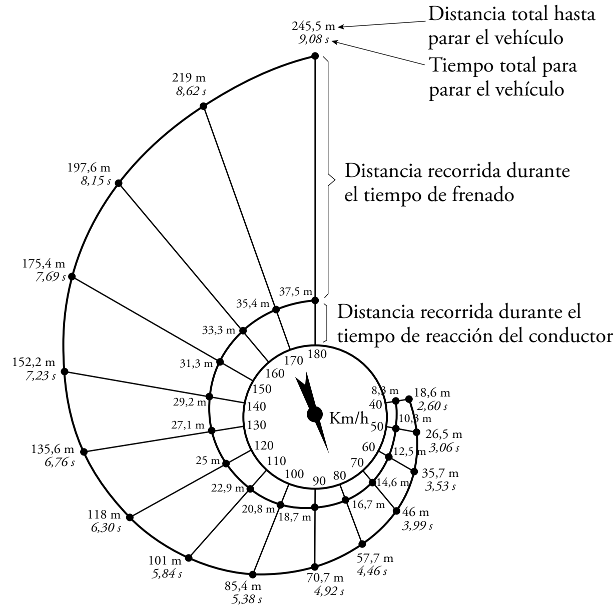
Resuelve: un poco más difícil

23 **Para hallar la distancia aproximada necesaria para detener un vehículo en movimiento, se suman:**

— La que recorre hasta que el conductor comienza a frenar (distancia de tiempo de reacción).

— La que recorre mientras frena (distancia de frenado).

Esto se refleja en el siguiente diagrama de caracol.



Fuente: La Prevention Routière. Ministère de l'Éducation de la Recherche de la Technologie. Francia.

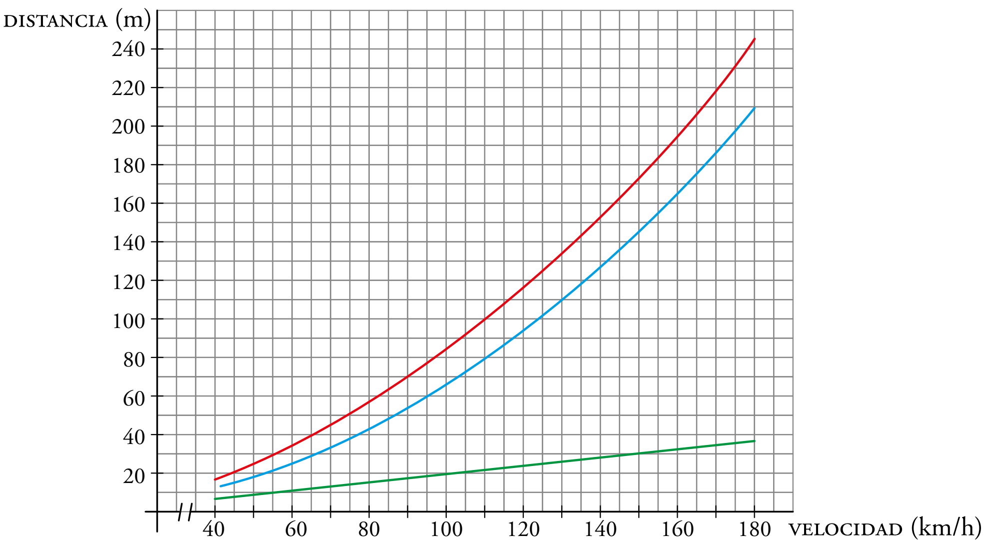
a) Represента en tu cuaderno, sobre los mismos ejes de coordenadas, las siguientes funciones:

- **Velocidad - Distancia de reacción (en verde)**
- **Velocidad - Distancia de frenado (en azul)**
- **Velocidad - Distancia total recorrida (en rojo)**

b) Halla, a partir de la gráfica roja, la velocidad que llevaba un coche que recorrió 160 m en su frenada.

c) ¿A qué velocidad iba un coche cuya distancia recorrida durante el tiempo de frenado fue de 150 m?

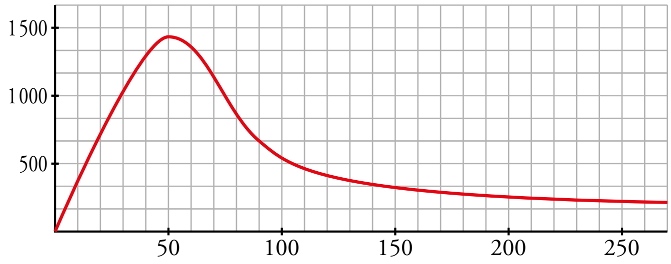
a)

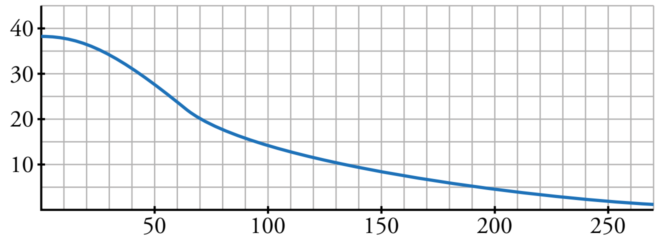


b) Llevaba unos 145 km/h.

c) Llevaba unos 153 km/h.

24 **En 2012, Felix Baumgartner batió el récord de velocidad en caída libre, lanzándose desde 39 000 m de altura. Estas son las gráficas de la velocidad y de la altura, respectivamente, que llevó durante los 250 primeros segundos desde que inició el descenso:**





a) ¿En qué momento cogió más velocidad?

b) ¿Cuándo rompió la velocidad del sonido? Recuerda que son 300 m/s. Pásalo a km/h.

c) A una altura de 40 km, la atmósfera es muy poco densa, por lo que casi no hay rozamiento. ¿A qué altura empieza a frenarle la atmósfera? ¿A qué altura se empieza a estabilizar?

d) ¿Cómo es la gráfica de la altura cuando la velocidad se estabiliza, más recta o más curva?

a) Cogió máxima velocidad a los 50 segundos.

b) Pasamos la velocidad del sonido a km/h:

$$300 \text{ m/s} = 300 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 1\,080 \text{ km/h}$$

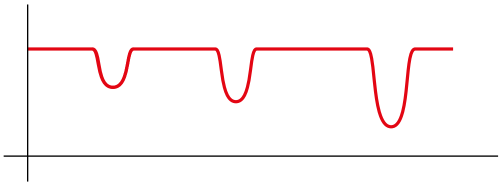
Sobrepasa esta velocidad a los 30 segundos aproximadamente.

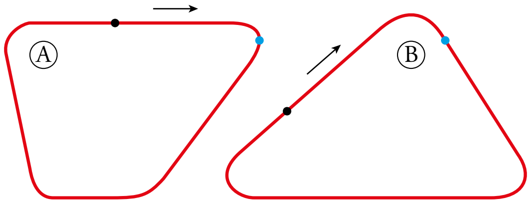
c) El saltador comienza a descender su velocidad a los 50 segundos. En ese instante está a una altura aproximada de 27 kilómetros.

Comienza a estabilizarse alrededor del segundo 100, y está a una altura de 14 metros.

d) La gráfica de la altura es más recta.

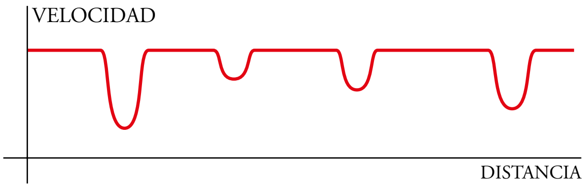
25 **La gráfica muestra cómo varía la velocidad de un coche al recorrer uno de los circuitos dibujados abajo:**





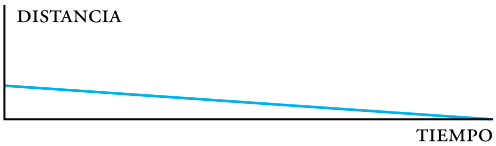
¿A cuál corresponde? Haz la gráfica del otro.

Corresponde al circuito B. Al llegar a la curva, el coche debe bajar su velocidad, tanto más cuanto más cerrada es la curva. Esto se aprecia en la gráfica: tres frenazos, cada uno más fuerte que el anterior, como corresponde a los tres ángulos del circuito B en el orden en que se toman desde la salida, S.



26 **Mira el problema 22 anterior y representa la recta que muestre a Marcos andando en sentido contrario sobre el pasillo móvil. ¿Avanzaría o retrocedería?**

Marcos avanzaría. Su velocidad sería la diferencia de alturas entre la recta roja (movimiento de Marcos) y la verde (movimiento del pasillo). Es decir, avanzaría a la misma velocidad que el pasillo pero en sentido opuesto. Así:



Reflexiona

27 **¿Verdadero o falso?**

a) En una función puede haber dos puntos distintos con la misma ordenada.

b) En una función puede haber dos puntos distintos con la misma abscisa.

c) Una función periódica de periodo T también tiene periodo $2T$.

d) Una función periódica y continua no puede ser siempre creciente.

e) Si una función es creciente, necesariamente es continua.

a) Verdadero.

b) Falso.

c) Verdadero.

d) Verdadero

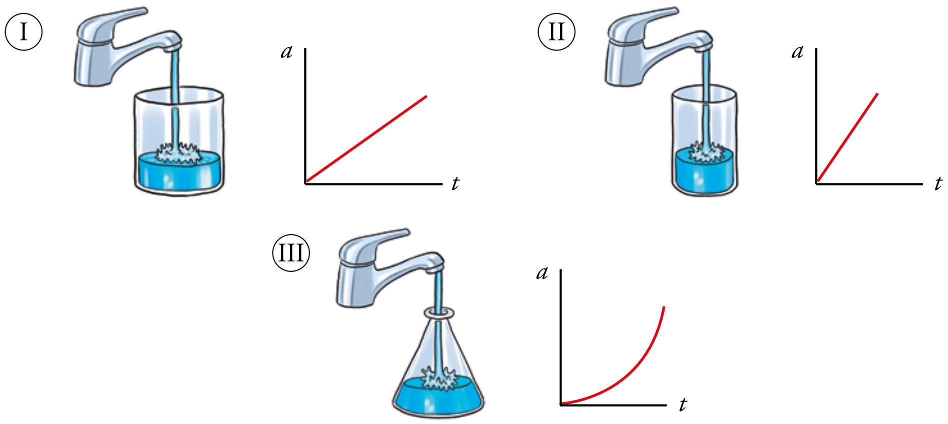
e) Falso.

Página 168

Reflexiona y decide

- **Al abrir un grifo sobre un recipiente, la altura (*a*) que alcanza el líquido está en función (depende) del tiempo transcurrido (*t*).**

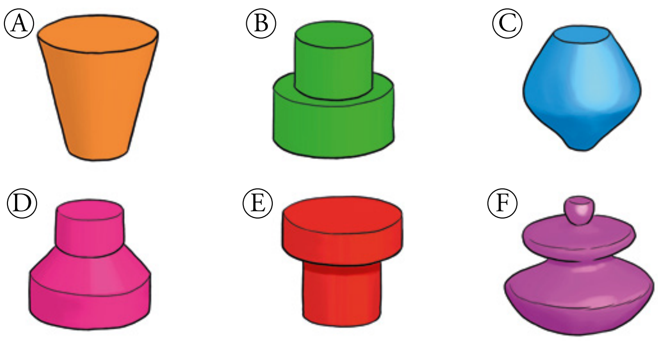
  Y al representar esa función vemos que cada recipiente tiene una gráfica característica.

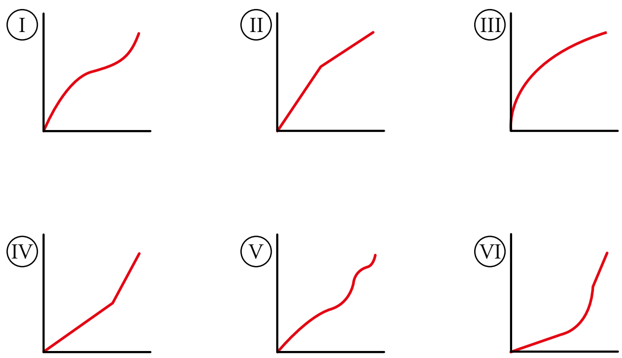


— En los dos primeros recipientes, el nivel sube uniformemente, aunque en el segundo más rápido que en el primero.

— En el tercer recipiente, el nivel sube despacio al principio y rápido al final.

Asocia cada uno de estos recipientes con su gráfica:

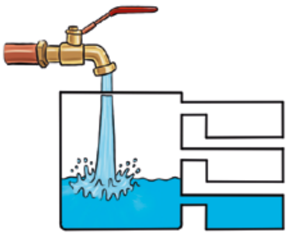


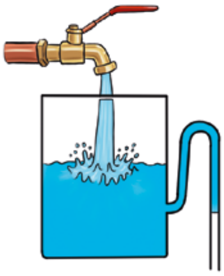


A – III;   B – IV;   C – I;   D – VI;   E – II;   F – V

Observa y representa

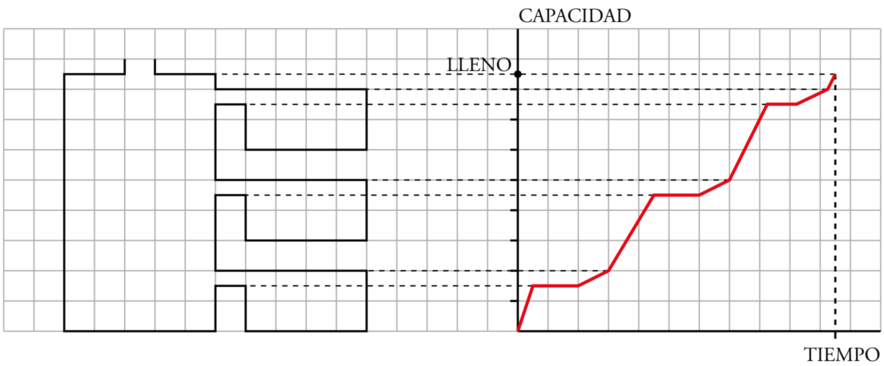
- **Dibuja, en cada caso, la gráfica que relaciona la altura que alcanza el agua en el recipiente con el tiempo transcurrido:**

a) 

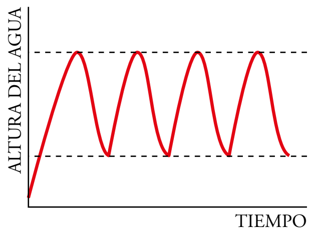
b) 

NOTA: Antes de afrontar el apartado b), infórmate: ¿qué es una fuente vauclusiana?

a)



b) Las fuentes vauclusianas se caracterizan por brotar intermitentemente, unas veces echan agua y otras no, y además lo hacen en periodos de tiempo bastante regulares. Estos fenómenos geológicos se deben a la existencia de alguna cueva o depósito subterráneo con un conducto de salida que actúe de sifón y para recargarse requiere que el agua alcance un determinado nivel.



Puesto que cuando el tanque se llena hasta arriba el tubo también se llena y empieza a salir el agua del tanque. Esto ocurre hasta que el nivel del agua alcanza la entrada del tubo (efecto sifón). En ese momento deja de salirse agua y comienza a llenarse de nuevo el tanque.

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Dos hermanos rancheros se reparten una herencia a partes iguales. Nuria invierte su parte en la compra de una manada de 80 caballos. Carlos invierte la suya en un rebaño de 100 vacas. Si un caballo cuesta 150 € más que una vaca, ¿a cuánto ascendía la herencia?**

$$\left.\begin{aligned} 80 \text{ caballos} &= 80 \text{ vacas} + 80 \cdot 150 \text{ €} = 80 \text{ vacas} + 12\,000 \text{ €} \\ 80 \text{ caballos} &= 100 \text{ vacas} \qquad\qquad\quad\; = 80 \text{ vacas} + 20 \text{ vacas} \end{aligned}\right\}$$

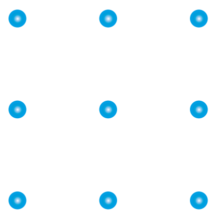
Por tanto, 20 vacas = 12 000 €.

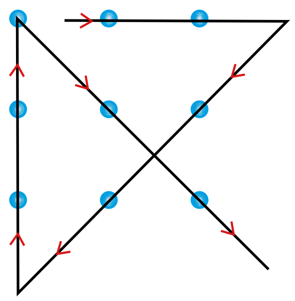
1 vaca cuesta 12 000 : 20 = 600 €.

1 caballo cuesta 600 + 150 = 450 €.

$$\left.\begin{aligned} &100 \text{ vacas valen } 60\,000 \text{ €}. \\ &80 \text{ caballos valen } 60\,000 \text{ €}. \end{aligned}\right\} \text{ La herencia asciende a } 60\,000 + 60\,000 = 120\,000 \text{ €}.$$

- **Pasa por encima de estos nueve puntos mediante una línea quebrada de cuatro segmentos.**





- **a) Estás junto a una fuente y dispones de una jarra de 5 litros y de otra de 3 litros. ¿Cómo te las arreglarías para medir exactamente un litro de agua?**

b) Si ahora dispones de dos cántaros, uno de 7 litros y otro de 5, ¿cómo harías para medir 4 litros de agua?

c) ¿Y cómo medirías 3 litros de agua si tuvieras un cántaro de 9 litros y otro de 5 litros?

a)

3		5
3	3	0
0		3
3	2	3
1		5

Se llena el de 3 litros.	Hay 3 y 0 litros.
El contenido de la de 3 litros se vierte en la de 5 litros.	Hay 0 y 3 litros.
Se vuelve a llenar la de 3 litros.	Hay 3 y 3 litros.
Con el contenido de la de 3 se completa la de 5 litros.	Hay 1 y 5 litros.

En la jarra de 3 litros queda 1 litro, lo que queríamos medir.

b)

5		7
0	5	7
5		2
0	2	2
2		0
2	3	7
5		4

Se llena el de 7 litros.	Hay 0 y 7 litros.
Con el contenido del de 7 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 2 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 2 litros.
Se vierten los 2 litros que hay en el de 7 en el de 5 litros.	Hay 2 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 7 litros.	Hay 2 y 7 litros.
Con el de 7 litros se completa el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.

Así, en el cántaro de 7 litros quedan los 4 litros que queríamos medir.

c)

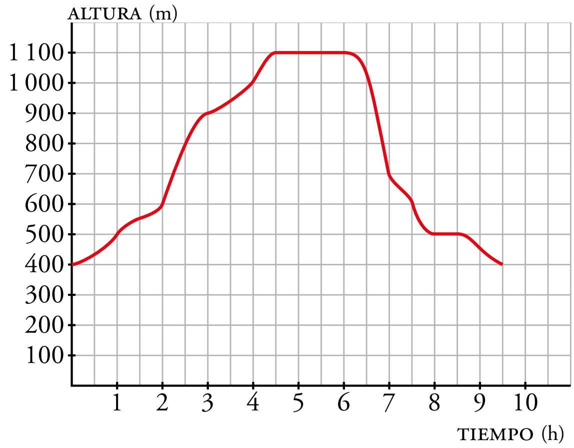
5		9
0	5	9
5		4
0	4	4
4		0
4	1	9
5		8
0	5	8
5		3

Se llena el de 9 litros.	Hay 0 y 9 litros.
Con el contenido del de 9 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 4 litros.
Se vierten los 4 litros que hay en el de 9 en el de 5 litros.	Hay 4 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 9 litros.	Hay 4 y 9 litros.
Se completa el de 5 con un litro del de 9 litros.	Hay 5 y 9 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 8 litros.
Se llena el de 5 litros con el contenido del de 9 litros.	Hay 5 y 3 litros.

En el cántaro de 9 litros quedan los 3 litros que queríamos medir.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión a una montaña:**



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?

c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?

d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

a) Intervienen las variables tiempo y altura. La variable tiempo utiliza un cuadradito para media hora; la variable altura, un cuadradito para 100 metros. El dominio de la función es 0 – 9,5.

b) La marcha ha durado 9 horas y media. Comienzan a 400 metros de altura. Alcanzan una altura máxima de 1 100 metros. Han parado a comer cuando llevaban 4 horas y media de camino, al llegar a la cima.

c) Suben más rápido entre las 2 y las 3 horas del comienzo. Bajan más rápido entre las 6 y las 7 horas.

d) Comienzan su marcha a 400 metros. En dos horas han ascendido hasta los 600 metros, y en ese momento comienzan a subir más rápido, y mantienen ese ritmo durante una hora, hasta llegar a los 900 metros de altura. Entonces disminuyen la velocidad y continúan su ascensión dos horas más hasta llegar a la cima, a 1 100 metros de altitud. Pasan allí dos horas. Inician su descenso a las 6 horas de travesía, lo hacen rápidamente la primera hora, hasta volver a los 700 metros, y andan una hora más a un ritmo más lento. Hacen una parada de media hora a los 500 metros y reanudan la marcha una hora y media más, descendiendo hasta los 400 metros.

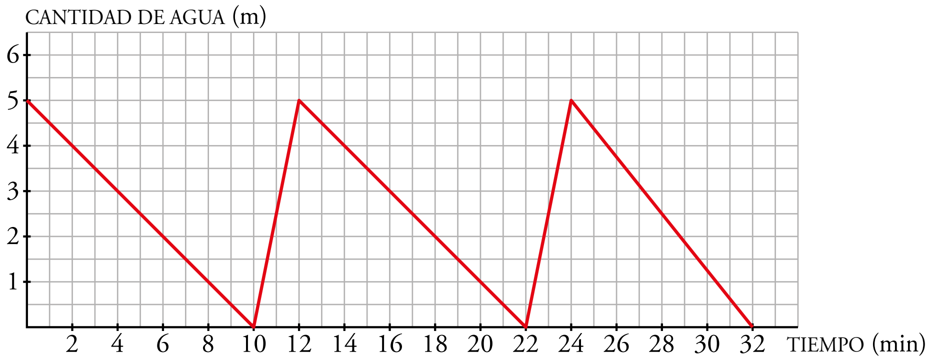
2 **Una cisterna contiene 5 L de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 min en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 min.**

a) Representa la función *tiempo-cantidad de agua.*

b) Explica si la función es periódica.

c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

a)

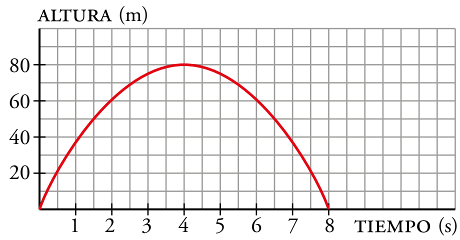


b) Es periódica, puesto que su comportamiento se va repitiendo en periodos de 12 minutos.

c) La cisterna está llena en los minutos 0, 12 y 24; y vacía en 10 y 22.

3 **Una de estas ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por una pelota que se lanza hacia arriba, y el tiempo, *t*. ¿Cuál de ellas es?**

Ⓐ $h = 8t - t^2$ Ⓑ $h = 40t - 5t^2$ Ⓒ $h = -4t^2 + 80t$



a) ¿Qué altura alcanza? ¿Cuánto tarda en caer?

b) Di la altura de la pelota a los 5 segundos:

— De forma aproximada, mirando la gráfica.

— Utilizando la expresión analítica.

Es la ecuación Ⓑ

a) Alcanza 80 m de altura y tarda 8 s en caer de nuevo hasta el suelo.

b) — Mirando la gráfica, la altura es, aproximadamente, de 75 metros.

— Utilizando la expresión analítica: $40 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 75$ m.