Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

10 FUNCIONES ELEMENTALES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.)

Página 257

Resuelve

Familias de funciones

Ya conoces muchas familias de funciones: sus nombres, cómo son sus expresiones analíticas y qué forma tienen sus gráficas.

Asocia cada nombre de familia con su representación gráfica y con su expresión analítica general.

1. Cuadrática

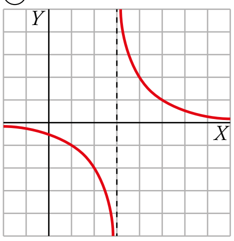
2. Raíz

3. Proporcionalidad inversa

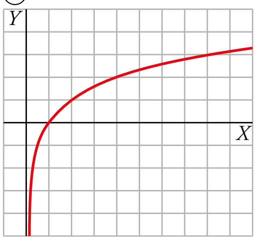
4. Exponencial

5. Logarítmica

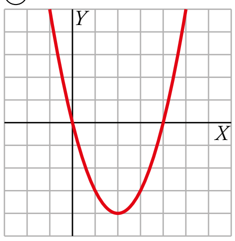
Ⓐ



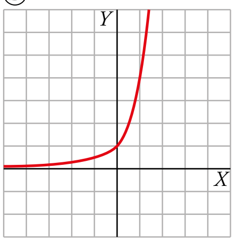
Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ



Ⓔ

I. $y = \sqrt{x-4}$ **II.** $y = 4^x$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = \log_2 x$ **V.** $y = \dfrac{2}{x-3}$

$1 \rightarrow C \rightarrow III$

$2 \rightarrow E \rightarrow I$

$3 \rightarrow A \rightarrow V$

$4 \rightarrow D \rightarrow II$

$5 \rightarrow B \rightarrow IV$

2 DOMINIO DE DEFINICIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA1.10.3.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 261

Piensa y practica

Halla el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones:

1 **a)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$

a) Veamos dónde se anula el denominador:

$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-3)(x-1) = 0 \ \rightarrow\ Dom = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$

b) El denominador no se anula nunca para valores reales $\rightarrow\ Dom = \mathbb{R}$

2 **a)** $y = log(x^3 - 6x^2 + 8x)$ **b)** $y = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 8x}$

a) La función *log* debe actuar sobre valores positivos. Por tanto, los valores de x del dominio son los que cumplen:

$x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \ \rightarrow\ x(x-2)(x-4) > 0$

$x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ no pertenecen al dominio ya que el valor de la expresión anterior sería cero. Estudiamos qué pasa entre estos valores para encontrar el dominio:

- Si $x < 0 \ \rightarrow\ x - 2 < 0;\ x - 4 < 0 \ \rightarrow\ x(x-2)(x-4) < 0$
- Si $0 < x < 2 \ \rightarrow\ x > 0;\ x - 2 < 0;\ x - 4 < 0 \ \rightarrow\ x(x-2)(x-4) > 0$
- Si $2 < x < 4 \ \rightarrow\ x > 0;\ x - 2 > 0;\ x - 4 < 0 \ \rightarrow\ x(x-2)(x-4) < 0$
- Si $4 < x \ \rightarrow\ x > 0;\ x - 2 > 0;\ x - 4 > 0 \ \rightarrow\ x(x-2)(x-4) > 0$

Por tanto:

$Dom = (0, 2) \cup (4, +\infty)$

b) La función *raíz* debe actuar sobre valores positivos o cero. Por tanto:

$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4) \geq 0$

Según los cálculos del ejercicio anterior:

$Dom = [0, 2] \cup [4, +\infty)$

3 $y = \dfrac{log(x^3 - 6x^2 + 8x)}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 8x}}$

En este caso, la raíz tampoco puede anularse, por tanto, según los cálculos del ejercicio anterior, x debe cumplir: $x^3 - 6x^2 + 8x > 0$

Por tanto:

$Dom = (0, 2) \cup (4, +\infty)$

4 **a)** $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ **b)** $y = log(x^3 - 2x^2 + x - 2)$

a) Necesitamos que la expresión dentro de la raíz sea ≥ 0:

$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$

La expresión $x^2 + 1$ siempre es positiva, por lo que el signo dependerá solamente de $x - 2$. Es decir:

$Dom = [2, +\infty)$

b) Necesitamos que la expresión dentro del logaritmo sea positiva. Por tanto, según el apartado anterior:

$Dom = (2, +\infty)$

5 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{log\ x}$ **Atención: ¿para qué valores de x se anula el denominador? $log\, x = 0 \rightarrow x = \dots$**

La raíz debe darse sobre casos no negativos: $x \geq 0$.

El logaritmo debe darse sobre casos positivos: $x > 0$.

Además, el denominador no puede ser cero: $log(x) = 0 \rightarrow x = 1$

$Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

6 **a)** $y = \dfrac{log\ (x-3)}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$ **b)** $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{log\ (x-3)}$

a) El logaritmo debe darse sobre casos positivos: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

La raíz debe darse sobre casos no negativos y el denominador no puede ser cero:

$x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2) > 0$

- Si $3 < x < 5 \rightarrow x - 5 < 0;\ x - 2 > 0 \rightarrow (x-5)(x-2) < 0$
- Si $5 < x \rightarrow x - 5 > 0;\ x - 2 > 0 \rightarrow (x-5)(x-2) > 0$

Por tanto: $Dom = (5, +\infty)$

b) El logaritmo debe darse sobre casos positivos: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

Además, el denominador no puede ser cero $\rightarrow$ $log(x-3) = 0$ si $x - 3 = 1 \rightarrow x = 4$

La raíz debe darse sobre casos no negativos: $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2) \geq 0$

Por tanto, a partir de los cálculos del apartado anterior, deducimos:

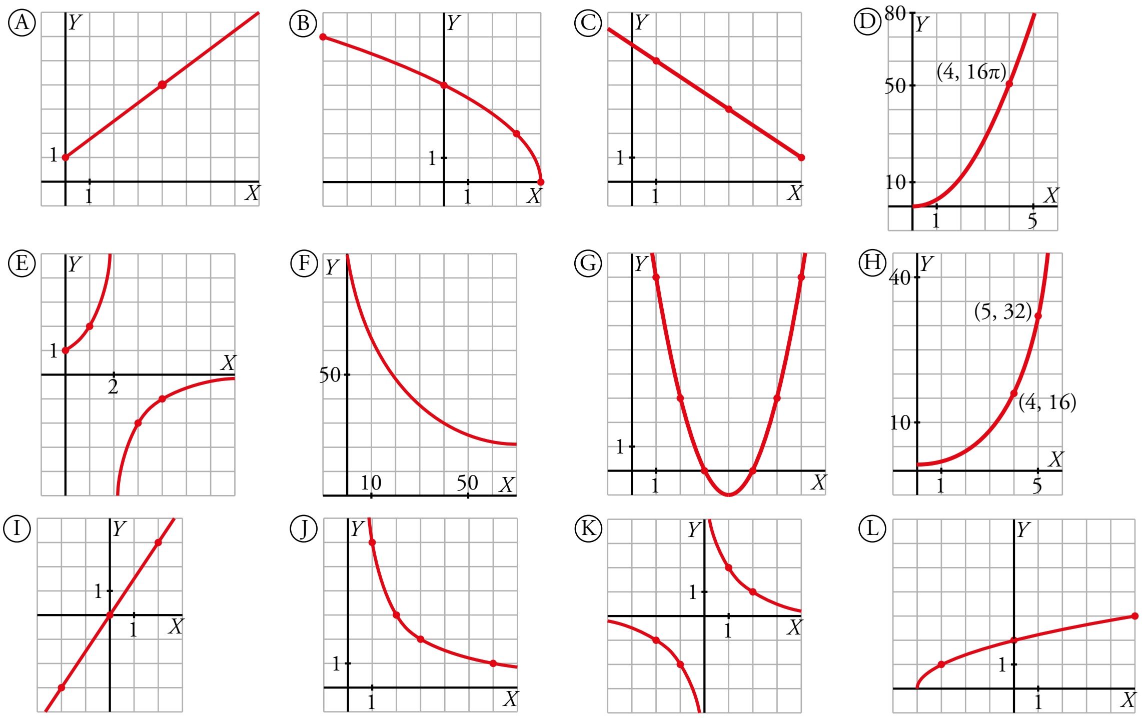
$Dom = [5, +\infty)$

3 ▶ FAMILIAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 1.13. (EA 1.13.2.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.-EA 3.1.4.)

Página 265

1 **Asocia a cada una de las siguientes gráficas una ecuación:**



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES	EXPONENCIALES
L_1 $y = \frac{3}{2}x$	C_1 $y = x^2 - 8x + 15$	PI_1 $y = \frac{1}{x}$	R_1 $y = \sqrt{2x+4}$	E_1 $y = 2^x$
L_2 $y = -\frac{2}{3}(x-1) + 5$	C_2 $y = (x+3)(x+5)$	PI_2 $y = \frac{2}{2-x}, x \ge 0$	R_2 $y = \sqrt{x+4}$	E_2 $y = 0{,}5^x$
L_3 $3x + 2y = 0$	C_3 $y = x^2,\ x > 0$	PI_3 $y = \frac{2}{x}$	R_3 $y = 2\sqrt{4-x}$	E_3 $y = 20 + 80 \cdot 0{,}95^x$
L_4 $y = \frac{3}{4}x + 1$	C_4 $y = \pi x^2,\ x > 0$	PI_4 $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	R_4 $y = -\sqrt{4+x}$	E_4 $y = 3^x$

A → L_4 B → R_3 C → L_2 D → C_4

E → PI_2 F → E_3 G → C_1 H → E_1

I → L_1 J → PI_4 K → PI_3 L → R_2

2 **Cada uno de los siguientes enunciados se corresponde con una gráfica de entre las del ejercicio anterior. Identifícala.**

1. **Superficie, en centímetros cuadrados, de un círculo. Radio, en centímetros.**
2. **Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.**
3. **Temperatura de un cazo de agua que se deja enfriar desde 100 °C. Tiempo, en minutos.**
4. **Número de amebas que se duplican cada hora. Se empieza con una.**
5. **Longitud de un muelle, en decímetros. Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.**
6. **Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de rectángulos cuya superficie es de 6 cm².**

1. D 2. E 3. F 4. H 5. A 6. J

3 ¿Qué te hace decir eso? **[La decisión sobre las afirmaciones puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

¿Verdadero o falso?

a) En una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, cuanto mayor es a, más ancha es la parábola que la representa.

b) Las gráficas de $y = 5x^2 + bx + c$ son idénticas. Se sitúan en posiciones distintas al variar b y c.

c) Todas las parábolas de ecuación $y = ax^2 + c$ tienen su vértice en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Falso. Por ejemplo, la función cuadrática $y = 4x^2$ es más estrecha que la función $y = x^2$.

b) Verdadero. Como la anchura de la parábola está determinada por el término de x^2, los otros solo influyen en la posición de la parábola respecto de los ejes de coordenadas.

c) Verdadero. Como no tiene término en x, la abscisa del vértice es $\frac{0}{2a} = 0$.

4 **¿Verdadero o falso?**

a) Las funciones $y = -\sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje Y.

b) El dominio de definición de $y = -a\sqrt{x+b}$ es $[-b, +\infty)$.

c) Los ejes X e Y son asíntotas de las funciones $y = \frac{k}{x}$.

d) El dominio de definición de $y = \frac{k}{a+x}$ es $\mathbb{R} - \{k\}$.

a) Falso. El eje de estas medias parábolas es el eje X.

b) Verdadero. La función está definida si $x + b \geq 0$, es decir, si $x \geq -b$. Por tanto, el dominio de definición es el intervalo dado.

c) Verdadero.

d) Falso. La función no está definida si $a + x = 0 \rightarrow x = -a$. El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-a\}$.

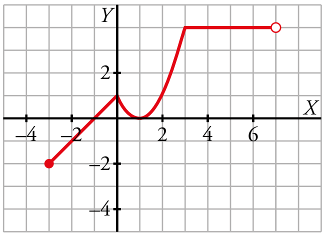
4 ▸ FUNCIONES DEFINIDAS «A TROZOS»

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 266

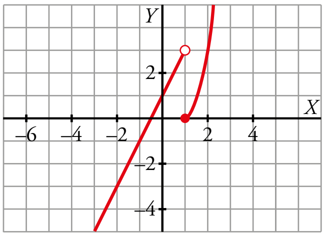
1 **Representa esta función:**

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } -3\le x<0 \\ x^2-2x+1 & \text{si } \ \ 0\le x<3 \\ 4 & \text{si } \ \ 3\le x<7 \end{cases}$$

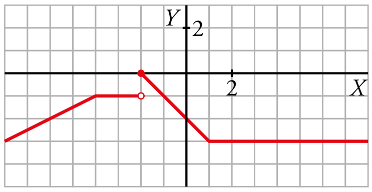


2 **Haz la representación gráfica de la siguiente función:**

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ x^2-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$



3 **Escribe la expresión analítica que corresponde a la siguiente gráfica:**



Primer tramo:

- Recta que pasa por los puntos $(-6, -2)$ y $(-4, -1)$.
- La pendiente es $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)}=\dfrac{1}{2}$ y la ecuación es $y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-(-4))$.

Segundo tramo:

- $y=-1$

Tercer tramo:

- Pertenece a una recta que pasa por $(0, -2)$ y $(1, -3)$.
- La pendiente es $\dfrac{-3-(-2)}{1-0}=-1$ y la ecuación es $y-(-2)=-x$.

Cuarto tramo: $y=-3$

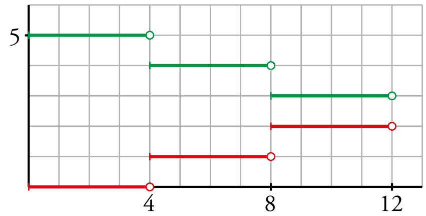
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{si } x<-4 \\ -1 & \text{si } -4\le x<-2 \\ -x-2 & \text{si } -2\le x<1 \\ -3 & \text{si } 1\le x \end{cases}$$

Página 267

4 **¿Verdadero o falso?**

a) **La gráfica roja corresponde a la función** $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) **La gráfica verde corresponde a la función** $y = 5 + Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero.

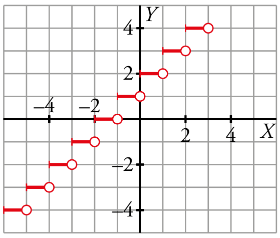
b) Falso. La gráfica verde es $y = 5 - Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

5 **Representa:**

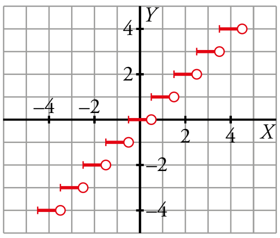
a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0{,}5)$

a) $y = Ent\,(x) + 2$



b) $y = Ent\,(x + 0{,}5)$

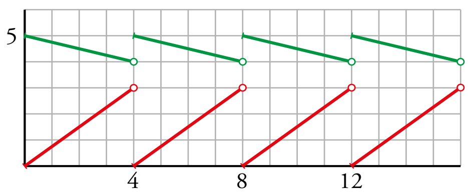


6 **¿Verdadero o falso?**

a) **La gráfica roja corresponde a** $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) **La gráfica roja corresponde a** $y = 3Mant(4x)$.

c) **La gráfica verde corresponde a** $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero

b) Falso

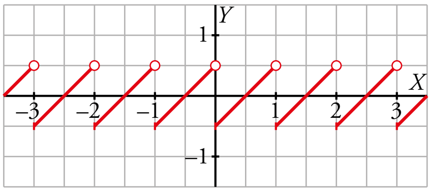
c) Verdadero

7 **Representa:**

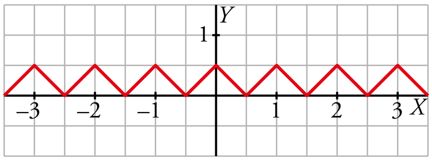
a) $y = Mant(x) - 0{,}5$

b) $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\,(x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\,(x) - 0{,}5|$



5 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FUNCIONES

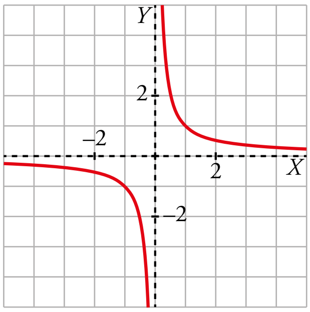
C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 3.1.** (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 268

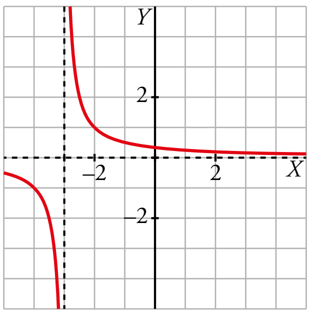
1 **Representa sucesivamente.**

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+3}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x+3} + 8$

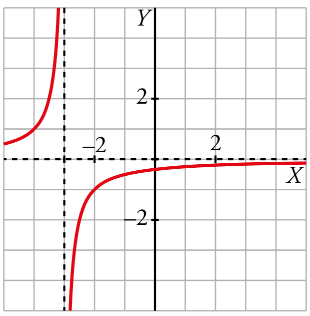
a)



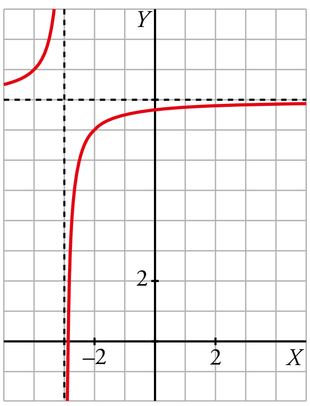
b) Se obtiene desplazando la gráfica anterior tres unidades a la izquierda.



c) Es la simétrica de la anterior respecto del eje X.



d) Es igual a la anterior trasladándola 8 unidades hacia arriba.



Página 269

2 **Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:**

$$y = f(x) - 6,\; y = f(x+4),\; y = \frac{1}{2}f(x),\; y = 2f(x),\; y = -f(x),\; y = f(-x),\; y = -2f(-x) + 3$$

$y = f(x) - 6 \to (3, 2)$ $y = f(x+4) \to (-1, 8)$ $y = \frac{1}{2}f(x) \to (3, 4)$

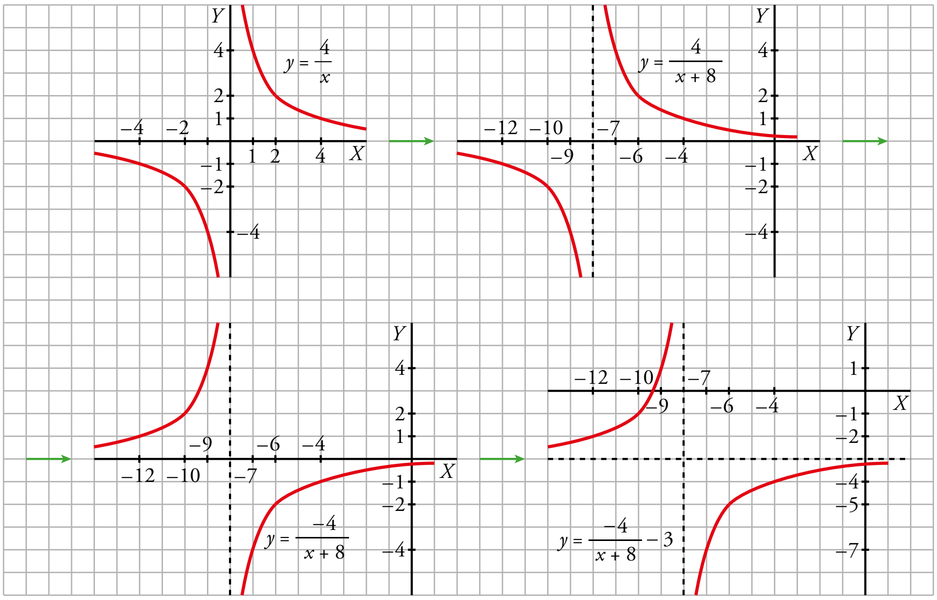
$y = 2f(x) \to (3, 16)$ $y = -f(x) \to (3, -8)$ $y = f(-x) \to (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \to (-3, -13)$

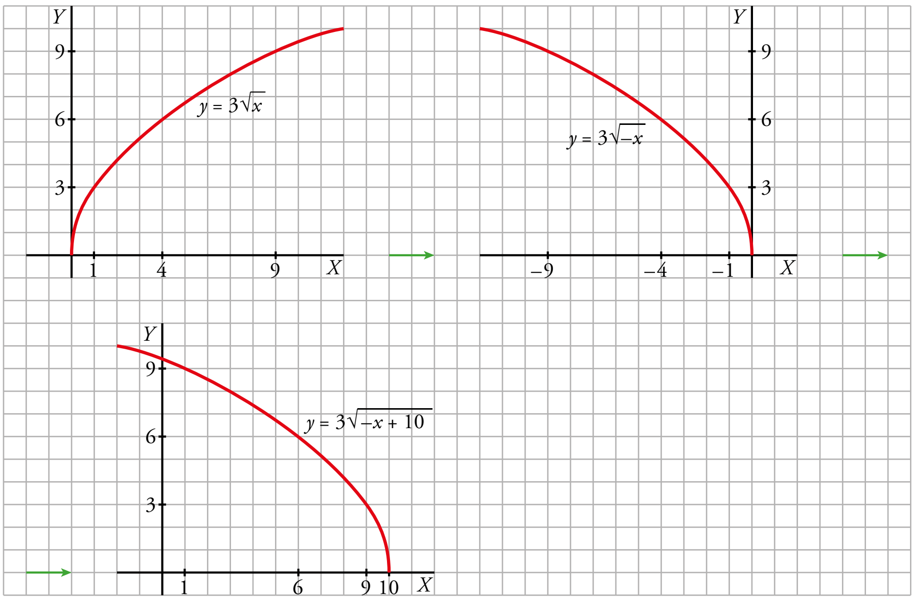
3 **Representa.**

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$ **b)** $y = 3\sqrt{-x+10}$

a) Representamos $y = \dfrac{4}{x} \to y = \dfrac{4}{x+8} \to y = -\dfrac{4}{x+8} \to y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$



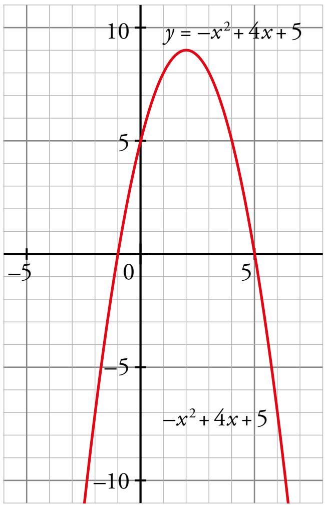
b) Representamos $y = 3\sqrt{x} \to y = 3\sqrt{-x} \to y = 3\sqrt{-(x-10)}$



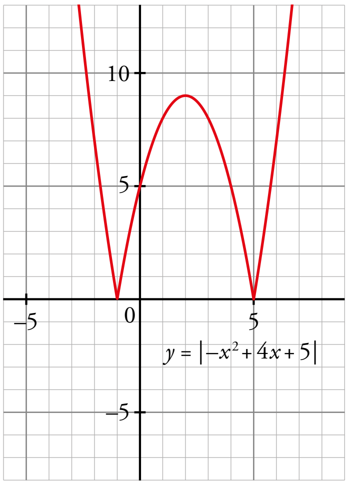
Página 270

4 Representa: $y = |-x^2 + 4x + 5|$

Dibujamos la parábola sin valor absoluto:

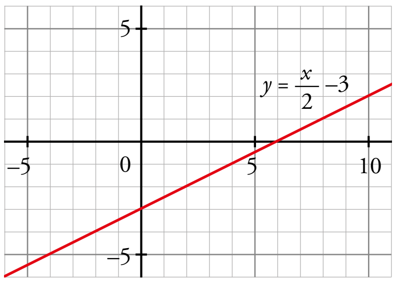


Los puntos de corte con el eje de las abscisas son $x = -1$; $x = 5$. Por tanto entre estos dos valores la gráfica sube sus valores por encima del eje de las X:

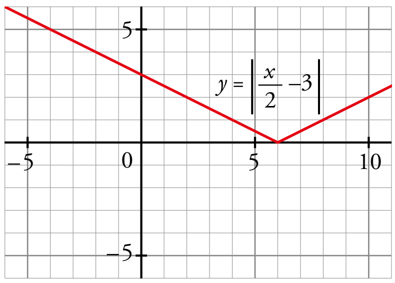


5 Representa gráficamente: $y = \left|\dfrac{x}{2} - 3\right|$

Dibujamos primero la recta sin valor absoluto $y = \dfrac{x}{2} - 3$:



Corta el eje de las X en (6,0) por lo que subimos todo el trozo de recta que quedaba por debajo de este eje:



6 ▶ COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 272

1 **Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.**

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179;\ g[f(4)] = 1$

2 **Si $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$, obtén las expresiones de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = \pi/4$.**

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(sen\ x) = sen\ x + \frac{\pi}{2}$

$f \circ f(x) = f[f(x)] = f(sen\ x) = sen\ (sen\ x)$

$g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = x + \pi$

$f \circ g(0) = sen\ \frac{\pi}{2} = 1$

$g \circ f(0) = sen\ 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$f \circ f(0) = sen\ (sen\ 0) = 0$

$g \circ g(0) = 0 + \pi = \pi$

$f \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} + \pi}{2}$

$f \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}65$

$g \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

3 **Si $f(x) = sen\ x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla las expresiones de las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.**

- $f(g(x)) = f(x^2 + 5) = sen\,(x^2 + 5)$

  $f(g(0)) = f(5) = sen\,5 = -0{,}96$

  $f(g(2)) = f(9) = sen\,9 = 0{,}41$
- $g(f(x)) = g(senx) = sen^2 x + 5$

  $g(f(0)) = g(0) = 5$

  $g(f(2)) = g(sen\ 2) = sen^2 2 + 5 = 5{,}83$
- $f(f(x)) = f(senx) = sen\,(senx)$

  $f(f(0)) = f(0) = 0$

  $f(f(2)) = f(sen\ 2) = f(0{,}91) = 0{,}79$

- $g(g(x)) = g(x^2 + 5) = (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + 10x^2 + 30$

  $g(g(0)) = g(5) = 25 + 5 = 30$

  $g(g(2)) = g(9) = 81 + 5 = 86$

4 **Dado $f(x) = x + 1$, obtén en cada caso la función $g(x)$ para que se cumpla:**

a) $g[f(x)] = x - 2$

b) $f[g(x)] = x^2 + 3x - 2$

c) $g \circ f(x) = x^2 + 2x$

d) $f \circ g(x) = x$

a) $g(x) = x - 3 \rightarrow g(f(x)) = g(x+1) = x + 1 - 3 = x - 2$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 3 \rightarrow f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 3) = x^2 + 3x - 3 + 1 = x^2 + 3x - 2$

c) $g(x) = x^2 - 1 \rightarrow g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$

d) $g(x) = x - 1 \rightarrow f(g(x)) = f(x-1) = x - 1 + 1 = x$

7 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 3.1.** (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 273

1 **[El alumnado puede colaborar explicando el sentido de las afirmaciones trabajando así la destreza expresión oral].**

¿Verdadero o falso?

a) La función recíproca de $y = x$ es $y = \frac{1}{x}$.

b) Cada una de las funciones $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ es recíproca de sí misma.

c) La inversa de $y = \frac{9}{x}$, $x \in [3, 9]$ es $y = \frac{9}{x}$, $x \in [1, 3]$.

d) Si una función es creciente, su recíproca es decreciente.

a) Falso. Las gráficas de esas funciones no son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, puesto que una es recta y la otra es curva.

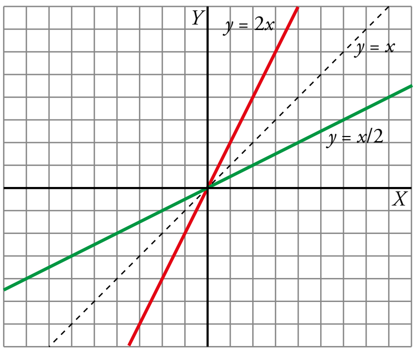
b) Verdadero. Si $f(x) = x$ y calculamos $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(x) = x$, vemos que f es recíproca de sí misma.

Análogamente, si $g(x) = \frac{1}{x}$ y calculamos $g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$, vemos que g es recíproca de sí misma.

c) Verdadero. Podemos comprobarlo en el gráfico. La gráfica verde es simétrica, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, de la gráfica roja.

d) Falso. Por ejemplo, la recíproca de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, es la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, y ambas son crecientes.

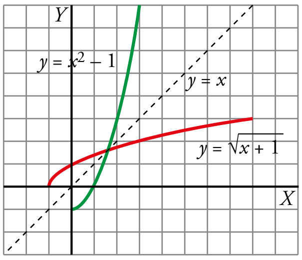
2 **Representa $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ y comprueba que son inversas.**



3 **Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas. Averigua cuáles son.**

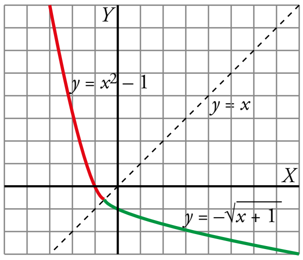
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x+1}$



b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x+1}$



4 **Comprueba que la función recíproca de $y = 2x + 4$ es $y = \frac{1}{2}x - 2$.**

Llamemos $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x + 4) = \frac{1}{2}(2x + 4) - 2 = x$

Luego $g = f^{-1}$.

Página 274

5 **¿Verdadero o falso?**

La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2\, x$, $x > 1$.

Falso. La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2\, x$, $x > 0$.

6 **Halla la función recíproca de:**

$$y = log_2\, x, \quad x \in [8, 32]$$

La función recíproca es $y = 2^x$, $x \in [3, 5]$.

8 FUNCIONES ARCO

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.13. (EA 1.13.2.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 276

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La función $y = arc\ tg\ x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ es la recíproca de la función $y = tg\ x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $arc\ sen\ 0 = \frac{\pi}{2}$

c) $arc\ cos\ 0 = \frac{\pi}{2}$

d) $arc\ cos\ \pi = -1$

e) $arc\ cos\ (-1) = \pi$

f) $arc\ sen\ \frac{\pi}{2}$ no existe

g) $arc\ tg\ 1 = \frac{\pi}{4}$

a) Verdadero. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) Falso. $sen\ 0 = 0 \ \rightarrow\ arc\ sen\ 0 = 0$

c) Verdadero, ya que $cos\ \frac{\pi}{2} = 0$.

d) Falso, ya que $cos\ (-1) = 0,54$.

e) Verdadero: $cos\ \pi = -1$

f) Verdadero, ya que *sen x* toma valores en (–1, 1), y este intervalo es el dominio de la función *arc sen x*.

g) Verdadero: $tg\ \frac{\pi}{4} = 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.)

Página 277

Hazlo tú

1. Dominio de definición

- **Halla el dominio de definición de las funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$

b) $g(x) = ln\ (sen\ x)$

a) Buscamos los valores de x tales que $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} \rightarrow x = 2,\ x = 3$$

Estos dos puntos pertenecen al dominio, veamos qué pasa en los intervalos restantes:

$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \rightarrow -(x-2)(x-3) \geq 0 \rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0$

- Si $x < 2 \rightarrow x - 2 < 0;\ x - 3 < 0 \rightarrow (x-2)\ (x-3) > 0$
- Si $2 < x < 3 \rightarrow x - 2 > 0;\ x - 3 < 0 \rightarrow (x-2)\ (x-3) < 0$
- Si $x < 3 \rightarrow x - 2 > 0;\ x - 3 > 3 \rightarrow (x-2)\ (x-3) > 0$

Por tanto:

$Dom\ f = [2, 3]$

b) La función logaritmo solamente está definida para valores positivos, por lo que necesitamos que se cumpla:

$sen\ x > 0 \rightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi$, para k entero

Por tanto:

$Dom\ g = \{x \mid 2\pi < x < (2k+1)\pi$, para k entero$\}$

Página 278

Hazlo tú

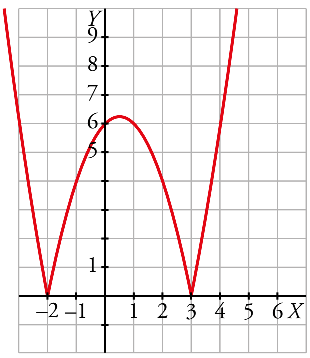
4. Valor absoluto de una función

- **Define por intervalos y representa:**

a) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ **b)** $f(x) = x - |x|$ **c)** $f(x) = ln\ |x - 3|$

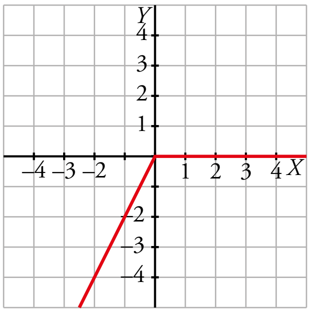
a) La parábola $y = x^2 - 4x - 5$ tiene su vértice en el punto $(2, -9)$. Es negativa entre -1 y 5. Luego en ese intervalo su gráfica es $-f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x \leq 5 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{si } 5 < x \end{cases}$$



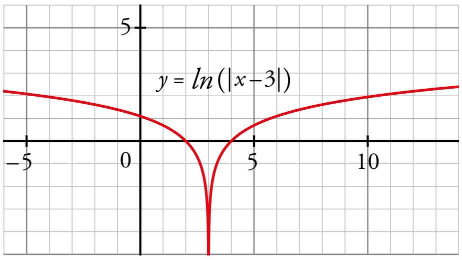
b) Por la definición de la función valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x-(-x) & \text{si } x<0 \\ x-x & \text{si } 0 \le x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$



c) $|x-3| > 0$ si $x \neq 3 \rightarrow Dom\, f(x) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} ln(x-3) & \text{si } x>3 \\ ln(-x+3) & \text{si } x<3 \end{cases}$$



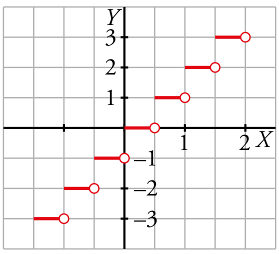
Página 279

Hazlo tú

5. Función «parte entera»

- **Representa $f(x) = Ent\,(2x)$.**

Esta gráfica es como la de la función parte entera, pero contraída a la mitad en el sentido del eje horizontal.



Página 280

Hazlo tú

6. Composición y función inversa

- **Halla $g \circ f$ y $f \circ g$, siendo: $f(x) = 3x^2 - 5$ y $g(x) = \sqrt{2^{x-1}}$**

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x^2 - 5) = \sqrt{2^{3x^2-5-1}} = \sqrt{2^{3x^2-6}}$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{2^{x-1}}) = 3\sqrt{2^{x-1}}^2 - 5 = 3 \cdot 2^{x-1} - 5$

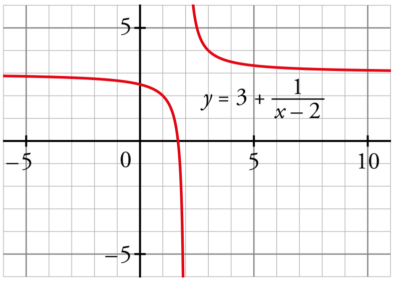
7. Representación de hipérbolas

- **Representa la función $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$ y su inversa.**

Dividimos los polinomios de numerador entre denominador y obtenemos:

$\dfrac{3x-5}{x-2} = \dfrac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \dfrac{1}{x-2} \to f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2}$

La gráfica de $f(x)$ es como la gráfica de $\dfrac{1}{x}$ desplazada 3 unidades hacia arriba y 2 unidades a la derecha:

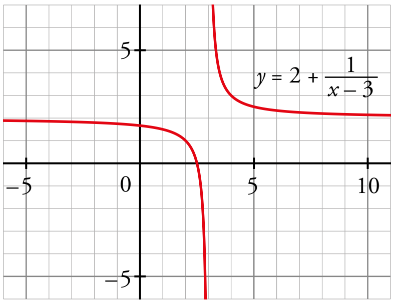


Tenemos que hallar ahora su inversa, por lo que cambiamos sus variables y despejamos:

$x = \dfrac{3y-5}{y-2} \to x(y-2) = 3y-5 \to xy - 2x = 3y - 5 \to y(x-3) = -5 + 2x \to y = \dfrac{2x-5}{x-3}$

Por tanto $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-5}{x-3} = 2 + \dfrac{1}{x-3}$

La gráfica de la función inversa es como la de $\dfrac{1}{x}$ desplazando 2 unidades hacia arriba y 3 hacia la derecha $f^{-1}(x) = 2 + \dfrac{1}{x-3}$.



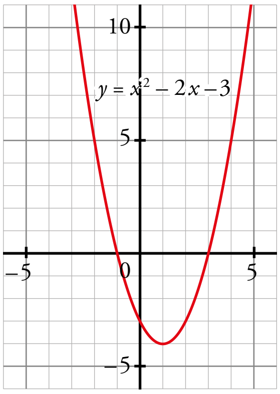
8. Transformaciones elementales de funciones

- **Describe las transformaciones que debemos hacer en la gráfica de $y = x^2$ para representar $f(x) = x^2 - 2x - 3$.**

  Completando cuadrados:

  $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4$

  Por lo tanto para dibujar su gráfica partimos de la gráfica de $y = x^2$, hacemos una traslación de 1 unidad a la derecha y 4 unidades hacia abajo:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 280

1. Interpolación lineal

- **El porcentaje de personas que tenían acceso a Internet en España era en 2018 el 86,1 % y, en 2014, el 74,4 %.**

  Estimar el porcentaje en 2016.

  Para escribir la recta que pasa por *A* y *B* buscamos su vector director, por ejemplo puede ser:

  $\overrightarrow{BA} = (4; 11,7)$

  Podemos escribir esta recta:

  $$\frac{x-2018}{4} = \frac{y-86,1}{11,7} \;\rightarrow\; y = \frac{11,7x - 23\,610,6 + 344,4}{4} \;\rightarrow\; y = 2,925x - 5\,816,55$$

  Así:

  $f(x) = 2,925x - 5\,816,55$

  Por tanto: $f(2016) = 80,25$

2. Ecuación de una parábola

- **Escribir la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto (1, 9) y corta al eje Y en (0, 8).**

  Buscamos a, b, c sabiendo que $V(1,9) \rightarrow 1 = -\dfrac{b}{2a} \rightarrow -2a = b \;\; (1)$

  Sustituimos en la ecuación los dos puntos que sabemos que pertenecen a la parábola:

  $P(0,8) \rightarrow 8 = c \;\; (2)$

  $V(1,9) \rightarrow 9 = a + b + c \;\; (3)$

  Resolviendo el sistema formado por (1), (2), (3):

  $$c = 8, \; a = -1, \; b = 2 \;\rightarrow\; y = -x^2 + 2x + 8$$

  Una segunda forma de resolver el problema es considerando $y = a(x-1)^2 + k$:

  $V(1,9) \rightarrow 9 = k$

  $P(0,8) \rightarrow 8 = a + k \rightarrow a = -1 \rightarrow y = -(x-1)^2 + 9$

3. Una función polinómica

- **Considerar todos los conos cuya generatriz mide 15 cm.**

  a) Escribir la función que nos da el volumen del cono según lo que mide su altura, x.

  b) ¿Cuál es su dominio de definición?

  a) Usando el teorema de Pitágoras tenemos que:

  $R = \sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{225 - x^2}$

  Luego $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi x \left(\sqrt{225 - x^2}\right)^2 = \dfrac{\pi(225x - x^3)}{3}$

  b) La altura es un número positivo que no puede ser mayor que la generatriz. Por tanto, el dominio de definición de $V(x)$ es $Dom = (0, 15)$.

4. Función logística

- **La función $f(x) = \dfrac{12\,000}{1 + 499\,(1{,}09^{-x})}$ da las ventas totales de un videojuego x días después de su lanzamiento. ¿En qué día se llegó a 6 000 juegos vendidos?**

Tenemos que hallar el valor de x tal que:

$$\frac{12\,000}{1+499\,(1{,}09^{-x})} = 6000 \;\rightarrow\; \frac{12\,000}{6\,000} = 1 + 499(1{,}09^{-x}) \;\rightarrow\; 2 - 1 = 499(1{,}09^{-x}) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{1}{499} = 1{,}09^{-x}$$

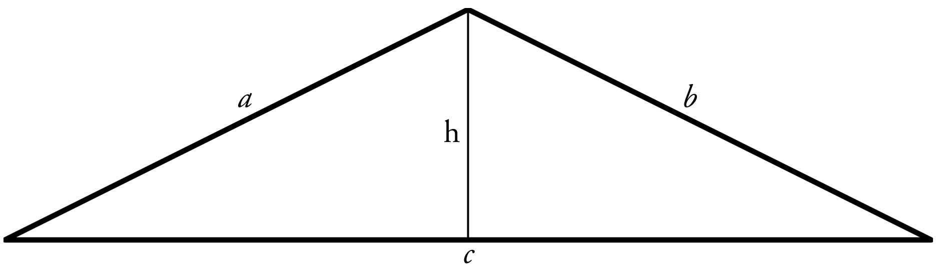
Tomando logaritmos y despejando:

$$\frac{\log 499}{\log 1{,}09} = x \;\rightarrow\; x = 72 \text{ días}$$

5. Área de un triángulo

- **El perímetro de un triángulo isósceles es 30 cm. Expresa su área en función del lado desigual. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esa función?**

El triángulo es isósceles de lados a, b, c, por lo que tendrá dos lados iguales (por ejemplo, $a = b$).



Por ser $a = b$, la altura h parte al lado c en dos partes iguales a las que llamaremos x:

$$c = 2x$$

Conocemos su perímetro: $P = 30 = 2a + 2x \;\rightarrow\; a = 15 - x$

Por el teorema de Pitágoras, aplicado a uno de los triángulos rectángulos obtenidos al dibujar la altura:

$a^2 = \mathrm{h} + x^2 \;\rightarrow\; (15 - x)^2 = 225 - 30x + x^2 = \mathrm{h}^2 + x^2 \;\rightarrow\; \mathrm{h} = \sqrt{225 - 30x}$

Ya podemos escribir la función área en función de x:

$$A(x) = \frac{2x\mathrm{h}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$$

Para hallar el dominio hay que tener en cuenta que el área no puede ser cero, si no, no existiría el triángulo, y que el interior de la raíz tiene que ser positivo (tampoco puede ser igual a cero por el mismo motivo). Por lo que:

$x > 0$ y $225 - 30x > 0 \;\rightarrow\; x \in (0; 7{,}5)$

Para estos valores de x el máximo que alcanza la función es $25\sqrt{3}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 281

Para practicar

Dominio de definición

1 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$ **b)** $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

a) La función no está definida cuando $x = -5$. Su dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, tiene como única solución $x = 0$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La función no está definida cuando $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución. Por tanto, el dominio es $Dom = \mathbb{R}$.

d) Las fracciones no se pueden evaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

2 **Estudia el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{2x+5}$ **b)** $y = \sqrt{7-x}$ **c)** $y = \sqrt{x^2+3x+4}$ **d)** $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Para que esté definida debe ser $2x + 5 \ge 0$, cuya solución es $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Su dominio es este intervalo, $Dom = \left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En este caso $x \le 7$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \ge 0 \ \to\ Dom = \mathbb{R}$

d) Para que ambas raíces existan simultáneamente debe cumplirse a la vez que $x \ge 1$ y $x \ge 2$. El dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

3 **Di cuál es el dominio de definición de:**

a) $y = 3 + 2^{1-x}$ **b)** $y = \log_2 (x+3)$ **c)** $y = \ln (2-x)$ **d)** $y = \sqrt{2^x}$

a) Su dominio es $\mathbb{R}$ porque la función exponencial siempre está definida.

b) Para que exista el logaritmo, su argumento debe ser positivo. Por tanto, $x + 3 > 0$ y el dominio es $Dom = (-3, +\infty)$.

c) Análogamente al caso anterior, $x < 2$. Su dominio es $Dom = (-\infty, 2)$.

d) La función exponencial siempre toma valores positivos. Por tanto, la raíz siempre se puede evaluar y el dominio de definición de esta función es $Dom = \mathbb{R}$.

4 **Determina el dominio de definición de las funciones:**

a) $y = e^{\sqrt{-x}}$ **b)** $y = \ln (\sqrt{x} - 2)$ **c)** $y = \sqrt{1 + \log_2 x}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}$ **e)** $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$ **f)** $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$

Los apartados e) y f), ¿corresponden a la misma función?

a) Para que exista la raíz: $-x \ge 0 \ \to\ Dom = (-\infty, 0]$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Para que exista la raíz: } x \ge 0 \\ \text{Para que exista el logaritmo: } \sqrt{x} - 2 > 0 \ \to\ x > 4\end{array}\right\} \to Dom = (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{Para que exista la raíz: } 1+log_2 x \ge 0 \;\to\; log_2 x \ge -1 \\ \text{La igualdad se da para } 2^{-1}=x \;\to\; x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \to Dom=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

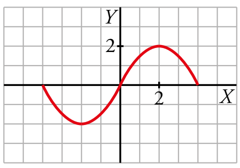
d) $\left.\begin{array}{l}\text{Para que exista la raíz: } 4-x^2 \ge 0 \;\to\; x \in [-2,2] \\ \text{Para que no se anule el denominador: } x \ne \dfrac{1}{2} \;\to\; Dom=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\end{array}\right\} \to Dom=\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2},2\right]$

e) $\left.\begin{array}{l}\text{Para que exista la raíz del numerador: } x+3 \ge 0 \;\to\; x \ge -3 \\ \text{Para que exita la raíz del denominador y sea no nula: } x-2>0 \;\to\; x>2\end{array}\right\} \to Dom=(2,+\infty)$

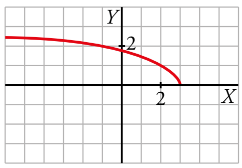
f) $\left.\begin{array}{l}\text{Para que exista la raíz, el denominador no puede ser cero: } x \ne 2 \\ \text{Además, tiene que ser de un número positivo o cero: } \dfrac{x+3}{x-2} \ge 0 \;\to\; x>2 \text{ o } x<-3\end{array}\right\} \to Dom=(-\infty,-3] \cup (2,+\infty)$

5 Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:

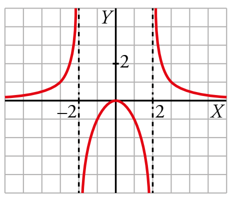
a)



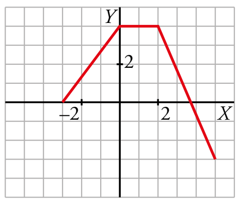
b)



c)



d)



a) Dominio: $[-4, 4]$ Recorrido: $[-2, 2]$

b) Dominio: $(-\infty, 3]$ Recorrido: $[0, +\infty)$

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Recorrido: $\mathbb{R}$

d) Dominio: $[-3, 5]$ Recorrido: $[-3, 4]$

6 La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t, hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

Necesitamos calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello es necesario resolver la ecuación:

$80 + 64t - 16t^2 = 0$, que tiene una solución posible, $t = 5$.

Como el tiempo no puede ser negativo, el dominio es $Dom = [0, 5]$.

El recorrido de la función definida entre 0 y 5 tendrá su máximo en el vértice de la parábola.

$h(t)=16(5+4t-t^2) \;\to\; h(t)-161(t^2-4t+4-4+5) \;\to\; h(t)=-16((t-2)^2+9) \;\to$

$\to$ El vértice está en $t=2$.

$h(2)=144$

$h(0)=5$

$h(5)=0$

Por tanto, el recorrido es el intervalo $[0, 144]$.

7 **Escribe la función que nos da el área de un rectángulo de perímetro 16 cm, en función de su base x. ¿Cuál es su dominio de definición y su recorrido?**

La función área es $A(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$, que es una función cuadrática.

Su dominio es $Dom = (0, 8)$.

El valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-8}{-2} = 4$. Este valor es $A(4) = 16$. Por tanto, el recorrido de la función es el intervalo (0, 16].

8 **[El análisis de la función del enunciado permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

La temperatura de una persona, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37 °C, ha evolucionado según la función $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

Calculamos los días en los que tiene 37 °C.

$$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 12$$

Es decir, a los 12 días vuelve a tener 37 °C de temperatura. El dominio es el intervalo [0, 12].

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, el valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura máxima es $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En consecuencia, el recorrido es el intervalo [37; 40,6].

Funciones elementales

9 **Interpretación compartida. [El trabajo con imágenes permite que el alumnado ponga en práctica esta técnica].**

Asocia a cada gráfica su fórmula.

a) $y = 1{,}5^x$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = \frac{x^2}{3} - 1$

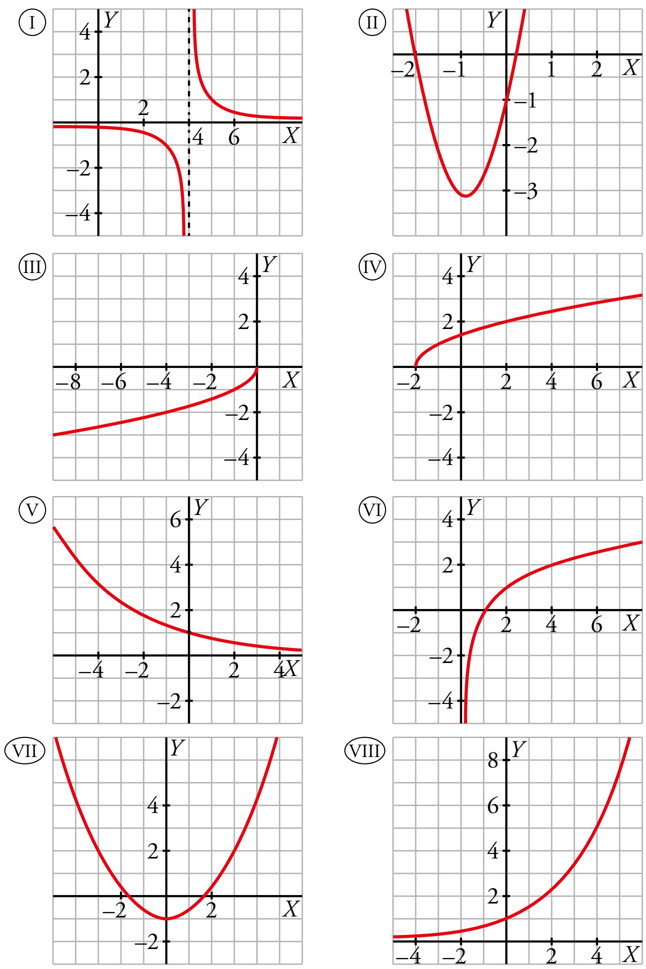
d) $y = \frac{1}{x-4}$

e) $y = 3x^2 + 5x - 1$

f) $y = 0{,}75^x$

g) $y = \log_2 x$

h) $y = -\sqrt{-x}$



a) VIII

b) IV

c) VII

d) I

e) II

f) V

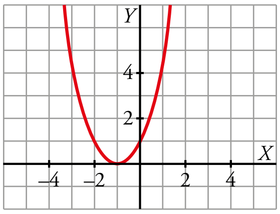
g) VI

h) III

10 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 3x - 5$ **d)** $y = -1{,}5x^2 - 3x - 2$

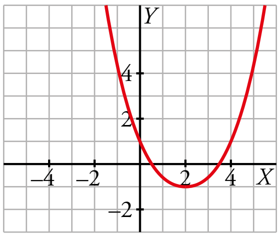
a)



Vértice: (–1, 0)

Cortes con los ejes: (–1, 0), (0, 1)

b)



Vértice: abscisa $= \dfrac{2}{1} = 2$; ordenada $= 0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -1$

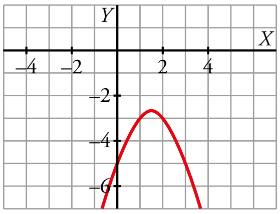
Corte con el eje vertical: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

Corte con el eje horizontal:

$y = 0 \;\rightarrow\; 0{,}5x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} = 2 \pm \sqrt{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x_1 = 2 + \sqrt{2};\; x_2 = 2 - \sqrt{2}$

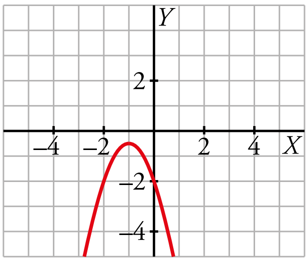
c)



Vértice: $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-11}{4}\right)$

Cortes con los ejes: (–5, 0)

d)



Vértice: abscisa $= \dfrac{3}{-3} = -1$; ordenada $= -1{,}5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = -0{,}5$

Corte con el eje vertical: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -2$

Corte con el eje horizontal: $y = 0 \;\rightarrow\; 1{,}5x^2 - 3x - 2 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{-3}$

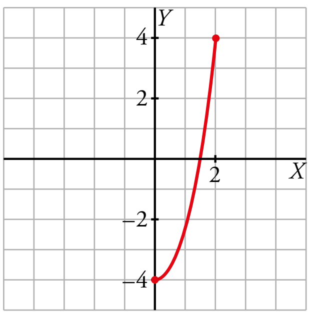
No corta al eje horizontal. Podemos evaluar ahora en algún punto cercano al vértice; por ejemplo, (–2, –2), (0, –2).

11 **Representa estas funciones en el intervalo indicado:**

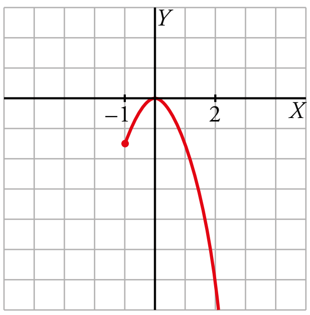
a) $y = 2x^2 - 4$, **[0, 2]** **b)** $y = -\dfrac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$ **c)** $y = \dfrac{1}{x}$, $x < 0$

d) $y = 0{,}6^x$, **[–3, 3]** **e)** $y = \log_2 x$, **(0, 7]** **f)** $y = \sqrt{x}$, **[0, 1]**

a) $y = 2x^2 - 4$, [0, 2]

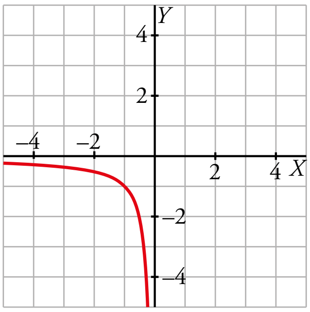


b) $y = -\dfrac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$



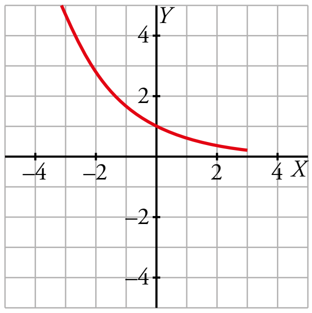
c) $y = \dfrac{1}{x}$, $x < 0$

Se trata de una rama de la función de proporcionalidad inversa y su gráfica es:



d) $y = 0{,}6^x$, $[-3, 3]$

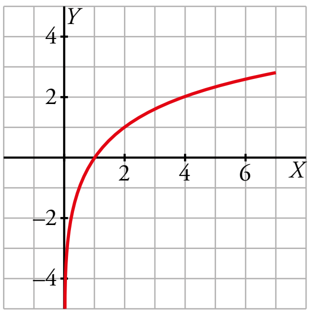
Es una función exponencial con base menor que 1. Mediante una tabla de valores obtenemos:



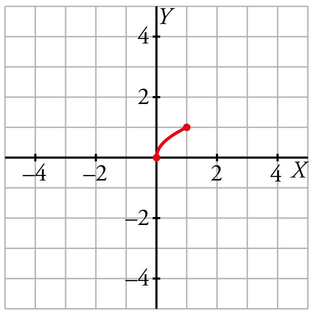
x	y
–3	4,6
–1	1,67
0	1
1	0,6
3	0,21

e) $y = log_2\, x$, $(0, 7]$

Es un fragmento de la función logaritmo en base 2.



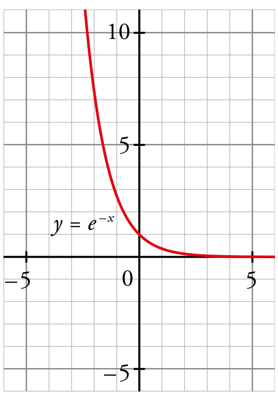
f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$



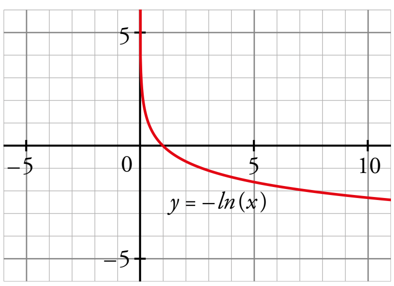
12 **Representa las siguientes funciones:**

a) $f(x) = e^{-x}$ **b)** $f(x) = -ln\, x$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

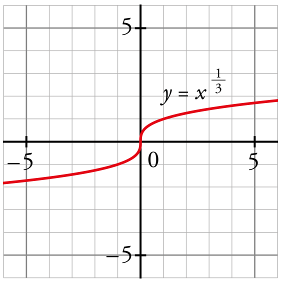
a) Es la simétrica de e^x respecto al eje *Y*.



b) Es la simétrica de *ln x* respecto al eje *X*.



c) Es la inversa de x^3.



Página 282

Funciones definidas «a trozos»

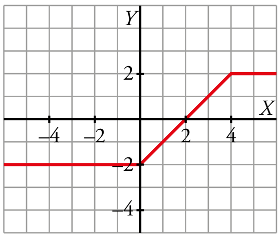
13 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

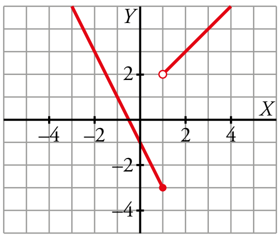
b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

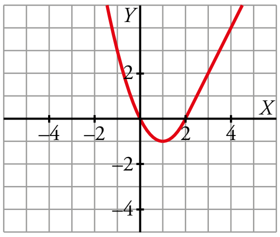
a)



b) Construimos una tabla de valores para cada recta y obtenemos la gráfica.



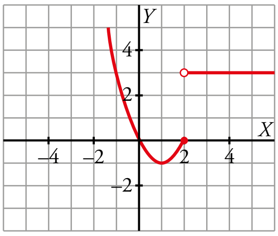
c) Hallamos el vértice de la parábola, (1, –1), y los puntos de corte, (0, 0) y (2, 0) (primer trozo). Construimos una tabla de valores para el segundo trozo y obtenemos:



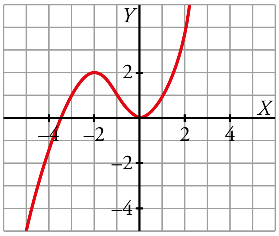
14 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

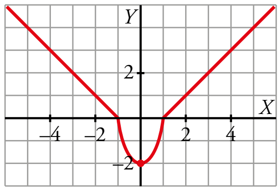
a)



b)



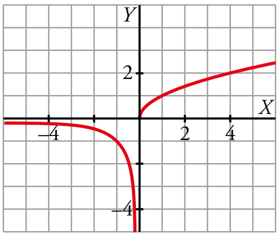
c)



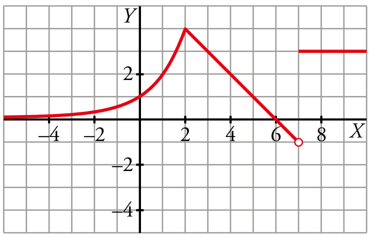
15 **Representa.**

a) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

a) Está formada por dos trozos de funciones ya representadas en ocasiones anteriores.



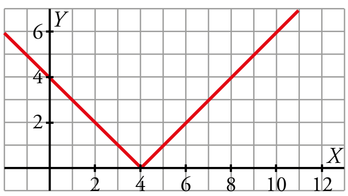
b)



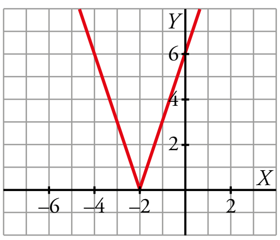
16 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones «a trozos»:**

a) $y = |4 - x|$ b) $y = |3x + 6|$ c) $y = \left|\dfrac{x - 3}{2}\right|$ d) $y = |-x - 1|$

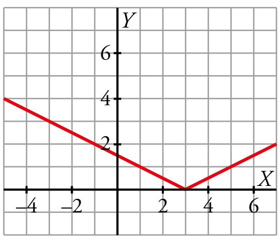
a)



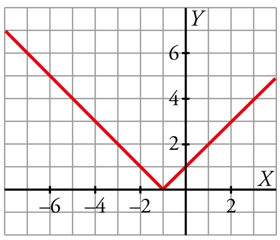
b)



c)

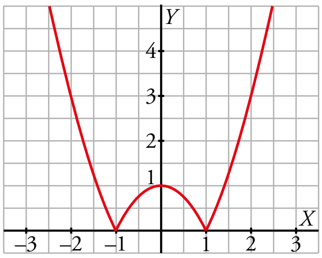


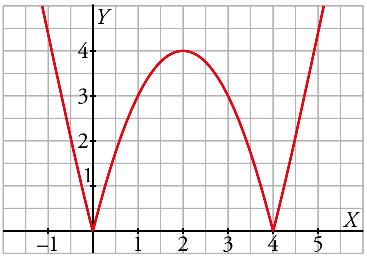
d)

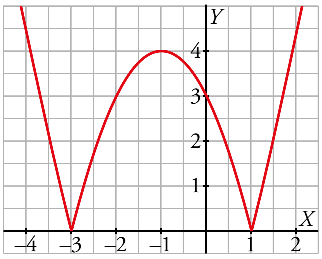


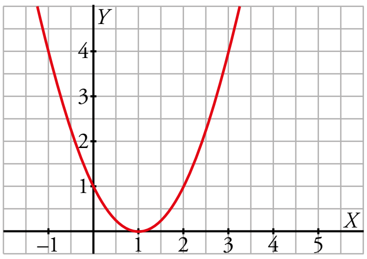
17 **Representa estas funciones:**

a) $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 4x|$ **c)** $y = |x^2 + 2x - 3|$ **d)** $y = |x^2 - 2x + 1|$

a)


b)


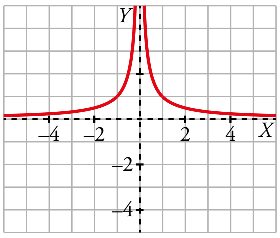
c)


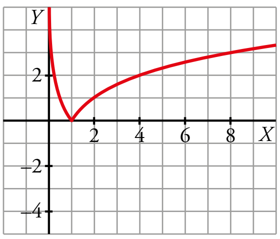
d)


18 **Representa.**

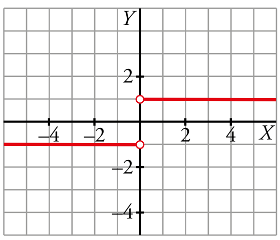
a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ **b)** $y = |log_2 x|$ **c)** $y = \dfrac{|x|}{x}$ **d)** $y = 2|x| + x$

La función valor absoluto de $f(x)$ mantiene la parte positiva de la gráfica y convierte la parte negativa de $f(x)$ en $-f(x)$, es decir, en la simétrica de $f(x)$ respecto del eje horizontal.

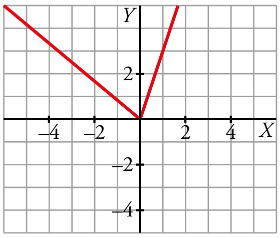
a)


b)


c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



19 **Representa las funciones siguientes:**

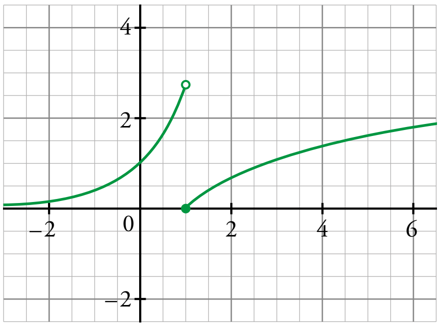
a) $y = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

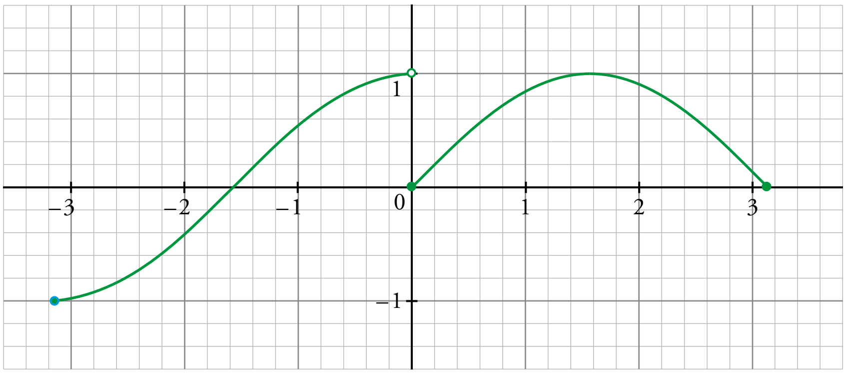
c) $y = \begin{cases} 5 - x & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

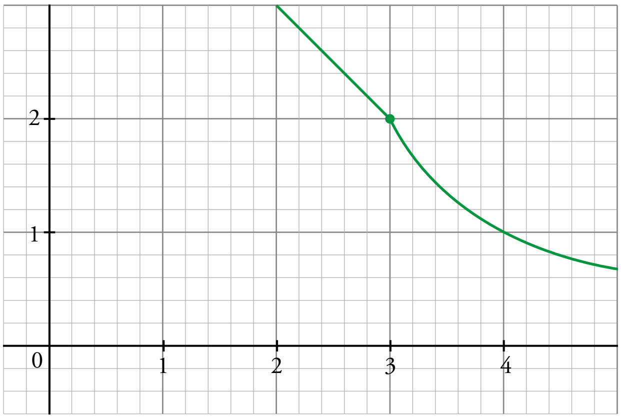
a)



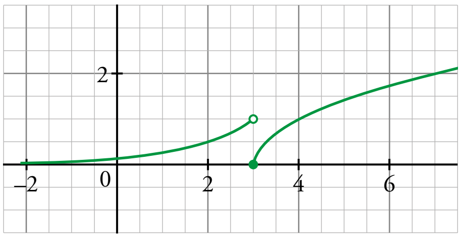
b)



c)



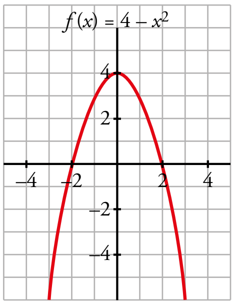
d)



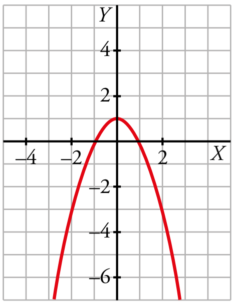
Transformaciones de una función

20 **Represento** **$f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:**

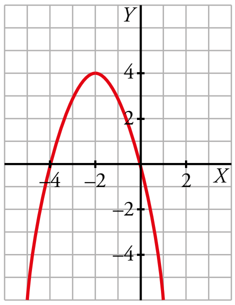
a) $y = f(x) - 3$ **b)** $y = f(x + 2)$ **c)** $y = |f(x)|$



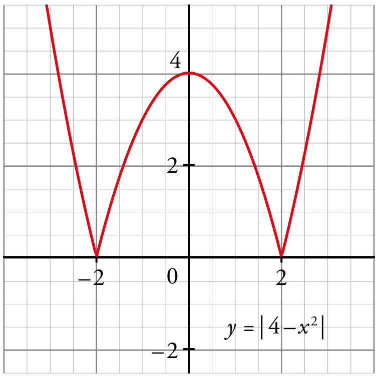
a)



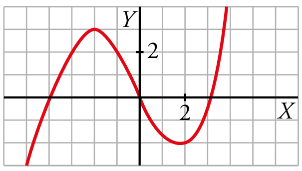
b)



c) La función no toma valores negativos:



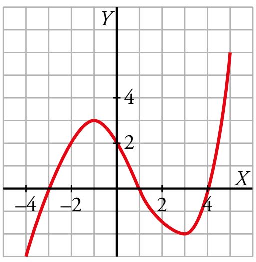
21 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**



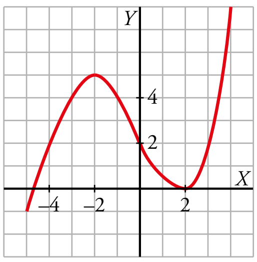
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ **b)** $y = f(x) + 2$ **c)** $y = |f(x)|$

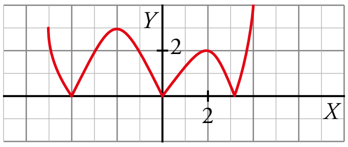
a)



b)

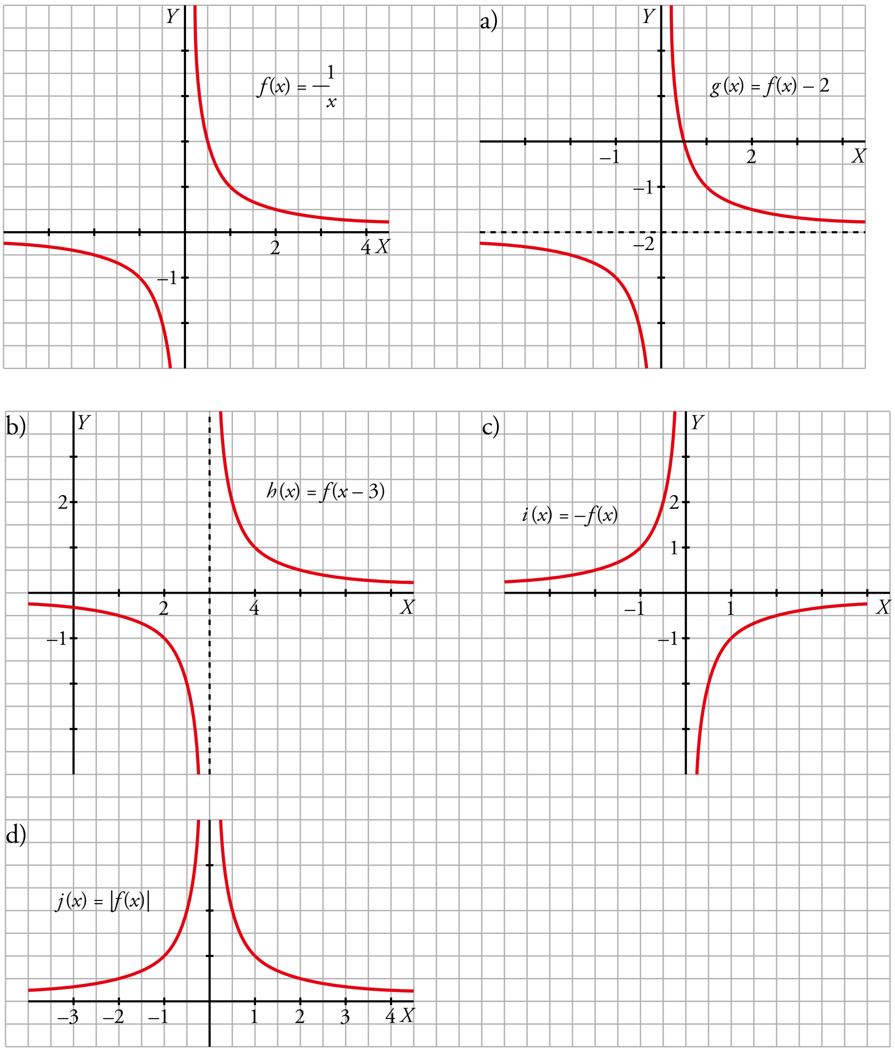


c) La función no toma valores negativos:



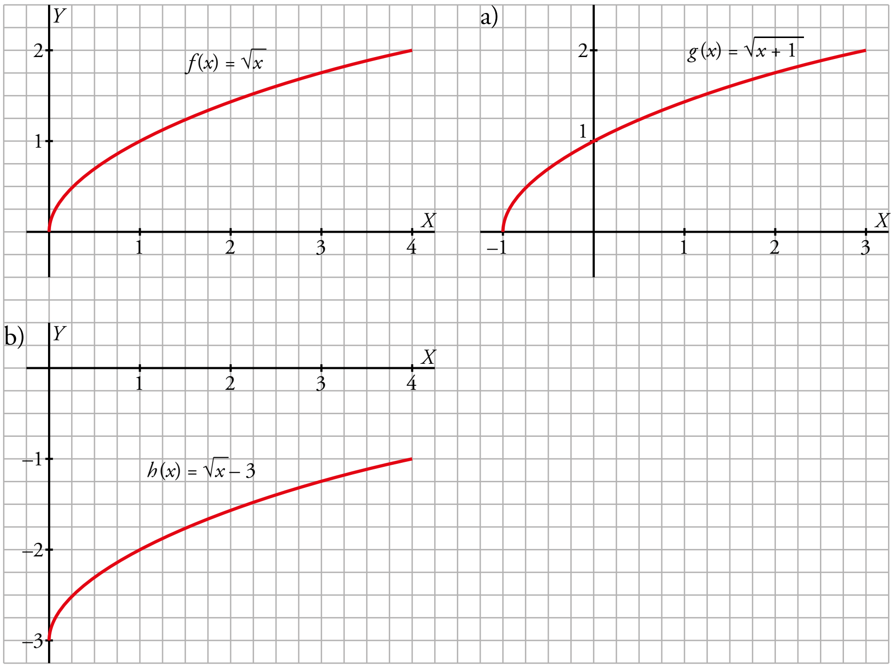
22 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 2$ **b)** $h(x) = f(x - 3)$ **c)** $i(x) = -f(x)$ **d)** $j(x) = |f(x)|$



23 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:**

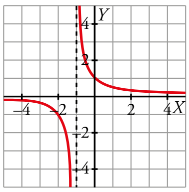
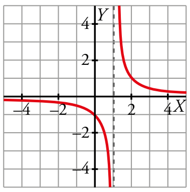
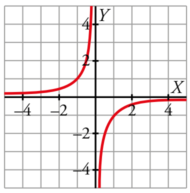
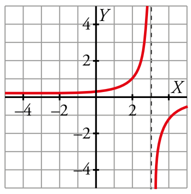
a) $g(x) = f(x + 1)$ **b)** $h(x) = f(x) - 3$ **c)** $j(x) = |f(x)|$



c) Es la misma gráfica que $f(x) = \sqrt{x}$ ya que $f(x)$ es siempre positiva.

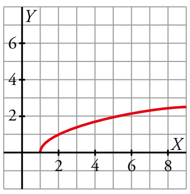
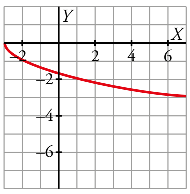
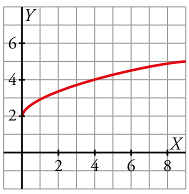
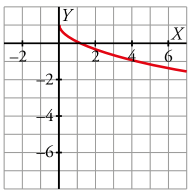
24 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$

a)

b)

c)

d)


25 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = -\sqrt{x+3}$ **c)** $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

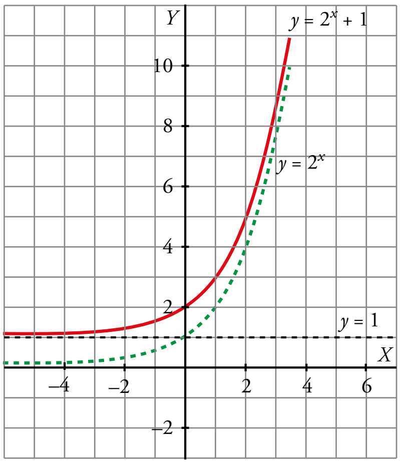
a)

b)

c)

d)


26 **Representa estas funciones:**

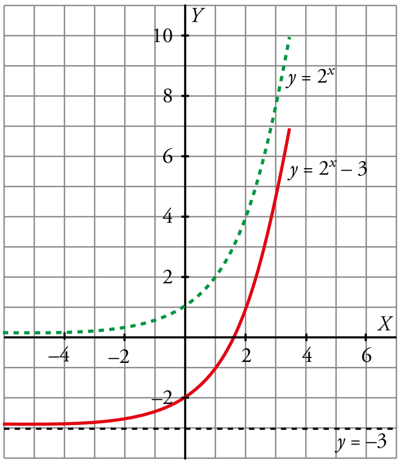
a) $y = 2^x + 1$ **b)** $y = 2^x - 3$ **c)** $y = 2^{x-1}$

d) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$ **e)** $y = 1 - 2^x$ **f)** $y = 2^{-x}$

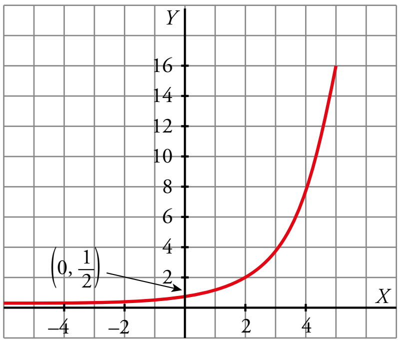
a)



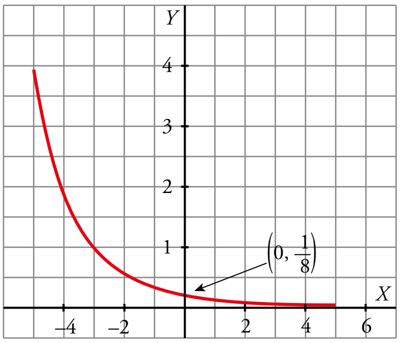
b)



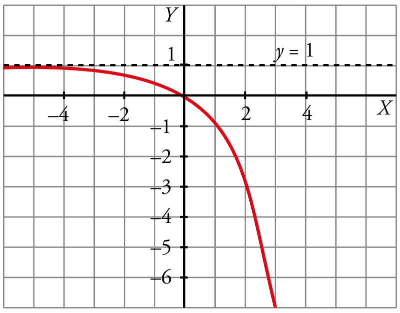
c)



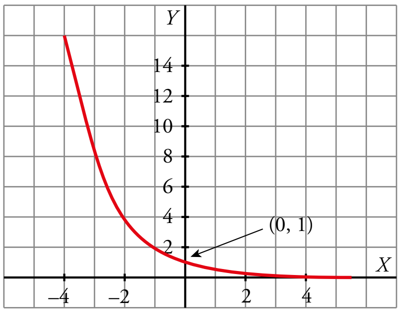
d)



e)



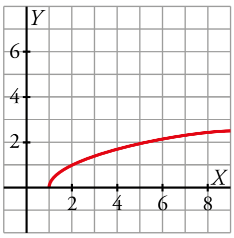
f)



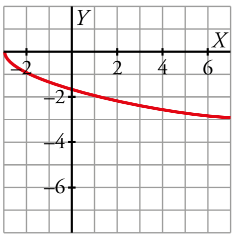
27 **Representa estas funciones a partir de la gráfica de** $y = log_2\, x$**:**

a) $y = 1 + log_2\, x$ **b)** $y = log_2\, (x - 1)$ **c)** $y = -log_2\, x$ **d)** $y = log_2\, (-x)$

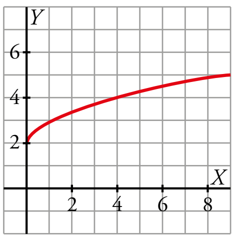
a)



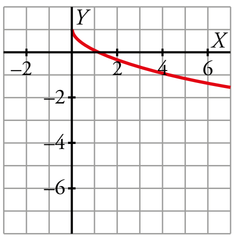
b)



c)



d)



28 **Expresa estas funciones de la forma $y = a(x - m)^2 + p$ y describe las transformaciones que tenemos que hacer para representarlas a partir de $y = x^2$:**

a) $y = x^2 - 10x + 16$ **b)** $y = 3x^2 - 3x + 5$

a) $y = x^2 - 10x + 16 \rightarrow y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 16 \rightarrow y = (x-5)^2 - 9$

Trasladamos la gráfica 5 unidades a la derecha y 9 hacia abajo.

b) $y = 3x^2 - 3x + 5 \rightarrow y = 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{3}\right) \rightarrow y = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$

Aplanamos la parábola cerrándola un poco (está multiplicando el factor 3), trasladamos la gráfica media unidad a la derecha y $\frac{17}{4}$ unidades hacia arriba.

29 **Expresa las siguientes funciones de la forma $y = \frac{k}{x-a} + b$ y describe las transformaciones que tenemos que hacer para representarla a partir de $y = \frac{1}{x}$:**

a) $y = \frac{3x}{x-1}$ **b)** $y = \frac{x-2}{x-4}$ **c)** $y = \frac{3x+2}{x+1}$ **d)** $y = \frac{x+1}{x-1}$

a) $y = \frac{3x}{x-1} = \frac{3(x-1)+3}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$

Se estira la gráfica de $\frac{1}{x}$ (el factor 3 está multiplicando), se desplaza 3 unidades hacia arriba y 1 hacia la derecha.

b) $y = \frac{(x-2)}{x-4} = \frac{x-4+2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$

Estiraremos la gráfica de $\frac{1}{x}$ (el factor 2 está multiplicando), y se traslada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades a la derecha.

c) $y = \frac{3x+2}{x+1} = \frac{3(x+1)-1}{x+1} = 3 - \frac{1}{x+1}$

Es la simétrica de $\frac{1}{x}$ respecto del eje X, trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba.

d) $y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Se estira la gráfica (el factor 2 está multiplicando), y se traslada 1 unidad hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

Página 283

Composición y función inversa

30 **Dadas las funciones**

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{3}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x-3}$$

obtén las expresiones de:

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ h$

d) $g \circ h$ **e)** $h \circ f$ **f)** $h \circ g$

Halla, si es posible, el valor de las funciones obtenidas en los puntos $x = 5$ y en $x = 0$.

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \left(\dfrac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \dfrac{9}{(x-2)^2} + 1 = \dfrac{x^2 - 4x + 13}{(x-2)^2}$

$f \circ g(5) = \dfrac{5^2 - 4 \cdot 5 + 13}{(5-2)^2} = 2$

$f \circ g(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 + 13}{(0-2)^2} = \dfrac{13}{4}$

b) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = \dfrac{3}{x^2 + 1 - 2} = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$g \circ f(5) = \dfrac{3}{5^2 - 1} = \dfrac{1}{8}$

$g \circ f(0) = \dfrac{3}{0^2 - 1} = -3$

c) $f \circ h(x) = f[h(x)] = f(\sqrt{x-3}) = \sqrt{x-3}^{\,2} + 1 = x - 2$

$f \circ h(5) = 5 - 2 = 3$

$f \circ h(0) = 0 - 2 = -2$

d) $g \circ h(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{x-3}) = \dfrac{3}{\sqrt{x-3} - 2}$

$g \circ h(5) = \dfrac{3}{\sqrt{5-3} - 2} = \dfrac{3}{\sqrt{2} - 2}$

$g \circ h(0)$ no existe.

e) $h \circ f(x) = h[f(x)] = h(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 3} = \sqrt{x^2 - 2}$

$h \circ f(5) = \sqrt{5^2 - 2} = \sqrt{23}$

$h \circ f(0)$ no existe.

f) $h \circ g(x) = h[g(x)] = h\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2} - 3} = \sqrt{\dfrac{-3x + 9}{x-2}}$

$h \circ g(5)$ no existe.

$h \circ g(0)$ no existe.

31 **Explica cómo a partir de las funciones**

$$f(x) = 2^{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

se pueden obtener estas otras:

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$ **b)** $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$ **c)** $p(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$ **e)** $r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ **f)** $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$

a) $m(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x} + 2) = 2^{\sqrt{x}+2-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

c) $p(x) = g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3} - 1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = h \circ g(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{x} + 2) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2 - 3} = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

f) $s(x) = h \circ g \circ f(x) = h \circ g[f(x)] = h \circ g(2^{x-1}) = h(\sqrt{2^{x-1}} + 2) = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}} + 2 - 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$

32 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{3x - 1}{2}$ **b)** $y = \sqrt{2x - 1}$ **c)** $y = 1 + 2^{x-3}$

d) $y = 2 + log_3 (x + 1)$ **e)** $y = \sqrt{4 - x},\ x \le 4$ **f)** $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$

a) Para encontrar la función inversa debemos intercambiar las variables x e y para luego aislar de nuevo la variable y:

$$x = \frac{3y - 1}{2} \to f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{3}$$

b) $x = \sqrt{2y - 1} \to 2y - 1 = x^2 \to f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2}$

c) $x = 1 + 2^{y-3} \to x - 1 = 2^{y-3} \to log(x - 1) = (y - 3)\, log(2) \to log(x - 1) + 3\, log(2) = y\, log(2) \to$

$$\to f^{-1}(x) = \frac{log(x - 1) + 3\, log(2)}{log(2)} = \frac{log(x - 1)}{log(2)} + 3$$

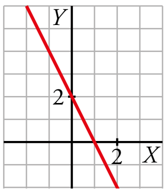
d) $x = 2 + log_3(y + 1) \to 3^x = 3^{2 + log_3(y+1)} = 9(y + 1) \to f^{-1}(x) = \dfrac{3^x}{9} - 1$

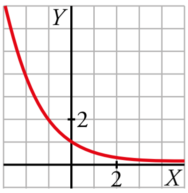
e) $x = \sqrt{4 - y} \to 4 - y = x^2 \to f^{-1}(x) = 4 - x^2$

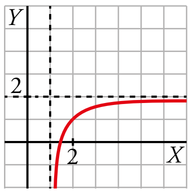
Como $Dom\ f(x) = \{x \mid x \le 4\} \to y = 4 - x^2 \ge 4 - 4 = 0 \to Dom\, f^{-1}(x) = [0, +\infty)$

f) $x = \dfrac{2y - 3}{y + 1} \to x - 2 = \dfrac{-5}{y + 1} \to y = \dfrac{-5}{x - 2} - 1 \to f^{-1}(x) = \dfrac{-3 - x}{x - 2}$

33 **Representa gráficamente la función inversa en cada caso:**

a) 

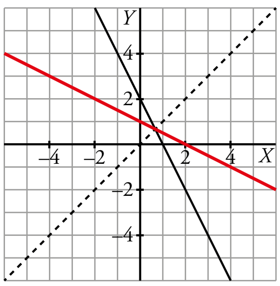
b) 

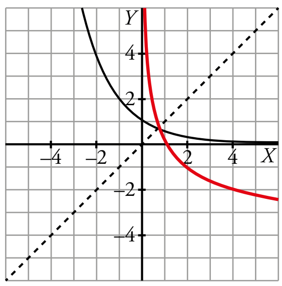
c) 

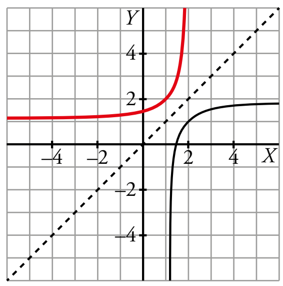
Calcula sobre la gráfica correspondiente:

$\boldsymbol{f^{-1}(2)}$ $\boldsymbol{f^{-1}(1)}$ $\boldsymbol{f^{-1}(-1)}$

Hacemos una simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante para dibujar la función inversa.

a) 

b) 

c) 

34 Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello, calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$; $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

a) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - 2 + 2} = x$

b) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} f(x)] = f(\sqrt{2x+3}) = \dfrac{\sqrt{2x+3}^2 + 2}{3} = \dfrac{2x+5}{3}$

En este caso no es verdad que las funciones sean recíprocas. f^{-1} es incorrecta.

c) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(1 + log_2 \dfrac{x}{3}\right) = 3 \cdot 2^{1 + log_2[(x/3) - 1]} = 3 \cdot 2^{log_2(x/3)} = 3 \cdot \dfrac{x}{3} = x$

35 Considera la función $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2, 7]$.

a) ¿Cuál es su recorrido?

b) Obtén su función inversa, y determina el dominio de definición y el recorrido de esta.

a) Como la función es creciente, calculamos los valores en los extremos del intervalo.

$x = -2 \rightarrow y = \sqrt{-2+2} = 0$

$x = 7 \rightarrow y = \sqrt{7+2} = 3$

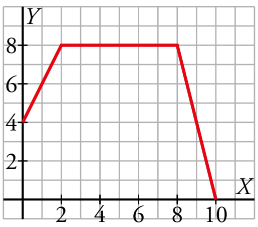
El recorrido es el intervalo [0, 3].

b) $y = \sqrt{x+2} \rightarrow x = \sqrt{y+2} \rightarrow y = x^2 - 2$, $x \in [0, 3]$ es la función inversa. Su dominio es el intervalo [0, 3] y el recorrido es el intervalo [–2, 7].

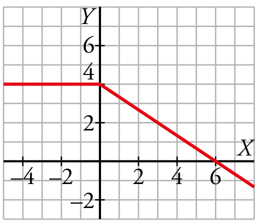
Para resolver

36 Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:

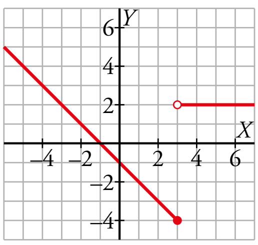
a)



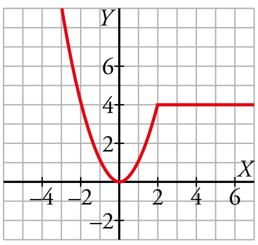
b)



c)



d)



a) Primer tramo:

Función lineal con pendiente 2 y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y = 2x + 4$.

Segundo tramo: $y = 8$

Tercer tramo:

Función lineal que pasa por los puntos (8, 8) y (10, 0). Su pendiente es $\frac{0-8}{10-8}=-4$.

La expresión es $y-8=-4(x-8) \to y=40-4x$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 8 & \text{si } 2<x\le 8 \\ 40-4x & \text{si } 8<x\le 10 \end{cases}$$

b) Primer tramo: $y=4$

Segundo tramo:

Función lineal con pendiente $-\frac{2}{3}$ y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y=-\frac{2}{3}x+4$.

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{si } x\le 0 \\ -\dfrac{2x}{3}+4 & \text{si } 0<x \end{cases}$$

c) $f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{si } x\le 3 \\ 2 & \text{si } x>3 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 2 \\ 4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

37 Determina, en cada caso, la ecuación de la parábola de la que conocemos el vértice y otro punto.

a) $V(1,-4)$, $P(-1,0)$ **b) $V(-2,3)$, $P(0,6)$**

a) Si la parábola es $y=ax^2+bx+c$ tenemos que:

$$V(1,-4) \to \begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=1 \to b=-2a \\ -4=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \to -4=a+b+c \end{cases}$$

$P(-1,0) \to 0=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c \to 0=a-b+c$

$$\begin{cases} b=-2a \\ -4=a+b+c \\ 0=a-b+c \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a=1$, $b=-2$, $c=-3$.

La parábola buscada es $y=x^2-2x-3$.

b) Si la parábola es $y=ax^2+bx+c$, tenemos que:

$$V(-2,3) \to \begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=-2 \to b=4a \\ 3=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c \to 3=4a-2b+c \end{cases}$$

$P(0,6) \to 6=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \to 6=c$

$$\begin{cases} b=4a \\ 3=4a-2b+c \\ c=6 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a=\frac{3}{4}$, $b=3$, $c=6$.

La parábola buscada es $y=\frac{3}{4}x^2+3x+6$.

38 **Obtén el valor de y en grados y radianes.**

a) $y = arc\ sen \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $y = arc\ cos \frac{1}{2}$ **c)** $y = arc\ tg\ 1$

d) $y = arc\ sen\ (-1)$ **e)** $y = arc\ cos \left(-\frac{1}{2}\right)$ **f)** $y = arc\ tg \sqrt{3}$

a) 60° b) 60° c) 45°

d) –90° e) 120° f) 60°

39 **Calcula en radianes.**

a) $arc\ sen \left(sen \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $arc\ cos\ (cos\ \pi)$ **c)** $arc\ tg \left(tg \frac{\pi}{5}\right)$

d) $tg\ (arc\ tg\ 1)$ **e)** $sen\ (arc\ cos\ (-1))$ **f)** $arc\ cos\ (tg\ \pi)$

a) $arc\ sen \left(sen \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ b) $arc\ cos\ (cos\ \pi) = \pi$ c) $arc\ tg \left(tg \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

d) $tg\ (arc\ tg\ 1) = 1$ e) $sen\ (arc\ cos\ (-1)) = 0$ f) $arc\ cos\ (tg\ \pi) = \frac{\pi}{2}$

40 **[El análisis de este tipo de funciones es una oportunidad para trabajar la dimensión social (comunidad y bien común) de esta clave].**

En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$; y se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto con funciones de oferta y demanda $o(x) = 2{,}5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuáles serían el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x) \rightarrow 2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x \rightarrow x = 100$ € es el precio de equilibrio.

La cantidad de equilibrio es $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ miles de unidades.

b) Si $x = 80$, hay escasez, porque la demanda supera a la oferta. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hay exceso, porque la oferta supera a la demanda. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

c) $o(x) = d(x) \rightarrow 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ da lugar a una única solución posible: $x = 30$ €.

La cantidad de equilibrio es $o(30) = d(30) = 125$ miles de unidades.

Página 283

41 **Se sabe que la retención de conocimientos de un curso va disminuyendo con el paso del tiempo. Un estudio de psicología concluye que el porcentaje que se recuerda t meses después de finalizado el curso, viene dado por la función:**

$$R(t) = 94 - 46{,}8\ log\ (t + 1)$$

a) Calcula el porcentaje del curso que se recordará cuando pase un año.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo se recordará la mitad de los conocimientos?

a) En 12 meses recordará: $R(12) = 41{,}86\,\%$

b) Al inicio recuerda $R(0) = 94$. Queremos saber cuándo recordará la mitad:

$$R(t) = 94 - 46{,}8\,log(t+1) = \frac{94}{2} \to 47 - 46{,}8\,log(t+1) = 0 \to -\frac{47}{-46{,}8} = log(t+1) \to$$

$$\to 1{,}004 = log(t+1) \to 10^{1{,}004} = t+1 \to t = 10{,}0925 - 1 = 9{,}009$$

Recordará la mitad al cabo de 9 meses.

42 **En cierto país se aplican estos impuestos sobre los salarios mensuales:**

- **20 % de la parte del salario bruto comprendida entre 800 €, que es el salario mínimo, y 2 500 €.**
- **40 % de la parte del salario bruto superior a 2 500 €.**

a) ¿Qué salario neto corresponde a 1 500 € de salario bruto? ¿Y a 3 000 €?

b) Escribe la función que da los impuestos a pagar, según el salario bruto *x*.

c) ¿Cuál debe ser, como mínimo, el salario bruto para que el neto sea superior a 2 500 €?

a) Tenemos en cuenta que los primeros 800 € no tienen impuestos.

El salario neto para 1 500 € es:

$$1500 - \frac{20}{100}(1500 - 800) = 1\,060 \text{ €}$$

Para encontrar el salario neto para 3 000 € debemos considerar 3 tramos donde se cobran diferentes impuestos:

$$3\,000 - \frac{20}{100}(2\,500 - 800) - \frac{400}{100}(3\,000 - 2\,500) = 2\,460 \text{ €}$$

b) Calculamos la función que nos da los impuestos $I(x)$ definiéndola como una función a trozos:

$$I(x) = \begin{cases} 0{,}2(x - 800) & \text{si } 800 \le x \le 2\,500 \\ 0{,}2(2\,500 - 800) + 0{,}4(x - 2\,500) & \text{si } x > 2\,500 \end{cases}$$

Es decir:

$$I(x) = \begin{cases} 0{,}2(x - 800) & \text{si } 800 \le x \le 2\,500 \\ 0{,}2 \cdot 1700 + 0{,}4(x - 2\,500) & \text{si } x > 2\,500 \end{cases}$$

c) $x - I(x) > 2\,500 \to x - 0{,}2 \cdot 1700 - 0{,}4(x - 2\,500) > 2\,500 \to x - 340 - 0{,}4x + 1\,000 > 2\,500 \to$

$\to 0{,}6x > 1840 \to x > 3\,066{,}66$

El salario neto debe ser superior a 3 066,66 euros.

43 **Una feria ganadera está abierta al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t) = -20t^2 + Bt + C$, donde t es la hora de visita.**

Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1 500 visitantes, halla B y C y representa la función.

Como la función $N(t)$ es una parábola con las ramas hacia abajo, el número máximo se alcanza en el vértice de la parábola, luego:

$$\frac{-B}{2 \cdot (-20)} = 17 \to B = 680 \to N(t) = -20t^2 + 680t + C$$

Como a las 17 h la feria tiene 1 500 visitantes, se tiene que:

$$1\,500 = -20 \cdot 17^2 + 680 \cdot 17 + C \to C = -4\,280$$

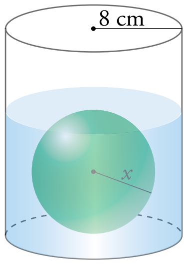
La función es $N(t) = -20t^2 + 680t - 4\,280$

Para representar la función calculamos $N(10) = 520$ y $N(20) = 1\,320$. El vértice y estos dos puntos son suficientes para construir la gráfica.

44 **En un cilindro de radio 8 cm, depositamos una bola esférica de radio x y echamos agua hasta que cubra la bola.**

Escribe la función que da la cantidad de agua que hay que echar según la medida del radio de la bola.

¿Cuál es su dominio de definición?



Como la bola tiene radio x, la altura del agua es $2x$. El volumen del agua es el volumen de un cilindro de radio 8 y altura $2x$ menos el volumen de una esfera de radio x.

$$V(x) = \pi \cdot 8^2 \cdot 2x - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3 = 128\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3 = 4\pi x\left(32 - \frac{x^2}{3}\right)$$

45 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderán 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos de la fábrica sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x, en decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 50 \text{ euros}$$

46 **Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ka^t$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?**

$y = ka^t$

$t = 0,\ y = 100 \ \rightarrow\ 100 = k \cdot a^0 \ \rightarrow\ k = 100$

$t = 30,\ y = 435 \ \rightarrow\ 435 = 100 \cdot a^{30} \ \rightarrow\ a^{30} = 4{,}35 \ \rightarrow$

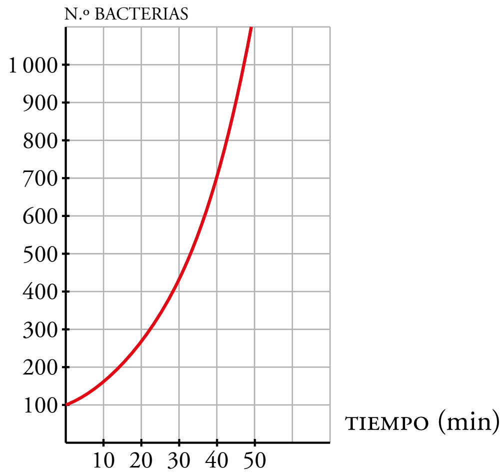
$\rightarrow\ a = 4{,}35^{1/30} \ \rightarrow\ a \approx 1{,}05$

La función es $y = 100 \cdot 1{,}05^x$.

Si $y = 5\,000 \ \rightarrow\ 5\,000 = 100 \cdot 1{,}05^x$

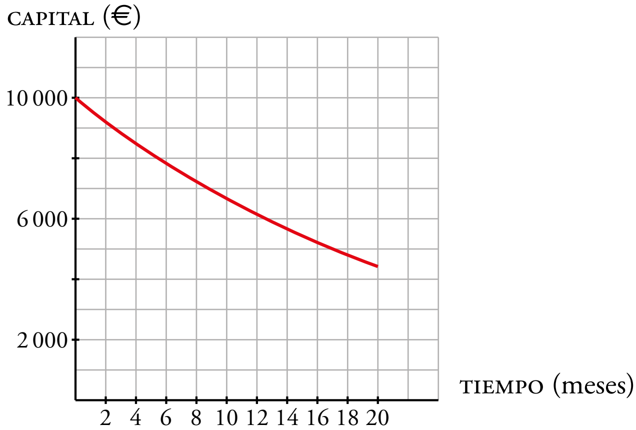
$50 = 1{,}05^x \ \rightarrow\ x = \dfrac{\log 50}{\log 1{,}05} \approx 80$ min

Tardará 80 minutos, aproximadamente.



47 **Un negocio en el que invertimos 10 000 €, pierde un 4% mensual. Escribe la función que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos, y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?**

$y = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$



Si $y = 5\,000 \ \rightarrow\ 5\,000 = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$

$0{,}96^x = 0{,}5 \ \rightarrow\ x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}96} \approx 16{,}98$ meses

Tardará 17 meses, aproximadamente.

48 **Una taza de café recién hecho está a 75 °C. Después de 3 minutos en una habitación a 21 °C, la temperatura del café ha descendido a 64 °C. Si la temperatura, T, del café en cada instante t viene dada por la expresión $T = A\, e^{kt} + 21$, calcula A y k y representa la función.**

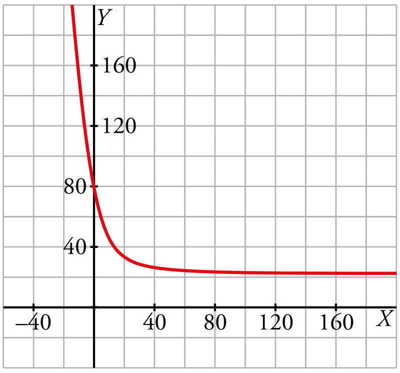
¿Cuánto tendremos que esperar para que la temperatura del café sea de 45 °C?

Por los datos del problema, la función temperatura pasa por los puntos (0, 75) y (3, 64), luego:

$75 = A \cdot e^{k \cdot 0} + 21 \ \rightarrow\ A = 54$

$64 = 54 \cdot e^{k \cdot 3} + 21 \ \rightarrow\ e^{3k} = \dfrac{43}{54} = 0{,}796 \ \rightarrow\ k = \dfrac{\ln 0{,}796}{3} = -0{,}076$

Por tanto, $T = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21$



Si la temperatura del café es de 45°, entonces:

$$45 = 54 \cdot e^{-0,076t} + 21 \;\rightarrow\; e^{-0,076t} = \frac{24}{54} = 0,444 \;\rightarrow\; t = \frac{ln\,0,444}{-0,076} = 10,7 \text{ minutos}$$

Debemos esperar 10 minutos 42 segundos para que alcance los 45°.

49 **Para enviar un paquete desde Adelaida a París, un servicio de correo cobra 50 € por paquetes que pesen hasta 2 kg y 10 € por cada kg o fracción adicional.**

a) Calcula lo que cuesta enviar un paquete de 5 kg.

b) Escribe la expresión analítica del precio de enviar un paquete de *x* kg para *x* menor o igual a 8.

c) Represéntala gráficamente.

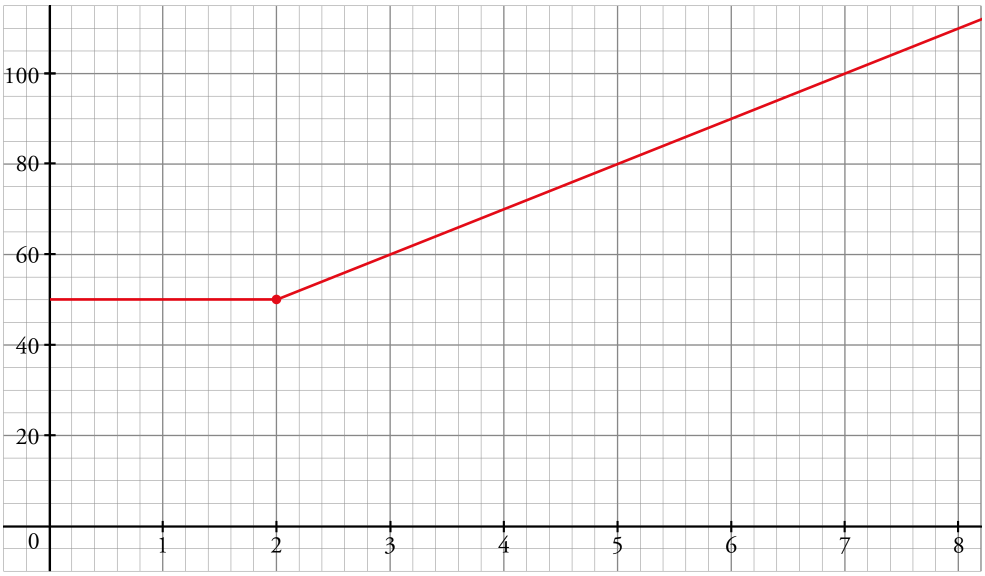
a) Si el paquete pesa 5 kg nos cobrarán:

$50 + (5 - 2)\,10 = 80$ €

b) La definimos a trozos, usando la parte entera para incluir todos los casos:

$$E(x) = \begin{cases} 50 & \text{si } x \le 2 \\ 50 + 10\,(x - 2) & \text{si } 2 < x \le 8 \end{cases}$$

c)



50 **Un charco circular de agua se está evaporando al sol. Al cabo de t minutos su radio es $g(t) = \frac{15}{t+2}$ cm.**

a) Expresa el área del charco en función del tiempo.

b) ¿Cuál será el área del charco al cabo de 10 min?

c) ¿Qué relación tiene la función del apartado a) con las funciones $f(r) = \pi r^2$ y $g(t) = \frac{15}{t+2}$?

a) El área de un círculo es $A = \pi r^2$ por lo que podemos escribir:

$$A(t) = \pi g^2(t) = \frac{225\pi}{(t+2)^2}$$

b) $A(10) = \dfrac{225\pi}{(10+2)^2} = \dfrac{225\pi}{144} = 1,56\pi = 4,9 \text{ cm}$

c) $f(g(t)) = f\left(\dfrac{15}{t+2}\right) = \dfrac{225\pi}{(t+2)^2} = A(t)$

51 **La recta $y = 20x + 1$ corta a $y = a^x$ en $x = 0$ y $x = 4$.**

a) Calcula a.

b) Para ese valor de a, escribe la ecuación de la recta, s, que corta a $y = log_a x$ en $x = 1$ y $x = 81$.

c) ¿Qué relación hay entre las rectas r y s?

a) $\left.\begin{array}{l} y = 20x+1 \\ y = a^x \end{array}\right\} \rightarrow 20x+1 = a^x \rightarrow x = 0; x = 4$

Si $x = 0$: $1 = 1 \rightarrow$ El valor $x = 0$ no ofrece información relativa al valor de a.

Si $x = 4$: $81 = a^4 \rightarrow a = 3$

b) Si $x = 1$: $y = log_3 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow P(1, 0) \in s$

Si $x = 81$: $y = log_3 81 \rightarrow y = 4 \rightarrow P(81, 4) \in s$

$\overrightarrow{PQ} = (80, 4)$ es vector director de s. Por tanto:

$s: \dfrac{x-1}{80} = \dfrac{y}{4} \rightarrow y = \dfrac{x-1}{20}$

c) Veamos que r y s son secantes:

$20x + 1 = \dfrac{x-1}{20} \rightarrow 400x - x = -1 - 20 \rightarrow x = -\dfrac{21}{399} = 0,05 \rightarrow y = 0,05$

Por otra parte, el vector director de r es $\vec{u}(1, 20)$ y el de s es $\vec{v}(20, 1)$ por lo que las rectas son secantes pero no son perpendiculares

Cuestiones teóricas

52 **[Este ejercicio requiere la comprensión de las afirmaciones y trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso? Justifícalo y pon ejemplos.

a) Si $a > 0$, se cumple $a^{log_a x} = x$.

b) La función $y = arc\ cos\ x$ corta el eje Y en $(0, \pi/2)$.

c) En la función $y = a^x$ no podemos dar a x valores negativos cuando $0 < a < 1$.

d) El dominio de la función $y = arc\ tg\ x$ es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

e) Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces $arc\ sen\ (cos\ x) = \frac{\pi}{2} - x$

a) Verdadero.

$$a^{\log_a x} = x \;\rightarrow\; \log(a^{\log_a x}) = \log x \;\rightarrow\; \log_a x \log a = \log x \;\rightarrow\; \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Es cierto por las propiedades de los logaritmos.

b) Verdadero: $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \;\rightarrow\; arc\cos 0 = \frac{\pi}{2}$

c) Falso: por ejemplo $a = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; y = 0,5^x$

Si $x = -1 \;\rightarrow\; y = 0,5^{-1} = 2$

d) Falso. Su dominio son todos los reales. En cambio su recorrido sí es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

e) Verdadero. La función se puede definir ya que:

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)sen x = \cos x - 0 = \cos x$$

53 Dadas $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$:

a) ¿Cuál debe ser el dominio de f para que exista f^{-1}?

b) Halla $g \circ f$, y di cómo son entre sí f y g.

c) ¿Cuál es dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$?

a) Buscamos la función inversa:

$$x = y^2 - y - 1 \;\rightarrow\; \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x \;\rightarrow\; \sqrt{x - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} = y \;\rightarrow\; f^{-1}(x) = \sqrt{x - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$$

Para que esté definida el valor interior de la raíz debe ser positivo $\rightarrow\; x \geq \frac{3}{4}$

$$Dom\, f^{-1}(x) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

Por tanto, para que exista $f^{-1}(x)$, solo podemos aplicar f a los valores mayores o iguales que $\frac{3}{4}$.

b) Hemos visto en el apartado anterior que g es la función inversa de f, y por lo tanto:

$g(f(x)) = x$

c) $Dom\, g(f(x)) = \mathbb{R}$

$$Dom\, f(g(x)) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

Página 285

54 Demuestra que $y = \log_b(x - a)$ e $y = \log_c(x - a)$ cortan al eje OX en el mismo punto.

Los puntos de corte de una función con el eje OX son aquellos que verifican $y = 0$.

Para que el logaritmo de un número sea 0, su argumento debe ser 1. Por tanto, el punto de corte es:

$$x = a + 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} y = \log_b(a + 1 - a) = \log_b 1 = 0 \\ y = \log_c(a + 1 - a) = \log_c 1 = 0 \end{cases}$$

55 **Calcula x en las siguientes expresiones:**

a) $arc\ tg\ x = -72°$ **b)** $arc\ sen\ x = 75°$ **c)** $arc\ cos\ x = \frac{\pi}{3}$ **rad** **d)** $arc\ tg\ x = 1{,}5$ **rad**

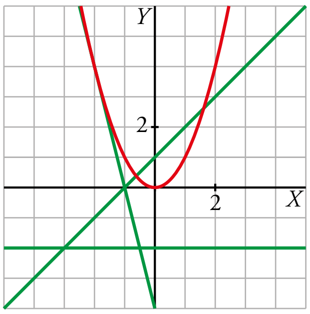
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) 0,966 c) $\frac{1}{2}$ d) 14,101

56 **¿Cuántas soluciones puede tener cada uno de estos sistemas?**

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = 1/x \\ y = ax + b \end{cases}$

a) Puede tener como máximo dos soluciones, dependiendo de la posición relativa de la parábola y la recta. Es decir, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

Desde otro punto de vista, la ecuación $x^2 = ax + b$ puede tener 0, 1 o 2 soluciones.



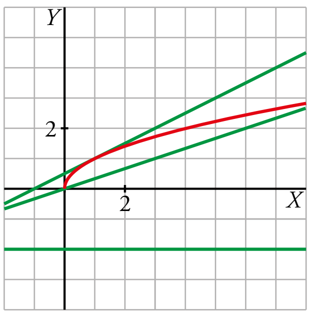
$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (–2, 4).

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Este caso es análogo al anterior. En función de la posición relativa de la semiparábola y la recta, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

La ecuación $\sqrt{x} = ax + b$ puede tener, como máximo, dos soluciones.



$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{2}(x + 1) \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

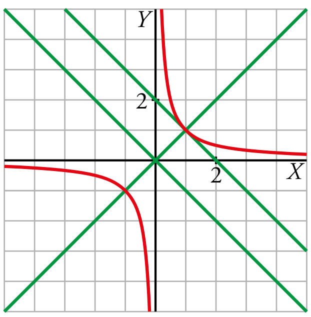
$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (0, 0) y (9, 3).

c) El sistema da lugar a una ecuación de segundo grado como podemos ver.

$\frac{1}{x} = ax + b \to x(ax + b) = 1 \to ax^2 + bx - 1 = 0$

Por tanto, al igual que en los casos anteriores, puede tener, como máximo, dos soluciones.

También puede interpretarse desde el punto de vista de la posición relativa de una hipérbola y una recta.



$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (1, 1) y (–1, –1).

Para profundizar

57 **Dadas las funciones $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$.**

a) Represéntalas y di, en cada caso, cuál es su dominio y su recorrido.

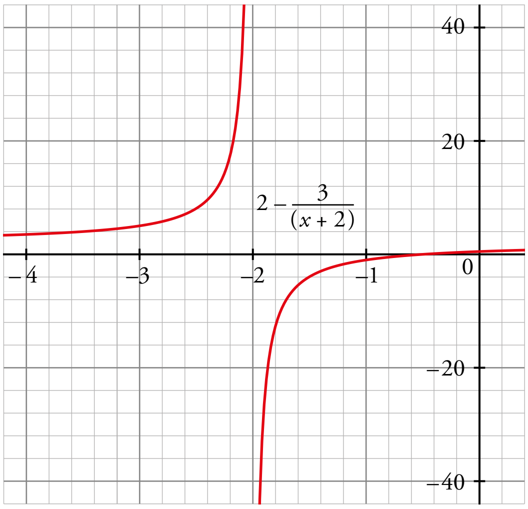
b) ¿Cuál es dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$?

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2}$

Dibujamos $f(x)$ a partir de $-\frac{1}{x}$: estiramos la gráfica, trasladamos 2 a la izquierda y 2 hacia arriba.

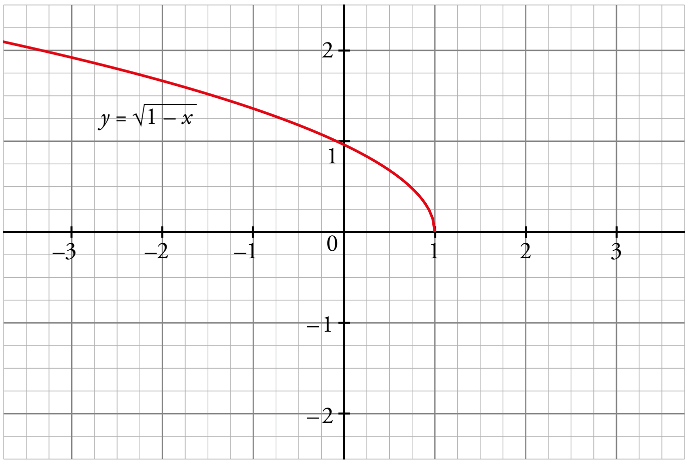
Para que no se anule el denominador necesitamos que $x \neq -2$.

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-2\}$ *Rec* $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$



Dibujamos $g(x)$, teniendo en cuenta que solamente tomará valores positivos o cero, y que no existe para valores de $x > 1$ porque si no, no existiría su raíz.

Dom $g(x) = (-\infty, 1]$ *Rec* $g(x) = [0, +\infty)$



b) Veamos el dominio de $f(g(x)) = \frac{2\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+2}$:

Como $\sqrt{1-x}+2$ siempre es distinto de cero: *Dom* $f(g(x))$ = *Dom* $g(x) = (-\infty, 1]$.

Veamos ahora el dominio de $g(f(x)) = \sqrt{1 - \frac{2x+1}{x+2}} = \sqrt{\frac{-x+1}{x+2}}$.

Se debe cumplir: $\frac{-x+1}{x+2} \geq 0$.

Si $x < -2 \rightarrow -x + 1 > 0;\ x + 2 < 0 \rightarrow \frac{-x+1}{x+2} < 0$

Si $x = -2 \rightarrow \dfrac{-x+1}{x+2}$ no existe

Si $-2 < x < 1 \rightarrow -x + 1 > 0;\ x + 2 > 0 \rightarrow \dfrac{-x+1}{x+2} > 0$

Si $x = 1 \rightarrow \dfrac{-x+1}{x+2} = 0$

Si $1 < x \rightarrow -x + 1 < 0;\ x + 2 > 0 \rightarrow \dfrac{-x+1}{x+2} < 0$

Por tanto: $Dom\, g(f(x)) = (-2, 1]$.

58 **Si $f(x) = ax - 4$ y $g(x) = bx + 3$, determina la condición que deben cumplir a y b para que $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ para todo x.**

$f(g(x)) = f(bx+3) = a(bx+3) - 4 = abx + 3a - 4$

$g(f(x)) = g(ax-4) = b(ax-4) + 3 = abx - 4b + 3$

$f(g(x)) = g(f(x)) \rightarrow 3a - 4 = -4b + 3 \rightarrow a = \dfrac{-4b+7}{3}$ para cualquier valor de x.

59 **¿Cuántas soluciones tienen estas ecuaciones?**

a) $-\dfrac{3}{2}x + 4 = \log_2 x$ **b)** $e^x = \sqrt{x}$ **c)** $e^x = 4 - x^2$ **d)** $\ln x = \dfrac{1}{x}$

Busca, cuando sea posible, una solución aproximada.

a) $y = \log_2 x$ es una función logarítmica creciente definida en $(0, +\infty)$.

$y = -\dfrac{3x}{2} + 4$ recta decreciente definida para todo x, por tanto, es imposible que la recta no corte a la gráfica del logaritmo o que la corte más de una vez.

La ecuación solo puede tener una solución.

b) Sabemos que $y = \sqrt{x}$ está definida en $[0, +\infty)$.

Por otra parte, en $x = 0$, $e^0 = 1 > 0 = \sqrt{0}$.

También sabemos que la función e^x crece mucho más rápido que $\sqrt{x}$ así que como $e^x > \sqrt{x}$ en $x = 0$ y crece más rápido, las gráficas nunca se cortarán.

La ecuación no tiene solución.

c) Si representamos gráficamente las funciones $y = e^x$ e $y = 4 - x^2$, observamos que se cortan en dos puntos. Las abscisas de estos puntos son las soluciones de la ecuación dada. Vemos que uno de ellos está muy cerca de $x = 1$.

$e^1 = e \approx 2{,}72$

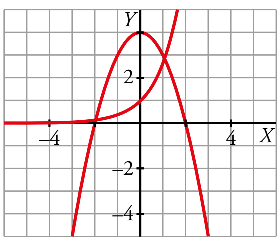
$4 - 1^2 = 3$

Probemos ahora en $x = 1{,}1$

$e^{1,1} \approx 3$

$4 - 1{,}1^2 = 2{,}79$

Una solución aproximada, a la vista de los resultados anteriores, es $x = 1{,}05$



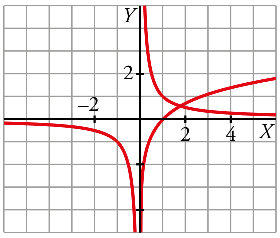
d) Si representamos gráficamente las funciones $y = ln\ x$ e $y = \frac{1}{x}$, observamos que se cortan en un punto. Su abscisa es la solución de la ecuación dada.

Si tomamos $x = 1{,}75$, obtenemos:

$ln\ 1{,}75 = 0{,}56$

$\frac{1}{1{,}75} = 0{,}57$

Por tanto, una solución aproximada es $x = 1{,}75$.



60 **Una función f tiene la siguiente propiedad:**

$f(2x + 1) + 3 = 4x^2 + 6x + 2f(1)$

¿Cuánto vale $f(2)$?

Buscamos primero $f(1)$, y para ello podemos sustituir en la igualdad dada si $x = 0$:

$f(1) + 3 = 2f(1) \rightarrow f(1) = 3$

Para encontrar $f(2)$ necesitamos que $2x + 1 = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f(2) + 3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) = 1 + 3 + 6 = 10 \rightarrow f(2) = 7$

61 **Definimos la función $f(x) = a - \sqrt{ax + b}$ para cualquier par de números reales (a, b). Dos números reales m y n se dice que son sustituibles si existe un par (a, b) tal que la función asociada a ese par, cumple $f(m) = n$ y $f(n) = m$.**

Comprueba que 2 y 3 son sustituibles. ¿Lo son también 4 y 7? Halla en cada caso a y b.

Veamos que 2 y 3 son sustituibles, resolviendo el sistema:

$\begin{cases} a - \sqrt{2a + b} = 3 \\ a - \sqrt{3a + b} = 2 \end{cases} \rightarrow$ Aislamos la raíz y elevamos al cuadrado:

$\begin{cases} 2a + b = 9 - 6a + a^2 \\ 2a + b = 9 - 6a + a^2 \end{cases} \rightarrow$ restamos ambas ecuaciones: $a = -5 + 2a \rightarrow a = 5$

Sustituyendo en valor de a encontramos b: $10 + b = 9 - 30 + 25 \rightarrow b = -6$

Por tanto, 2 y 3 son sustituibles.

Veamos si son sustituibles 4 y 7:

$\begin{cases} a - \sqrt{4a + b} = 7 \\ a - \sqrt{7a + b} = 4 \end{cases} \rightarrow$ Aislamos la raíz y elevamos al cuadrado:

$\begin{cases} 4a + b = 49 - 14a + a^2 \\ 7a + b = 16 - 8a + a^2 \end{cases} \rightarrow a = 11;\ b = -28$

Por tanto, 4 y 7 son sustituibles.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 3.1. (EA 3.1.2.-EA 3.1.3.-EA 3.1.4.)

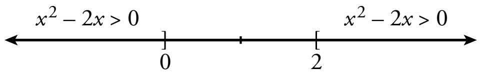
Página 285

1 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

a) La función está definida por los valores de x tales que $x^2 - 2x \geq 0$.

Resolvemos la inecuación:



$Dom = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) Los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la función.

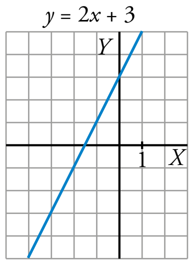
$x^3 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2(x - 1) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

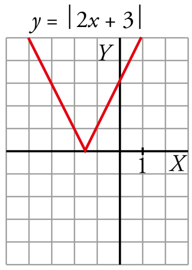
$Dom = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

2 Representa gráficamente las siguientes funciones:

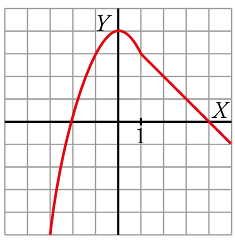
a) $y = |2x + 3|$ **b)** $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) La recta $y = 2x + 3$ corta al eje X en $x = -\dfrac{3}{2}$. Para valores menores que $-\dfrac{3}{2}$, cambiamos el signo de la ordenada. Por ejemplo: $(-2, -1) \rightarrow (-2, 1)$.



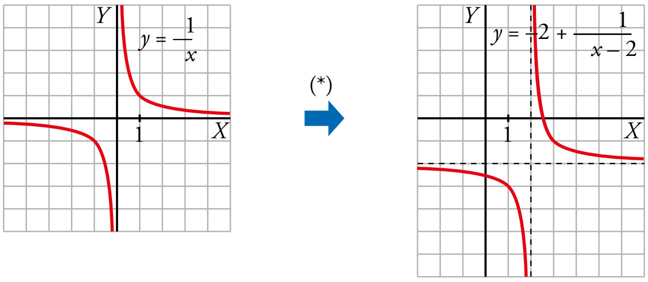


b) Para valores menores que 1, la gráfica es una parábola de vértice (0, 4). Para valores mayores que 1, es una recta.



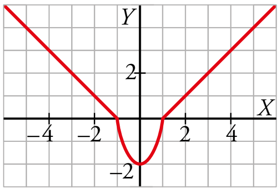
3 Representa $y = \dfrac{1}{x}$**. A partir de ella, dibuja la gráfica de** $y = \dfrac{-2x + 5}{x - 2}$**.**

$$\begin{array}{r|l} -2x + 5 & x - 2 \\ \cline{2-2} 2x - 4 & -2 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{-2x + 5}{x - 2} = -2 + \frac{1}{x - 2}$$



(*) La gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

4 **Determina la expresión analítica de esta función definida en el intervalo [–6, 6]. ¿Cuál es su recorrido?**



Definimos la función a trozos:

- $x \in [-6, -1]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(-1, 0)$ y $Q(-2, 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1) \to y = -x - 1$.
- $x \in (-1, 1)$: partimos de la parábola $y - b = k(x-a)^2$ donde $(a, b) = (0, -2)$ es el vértice $\to$ $\to y + 2 = kx^2$

  Además, sabemos que pasa por el punto $P(1, 0)$: $2 = k \to y + 2 = 2x^2$
- $x \in [1, 6]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(1, 0)$ y $Q(2, 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 1) \to y = x - 1$.

  Su recorrido son los valores que toma la ordenada:

  $Rec = [-2, 5]$

5 **Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$, halla:**

a) $f[g(2)]$ **b)** $g[f(15)]$ **c)** $f \circ g$ **d)** $g^{-1}(x)$

a) $f[g(2)] = f\left(\frac{1}{2-3}\right) = f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$

b) $g[f(15)] = g(\sqrt{15+1}) = g(4) = \frac{1}{4-3} = 1$

c) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3} + 1} = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$

d) $x = \frac{1}{y-3} \to xy - 3x = 1 \to y = \frac{1+3x}{x}$

$g^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x}$

6 **Depositamos en un banco 2 000 € al 6 % anual.**

a) Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es? Represéntala.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

a) Al cabo de un año el capital se convertirá en:

$$2\,000 + 2\,000 \cdot \frac{6}{100} = 2\,000\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 2\,000 \cdot 1{,}06$$

Al final del segundo año, el capital será $2\,000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 2\,000 \cdot 1{,}06^2$

Luego la función que da el capital al cabo de t años es:

$C(t) = 2\,000 \cdot 1{,}06^t$

b) Tenemos que calcular el tiempo, t, necesario para que:

$$4\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}06^t \;\rightarrow\; 1{,}06^t = 2 \;\rightarrow\; t = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}9$$

Deberán pasar 12 años para que el capital se haya duplicado.

7 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

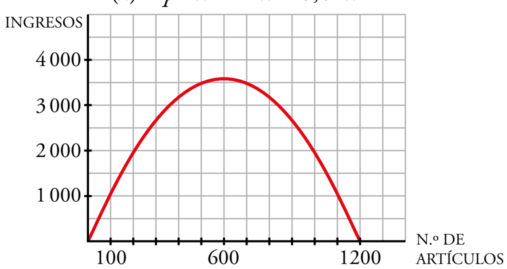
b) Representa la función *número de artículos-ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\rightarrow$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).

8 **[Este problema es una oportunidad para trabajar la dimensión social (comunidad y comunicación) de esta clave].**

La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuáles son su dominio y su recorrido.

a) En el 5.º día la dosis alcanza los 20 mg y este ya es el primero de los 15 días de tratamiento con la dosis máxima. Por tanto, el 19.º día es el último que toma 20 mg.

La expresión es $f(x) = \begin{cases} 10+2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 20 \\ 100-4x & \text{si } 20 < x \end{cases}$

b) El dominio es el intervalo [0, 24].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

9 ODS **Meta 11.c.** **[Tras visionar el vídeo de la meta se puede proponer un debate sobre la conveniencia o no de que la población se concentre en grandes ciudades].**

Para estudiar el crecimiento poblacional de una ciudad se requiere una función del tipo $P(t) = P_0\, e^{kt}$. Al iniciarse el estudio, la ciudad tenía 50 000 habitantes y 10 años después, 74 590 habitantes.

a) Determina la función.

b) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a los 100 000 habitantes?

a) Consideramos t en años.

$P(0) = P_0 e^{k0} = 50\,000 \to P_0 = 50\,000$

$P(10) = 50\,000e^{10k} = 74\,590 \to \dfrac{74\,590}{50\,000} = e^{10k}$

Aplicamos el logaritmo neperiano:

$k = \dfrac{1}{10}\, ln\left(\dfrac{7\,459}{5\,000}\right) = 0{,}04$

Por tanto:

$P(t) = 50\,000e^{0{,}04t}$

b) $P(t) = 50\,000e^{0{,}04t} = 100\,000 \to e^{0{,}04t} = 2 \to t = \dfrac{ln(2)}{0{,}04} = 17{,}32$ años