Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

3 ÁLGEBRA

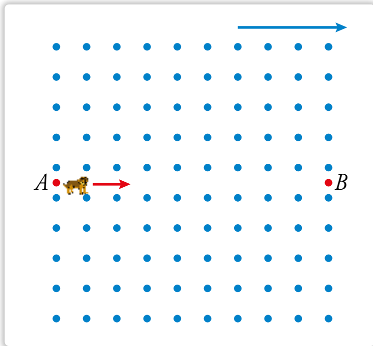
C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 1.3.** (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) **CE 1.5.** (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) **CE 1.6.** (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.-EA 1.6.3.-EA 1.6.5.)

Página 81

Resuelve

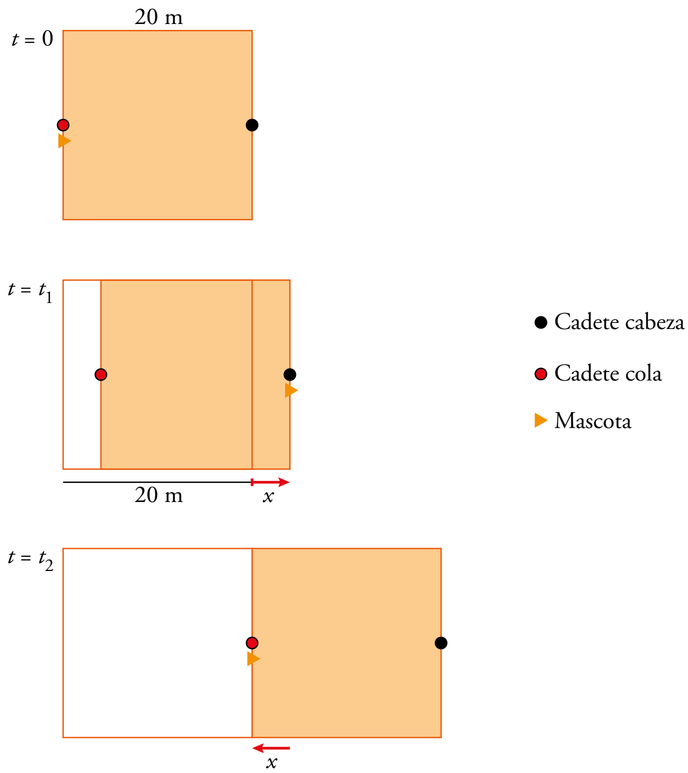
Los cadetes que desfilan con su mascota

Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 metros de lado, avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño perro, parte del centro de la última fila, punto *A*, camina en línea recta hasta el centro de la fila de cabeza, punto *B*, y regresa del mismo modo hasta el centro de la última fila. En el momento de volver a alcanzar *A*, los cadetes han recorrido exactamente 20 metros.



Suponiendo que el perro camina con velocidad constante y que no pierde tiempo en los giros, ¿cuántos metros ha recorrido?

Representamos esquemáticamente el movimiento de la mascota y de los cadetes:



Llamamos x al espacio que recorre el soldado de cabeza hasta que la mascota lo alcanza, y usaremos la fórmula $tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$.

El tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el soldado de cabeza, t_1, es el mismo que el que tarda el soldado de cabeza en recorrer los x metros.

Llamamos $v_{mascota}$ a la velocidad de la mascota y v_{cadete} a la velocidad de los cadetes.

La ventaja del cadete de cabeza es de 20 m.

t_1 = tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el cadete de cabeza

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}}$$

t_1 = tiempo que tarda el cadete de cabeza en recorrer los x metros

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadete}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}} = \frac{x}{v_{cadete}}$$

El espacio recorrido por la mascota cuando avanza con los cadetes es $20 + x$. El espacio recorrido por la mascota al volver es x, puesto que al final se queda a 20 m del principio. Luego el espacio total recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x$.

El tiempo total durante el cual avanza la compañía, t_2, es el mismo que el tiempo que está la mascota corriendo.

t_2 = tiempo total durante el cual avanza la compañía

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadete}}$$

t_2 = tiempo total durante el cual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadete}} \to \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operamos en la igualdad I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadete}) = 20 \cdot v_{cadete} \to x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadete} + xv_{cadete} \to$$

$$\to x \cdot v_{mascota} = v_{cadete}(20 + x) \to$$

$$\to v_{mascota} = v_{cadete}\frac{(20 + x)}{x} \to \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hemos obtenido la razón entre las dos velocidades. Usamos esta relación en la igualdad II y obtenemos:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \to 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \to \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operamos y obtenemos:

$$2x^2 = 400 \to x^2 = 200 \to x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

El espacio recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 LAS IGUALDADES EN ÁLGEBRA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 82

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La igualdad $x = 3$ es una ecuación porque solo se cumple para $x = 3$.

b) La igualdad $x^2 + 4 = 0$ no es ni ecuación ni identidad, ya que no se cumple para ningún valor de x.

a) Verdadero, pues no es cierta la igualdad para todos los números reales.

b) Falso. Es una ecuación sin soluciones.

2 POLINOMIOS. FACTORIZACIÓN

C.E.: CE1.2. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 84

1 **Comprobamos. [La descomposición factorial propuesta por el enunciado es una buena ocasión para que el alumnado trabaje esta técnica].**

Descompón factorialmente estos polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3 (x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -9 & 24 & -20 \\
2 & & 2 & -14 & 20 \\
\hline
 & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -10 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)^2 (x - 5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\
1 & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & 3 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -3 & -2 & -8 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & 4 & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no tiene solución)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x - 1) (x + 1) (x - 4) (x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\
-1 & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\
\hline
 & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} & & \\
1 & & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x^2 + 1 = 0 \to x^2 = -1$ (no tiene solución)

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x + 3)^2 (x + 1) (x - 1) (x^2 + 1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\
2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\
\hline
 & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -4 & -4 & 3 & \\
\hline
 & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

2 **a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$
\begin{array}{rl}
x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 & \underline{|\ x^2 + x + 1} \\
\underline{-x^4 - x^3 - x^2 \qquad\qquad} & x^2 + 3x + 4 \\
3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 & \\
\underline{-3x^3 - 3x^2 - 3x \quad} & \\
4x^2 + 4x + 4 & \\
\underline{-4x^2 - 4x - 4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución).

Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3 **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-1/2$ y $1/3$ son raíces suyas y comprueba tus resultados con la calculadora.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\
-1/2 & & -3 & -2 & -2 & 1 \\
\hline
 & 6 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0} \\
1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\
\hline
 & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$$6x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$6(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \text{(no tiene solución)}$$

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6(x^2 + x + 1) = (2x+1)(3x-1)(x^2 + x + 1)$$

3 FRACCIONES ALGEBRAICAS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.-EA 1.3.3.)

Página 86

1 ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$ d) $\frac{x+1}{x} - 1 = \frac{1}{x}$

a) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, luego es falso.

b) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x-1)(x+1) = x^2-1$, luego es verdadero.

c) La primera fracción es el triple de $\frac{x-1}{x^2-1}$, y la segunda es el triple de $\frac{1}{x+1}$ que son las fracciones del apartado anterior, luego es verdadero.

d) Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Obtenemos el miembro de la derecha, luego es verdadero.

2 Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2+x = x(x+1) \\ x+1 = x+1 \end{array}\right\} \text{ mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

3 **Efectúa.**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$ **b)** $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1} = \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}+\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1} =$$
$$= \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}+\frac{2x(x-1)}{(x-1)\,(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)\,(x+1)} =$$
$$= \frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1} = \frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

b) $$\frac{x}{x+1}+5x = \frac{x+5x(x+1)}{x+1} = \frac{x(5x+6)}{x+1} = \frac{5x^2+6x}{x+1}$$

4 **Efectúa estas operaciones:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$ **b)** $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5} = \frac{(x^2-2x+3)\,(2x+3)}{(x-2)\,(x+5)} = \frac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$$

b) $$\frac{x^2-2x+3}{x-2}:\frac{2x+3}{x+5} = \frac{(x^2-2x+3)\,(x+5)}{(2x+3)\,(x-2)} = \frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$$

5 **Calcula.**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$ **b)** $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $$\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{x+2}{x}:\frac{x(x-1)}{3(2x+1)} = \frac{3(2x+1)\,(x+2)}{x^2\,(x-1)}$$

b) $$\frac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^4+x^2}{x^4} = \frac{(x^4-x^2)\,(x^4+x^2)}{(x^2+1)\,x^4} = \frac{x^2\,(x^2-1)\cdot x^2\,(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4} = \frac{x^4\,(x^2+1)\,(x^2-1)}{(x^2+1)\,x^4} = x^2-1$$

4 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.4) **CE 2.3.** (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 87

Hazlo tú

1 **Resuelve esta ecuación:**

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 2y + 1 = 0 \to y = 1 \to x = \pm\sqrt{1}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

Piensa y practica

1 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$ $\begin{cases} 4 \to x = \pm 2 \\ -3 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2}$ $\begin{cases} 9 \to x = \pm 3 \\ -1 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

2 **Resuelve:**

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2}$ $\begin{cases} -1 \to \text{(no vale)} \\ -9 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

No tiene solución.

b) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x^2 = -1 \to \text{(no vale)} \\ x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$

Página 88

Hazlo tú

1 **Resuelve:**

a) $\sqrt{19 - 6x} - 2 = x$ **b)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5$

a) $\sqrt{19-6x} - 2 = x \to \sqrt{19-6x} = x + 2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$19 - 6x = x^2 + 4x + 4 \to x^2 + 10x - 15 = 0 \to x_1 = -5 + 2\sqrt{10},\ x_2 = -5 - 2\sqrt{10}$ (no vale)

Solución: $x = -5 + 2\sqrt{10}$

b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5 \to \sqrt{x-2} = 5 - \sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = x - 10\sqrt{x-3} + 22 \to 10\sqrt{x-3} = 24 \to x - 3 = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 \to x = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 + 3 = \dfrac{219}{25}$, que es válida.

Solución: $x = \dfrac{219}{25}$

Piensa y practica

3 Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$ **b)** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$

c) $2+\sqrt{x}=x$ **d)** $2-\sqrt{x}=x$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{2x+1}+1=\sqrt{3x}$

a) $1-x=\sqrt{2x-3}$

$1+x^2-2x=2x-3$

$x^2-4x+4=0;\ \ x=2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x-3=16+x+7+8\sqrt{x+7}$

$x-26=8\sqrt{x+7}$

$x^2+676-52x=64(x+7)$

$x^2+676-52x=64x+448$

$x^2-116x+228=0$

$$x=\frac{116\pm 12}{2}=\begin{cases}114\\ 2\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$$

$x=114$

c) $\sqrt{x}=x-2;\ \ x=x^2+4-4x;\ \ 0=x^2-5x+4$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\ 1\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$$

$x=4$

d) $2-x=\sqrt{x};\ \ 4+x^2-4x=x;\ \ x^2-5x+4=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\ \to\ \text{(no vale)}\\ 1\end{cases}$$

$x=1$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$

$3x+3=1+8-2x+2\sqrt{8-2x}$

$5x-6=2\sqrt{8-2x}$

$25x^2+36-60x=4(8-2x)$

$25x^2-52x+4=0$

$$x=\frac{52\pm 48}{50}=\begin{cases}2\\ 0{,}08\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$$

Así, $x=2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$16(3x+27)=4x^2-120x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0\ \to\ x=39,\ x=3$

Comprobación:

$x=39\ \to\ \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39}\ \to\ 14+2\neq 12\ \to$ (no vale)

$x=3\ \to\ \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3}\ \to\ 4+2=6$

4 Resuelve:

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ **b)** $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$ **d)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$ **f)** $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$

$\sqrt{4x+9} = 2 + \sqrt{2x+1}$

$4x+9 = 4 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x+1}$

$x+2 = 2\sqrt{2x+1}$

$x^2 + 4 + 4x = 4(2x+1)$

$x^2 - 4x = 0;\ \ x(x-4) = 0$

$x_1 = 0,\ \ x_2 = 4$

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

$\sqrt{3x+4} = \sqrt{1-x} + 1$

$3x + 4 = 1 - x + 1 + 2\sqrt{1-x}$

$2\sqrt{1-x} = 4x + 2$

$4(1-x) = 16x^2 + 16x + 4$

$4x^2 + 5x = 0 \ \to\ x_1 = 0,\ \ x_2 = \dfrac{-5}{4}$ (no vale)

$x = 0$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$

$\sqrt{x+3} = x - 3$

$x + 3 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \ \to\ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 6$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

$\sqrt{x-2} = -\sqrt{x+1} + 3$

$x - 2 = (x+1) + 9 - 6\sqrt{x+1}$

$6\sqrt{x+1} = 12$

$36(x+1) = 144$

$x = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$3x = x + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x}$

$x - 1 = \sqrt{2}\sqrt{x}$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \ \to\ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 2 + \sqrt{3}$

f) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$-5-7x+4+x+2\sqrt{-5-7x}\,\sqrt{4+x} = 7-6x$

$\sqrt{(-5-7x)(4+x)} = 4$

$7x^2 + 33x + 36 = 0$

$x = \dfrac{-33 \pm 9}{14} = \begin{cases} x = -\dfrac{12}{7} \\ x = -3 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{-12}{7}$, $x_2 = -3$

Página 89

Hazlo tú

1 Resuelve esta ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{3}$$

$3(x-2) + 3x = 4x(x-2)$

$2x^2 - 7x + 3 = 0;\ x = \dfrac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

Las dos soluciones son válidas.

Piensa y practica

5 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$ **b)** $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$ **c)** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

a) $10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \dfrac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \dfrac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \dfrac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \dfrac{-2}{3}$

6 **Resuelve:**

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$ **b)** $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{26}{35}$

a) $x(x+1)+2x(x-1)=3(x^2-1)$

$x^2+x+2x^2-2x=3x^2-3$

$x=3$

b) $10(x+3)+2x(x+2)=3(x^2+5x+6)$

$10x+30+2x^2+4x=3x^2+15x+18$

$0=x^2+x-12$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

$x_1=3;\ x_2=-4$

c) $35(x+3)\,(x+1)-35(x^2+1)=26\,(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3)-35(x^2+1)=26(x^2-1)$

$35x^2+140x+105-35x^2-35=26x^2-26$

$26x^2-140x-96=0$

$x=\dfrac{70\pm\sqrt{70^2-4\cdot 13\cdot(-48)}}{26}=\dfrac{70\pm 86}{26}=\begin{cases}6\\-8/13\end{cases}$

$x_1=6;\ x_2=\dfrac{-8}{13}$

Página 90

Hazlo tú

1 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}$ **b)** $7^{x^2+2x-15}=1$ **c)** $3^x+3^{x-1}=36$

a) $5^{6-x^2}=\dfrac{1}{125}\ \to\ 5^{6-x^2}=5^{-3}\ \to\ 6-x^2=-3\ \to\ x^2=9\ \to\ x_1=3,\ x_2=-3$

b) $7^{x^2+2x-15}=1\ \to\ 7^{x^2+2x-15}=7^0\ \to\ x^2+2x-15=0\ \to\ x_1=3,\ x_2=-5$

c) $3^x+3^{x-1}=36$

Hacemos el cambio de variable $3^x=y$. Nos queda:

$y+\dfrac{y}{3}=36\ \to\ y=27\ \to\ 3^x=27\ \to\ x=3$

Piensa y practica

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$ **c)** $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x+2}}=186$ **d)** $7^{x+2}=5\,764\,801$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2}\ \to\ 3x=-3x-2\ \to\ 6x=-2\ \to\ x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2}=3^{-2}\ \to\ 4-x^2=-2\ \to\ x^2=6\ \to\ x=\pm\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=186\ \to\ 2^{2x-2-x-2}=186\ \to\ 2^{x-4}=186\ \to$

$\to\ log\,2^{x-4}=log\,186\ \to\ (x-4)\,log\,2=log\,186\ \to\ x=4+\dfrac{log\,186}{log\,2}=11{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8\ \to\ x=6$

8 **Resuelve:**

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

c) $\dfrac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3\,125$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6}$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30 \;\rightarrow\; 3^x(10) = 30 \;\rightarrow\; 3^x = 3 \;\rightarrow\; x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \dfrac{5^x}{5} = \dfrac{31}{5} \;\rightarrow\; 5^x \cdot \dfrac{31}{5} = \dfrac{31}{5} \;\rightarrow\; x = 0$

c) $\dfrac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125 \;\rightarrow\; \dfrac{5^{x^2+1}}{5^{2(x+2)}} = 5^5 \;\rightarrow\; 5^{x^2+1-2(x+2)} = 5^5 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + 1 - 2(x-2) = 5 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 8 = 0 \;\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6} \;\rightarrow\; 5^{2x} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-6} \;\rightarrow\; 5^{2x} = 5^{-(4x-6)} \;\rightarrow\; 2x = -(4x-6) \;\rightarrow\; 6x = 6 \;\rightarrow\; x = 1$

Página 91

Hazlo tú

1 **Resuelve:**

a) $\log x - \log 4 = 2$

b) $3 \log_5 (x-1) = \log_5 125$

c) $2 \ln x = \ln (2x+3)$

Recuerda: ***ln*** **es logaritmo neperiano o logaritmo en base** ***e*** **y** ***log*** **es logaritmo decimal o logaritmo en base 10.**

a) $\log x - \log 4 = 2 \;\rightarrow\; \log\left(\dfrac{x}{4}\right) = \log 10^2 \;\rightarrow\; \dfrac{x}{4} = 100 \;\rightarrow\; x = 400$

b) $3\log_5 (x-1) = \log_5 125 \;\rightarrow\; 3\log_5 (x-1) = 3\log_5 5 \;\rightarrow\; x - 1 = 5 \;\rightarrow\; x = 6$

c) $2\ln x = \ln(2x+3) \;\rightarrow\; \ln x^2 = \ln(2x+3) \;\rightarrow\; x^2 = 2x + 3 \;\rightarrow\; x_1 = 3,\; x_2 = -1$ (no válida)

Solución: $x = 3$

Piensa y practica

9 **¿Verdadero o falso?**

a) **Al resolver una ecuación con algún radical cuadrático siempre aparece alguna raíz falsa.**

b) **4 y –4 son soluciones de la ecuación** $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4$.

c) **4 y –4 son soluciones de la ecuación** $\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = 2$.

a) Falso, hemos resuelto ecuaciones de este tipo en las que todas las soluciones eran válidas.

Ejemplo: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ en la página 89.

b) Verdadero, si sustituimos x por 4 o por -4 obtenemos una igualdad.

c) Falso, solo es solución $x = 4$. Al sustituir x por -4 no sale una igualdad.

10 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ **d)** $x^4 - 18x^2 = 0$

a) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \rightarrow y = 4,\ y = -3$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 - 8y - 9 = 0 \rightarrow y = 9,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 + 10y + 9 = 0 \rightarrow y = -1,\ y = -9$

Soluciones: No hay.

d) Hacemos $x^2 = y \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y = 2,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

11 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-5}{x}$ **b)** $\dfrac{3+x}{x-1} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{-x}{x+1} + \dfrac{2x+1}{2x} + \dfrac{1}{x^2-1} = 0$ **d)** $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x+2}{x+1}$

a) $x(3x-2) - 4 = x(2x-5) \rightarrow 3x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 5x \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -4$

b) $(3+x)(x+1) + 5(x-1) = x - 2 \rightarrow 3x + 3 + x^2 + x + 5x - 5 = x - 2 \rightarrow x^2 + 8x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -8$

c) $2x(-x)(x-1) + (2x+1)(x^2-1) + 2x = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $x^2 - (x+1) = x(3x+2) \rightarrow x^2 - x - 1 = 3x^2 + 2x \rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2}, x_2 = -1$ (no válida)

12 Resuelve.

a) $\sqrt{3x-2} + x = 2$ **b)** $\sqrt{7+x} - \sqrt{19+x} = -2$

c) $6 - \sqrt{x} = x$ **d)** $\sqrt{x+3} - 7 = \sqrt{3x-2}$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$ **f)** $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

a) $\sqrt{3x-2} = 2 - x$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$3x - 2 = 4 + x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 6$$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_2 = 6$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 1$

b) $\sqrt{7+x} - \sqrt{19+x} = -2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$7 + x + 19 + x - 2\sqrt{7+x}\,\sqrt{19+x} = 4 \rightarrow x + 11 = \sqrt{7+x}\,\sqrt{19+x}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$x^2 + 121 + 22x = (7+x)(19+x) = 133 + 26x + x^2 \rightarrow -4x = 12 \rightarrow x = -3$$

Si comprobamos la solución, observamos que es válida.

Solución: $x = -3$

c) $6-x=\sqrt{x} \;\rightarrow\; 36+x^2-12x=x \;\rightarrow\; x^2-13x+36=0 \;\rightarrow\; x_1=9,\; x_2=4$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_1 = 9$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 4$

d) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x+3+49-14\sqrt{x+3}=3x-2 \;\rightarrow\; -2x+54=14\sqrt{x+3}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$4x^2+2916-216=196(x+3)\,4x^2-196x+2\,658=0 \;\rightarrow\; 2x^2-98+1\,329=0$$

Vemos que no tiene solución ya que nos queda un número negativo dentro de la raíz:

$$x=\frac{98\pm\sqrt{-1\,028}}{4}$$

e) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$3x+x-2-2\sqrt{3x}\sqrt{x-2}=x+1 \;\rightarrow\; 3x-3=2\sqrt{3x}\sqrt{x-2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros otra vez:

$$9x^2-9=4\cdot 3x\cdot(x-2) \;\rightarrow\; x^2-2x-3=0 \;\rightarrow\; x_1=3,\; x_2=-1$$

Comprobamos y vemos que solamente existe una solución ya que $x_2 = -1$ no cumple la ecuación inicial.

Solución: $x = 3$

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$16(3x+27)=4x^2-120\,x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \;\rightarrow\; x=39,\; x=3$

Comprobación:

$x = 39 \;\rightarrow\; \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \;\rightarrow\; 14+2\neq 12 \;\rightarrow\;$ (no vale)

$x = 3 \;\rightarrow\; \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \;\rightarrow\; 4+2=6$

13 **Resuelve.**

a) $2^{x^2-4x}=\dfrac{1}{16}$ **b)** $5^{x^2-1}=7$

c) $3^{x+2}-3^x=72$ **d)** $7^{x^2-x-2}=1$

a) $2^{x^2-4x}=2^{-4} \;\rightarrow\; x^2-4x+4=0 \;\rightarrow\; x=2$

b) Aplicamos logaritmos a ambos lados de la igualdad y operamos:

$(x^2-1)\,log\,5=log\,7 \;\rightarrow\; x^2=\dfrac{log\,7}{log\,5}+1 \;\rightarrow\; x=\pm 1{,}4863$

c) Sacamos factor común: $3^x(3^2-1)=72 \;\rightarrow\; 3^x=\dfrac{72}{8}=9=3^2 \;\rightarrow\; x=2$

d) Sabemos que $1 = 7^0$

Por tanto:

$7^{x^2-x-2}=7^0 \;\rightarrow\; x^2-x-2=0 \;\rightarrow\; x_1=-1,\; x_2=2$

14 Comprobamos. **[La resolución de las ecuaciones propuestas es una buena ocasión para trabajar esta técnica].**

Resuelve las ecuaciones siguientes.

a) $\boldsymbol{log\,(x+4) + log\,(x+1) = 1}$ **b)** $\boldsymbol{log_3\,x + log_3\,(x-2) = 3\,log_3\,(x-2)}$

c) $\boldsymbol{2\,log\,x - log\,(x+6) = 3\,log\,2}$ **d)** $\boldsymbol{4\,log_2\,(x^2+1) = log_2\,625}$

a) Aplicamos la propiedad de la suma de logaritmos:

$log[(x+4)(x+1)] = 1 \to (x+4)(x+1) = 10^1 \to x^2+5x+4-10=0 \to x^2+5x-6=0 \to$

$$\to x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \to x_1 = 1,\ x_2 = -6$$

b) $log_3 x + log_3(x-2) = 3\,log_3(x-2) \to log_3 x = 2\,log_3(x-2) \to log_3 x = log_3(x-2)^2 \to$

$\to x = (x-2)^2 \to x = x^2-4x+4 \to x^2-5x+4=0 \to x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \to$

$\to x_1 = 4,\ x_2 = 1$ donde descartamos la solución $x = 1$ ya que no existe el logaritmo de un número negativo $(log(x-2) = log(-1))$.

Solución: $x = 4$

c) $log\,\dfrac{x^2}{x+6} = log\,8$

$x^2 = 8x + 48;\ x^2 - 8x - 48 = 0;\ x = \dfrac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4 \to \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 12$

d) $log_2(x^2+1)^4 = log_2\,5^4;\ x^2+1 = 5;\ x^2 = 4;\ x = \pm 2$

$x_1 = 2;\ x_2 = -2$

5 ▶ RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 93

1 **[La justificación de si las afirmaciones son verdaderas o falsas permite trabajar la destreza expresion oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) El sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ **tiene dos soluciones:** $x=4$, $y=1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene solo dos soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1]$ **y** $[x_2=-2,\ y_2=-1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene cuatro soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1]$; $[x_2=2,\ y_2=-1]$

$[x_3=-2,\ y_3=1]$; $[x_4=-2,\ y_4=-1]$

a) Falso, $x=4$ e $y=1$ no son dos soluciones, sino una solución para cada incógnita, luego son una solución del sistema.

b) Falso, como las dos incógnitas están al cuadrado, también son soluciones $x_3=-2$, $y_3=1$ y $x_4=2$, $y_4=-1$.

c) Verdadero, por el razonamiento del apartado anterior.

2 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2-7=y+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{xy} \\ xy=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2y+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2-x^2=16 \\ \sqrt{5-4y}-x=-(x+y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=x^2-9 \end{array}\right\}$

$x^2-9=2x-1;\ x^2-2x-8=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1=4;\ y_1=7$

$x_2=-2;\ y_2=-5$

b) $\left.\begin{array}{l} y+x=xy-1 \\ xy=6 \end{array}\right\}$

$y=5-x$

$x(5-x)=6;\ 5x-x^2=6;\ x^2-5x+6=0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

$x_1=2;\ y_1=3$

$x_2=3;\ y_2=2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y-1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \rightarrow x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \left\langle \begin{array}{l} y = 1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ y = -5 \end{array} \right.$

$25 - x^2 = 16 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

3 Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{array} \right.$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} \log \dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \left\langle \begin{array}{l} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{array} \right.$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ log\, \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + log\,10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,10\,(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 10\,(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;\ \ y\,(y - 4) = 0;\ \ y = 4,\ \ y = 0$

$y = 4$ no es válida porque aparecería $log\,(-2)$ en la primera ecuación.

$x = 10;\ \ y = 0$

6 ▶ MÉTODO DE GAUSS PARA SISTEMAS LINEALES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) **CE 1.12.** (EA 1.12.4.) **CE 2.3.** (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 94

1 Reconoce como escalonados y resuelve.

a) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$

2 **Resuelve los siguientes sistemas escalonados:**

a) $\begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + \quad\;\; = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{5 + z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 0 + 10 - 3 = 15 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{3} = 3 \\ y = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$

Página 95

3 **Resuelve por el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{5} = 4 \\ y = \dfrac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$

4 Resuelve.

a) $\left\{\begin{aligned} 5x - 4y + 3z &= 9 \\ 2x + \ \ y - 2z &= 1 \\ 4x + 3y + 4z &= 1 \end{aligned}\right.$ b) $\left\{\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -1 \\ 4x - 5y + 4z &= 3 \\ 5x \qquad - 3z &= 13 \end{aligned}\right.$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $$\left.\begin{aligned} 5x - 4y + 3z &= 9 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ 4x + 3y + 4z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) + 4 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{aligned} 13x \qquad - 5z &= 13 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ -2x \qquad + 10z &= -2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot (1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 2 \end{array} \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 24x \qquad\quad &= 24 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ -x \qquad + 5z &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & x = 1 \\ & z = \frac{-1 + x}{5} = 0 \\ & y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned} a \\ a \\ a \end{aligned}}\right\} \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -1 \\ 4x - 5y + 4z &= 3 \\ 5x \qquad - 3z &= 13 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -1 \\ 2x \qquad\qquad &= 4 \\ 5x \qquad - 3z &= 13 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} & x = 2 \\ & z = \frac{5x - 13}{3} = -1 \\ & y = \frac{2x + 4z + 1}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= \frac{1}{5} \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Página 96

5 Intenta resolver por el método de Gauss.

a) $\left\{\begin{aligned} x + \ \ y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - \ \ y \qquad &= 0 \end{aligned}\right.$ b) $\left\{\begin{aligned} x + \ \ y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - \ \ y \qquad &= 1 \end{aligned}\right.$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y \qquad &= 1 \\ 2x - y \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y \qquad &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y \qquad &= 1 \\ 2x - y \qquad &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y \qquad &= 1 \\ 0 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y, z en función de x:

(2.ª) $\rightarrow$ $y = 2x - 1$

(1.ª) $\rightarrow$ $z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Soluciones: $\left\{\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ z &= -3x - 1 \end{aligned}\right.$

Para cada valor de x, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $x = 0$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -1 \\ z &= -1 \end{aligned}\right.$ Para $x = -2$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= -5 \\ z &= 5 \end{aligned}\right.$

6 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = 3 \\ \boldsymbol{2x - y + 4z = 8} \\ \boldsymbol{x + y - z = 2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = 3 \\ \boldsymbol{2x - y + 4z = 8} \\ \boldsymbol{x + y - z = 1} \end{cases}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(3.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 10 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación es absurda. No puede ser 0 = 1. Por tanto, el sistema no tiene solución.

b) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(3.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación no dice nada. No es una ecuación. Por tanto, solo quedan dos ecuaciones, la 1.ª y la 3.ª.

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z:

$$\begin{cases} x + z = 3 \rightarrow x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \rightarrow y = 1 - x + z = 1(3 - z) + z = -2 + 2z \end{cases}$$

Soluciones: $\begin{cases} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{cases}$

Para cada valor que le demos a z, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $z = 0 \rightarrow x = 3,\ y = -2$.

Para $z = 4 \rightarrow x = -1,\ y = 6$.

7 INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) **CE 2.3.** (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 97

1 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $3x - 2 \le 10$

b) $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \ge 6$

d) $3x + 1 \le 15$

a) $3x - 2 \le 10 \rightarrow 3x \le 12 \rightarrow x \le 4$

Soluciones: $\{x \mid x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x \mid x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \rightarrow 2x \ge 1 \rightarrow x \ge \frac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \ge \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \rightarrow 3x \le 14 \rightarrow x \le \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \le \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 2 \le 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \ge 6 \\ 3x + 1 \le 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones:* $\{x \mid 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le \frac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones:* $\left\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

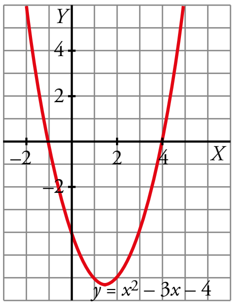
Página 98

3 Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c) $x^2 + 7 < 0$ **d)** $x^2 - 4 \leq 0$

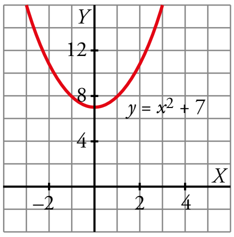
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

c)



$x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

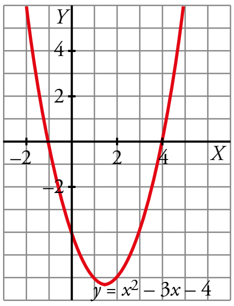
d) $x^2 - 4 \leq 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4 Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a)



$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{array}\right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son lon puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

8 INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.) **CE 2.3.** (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 99

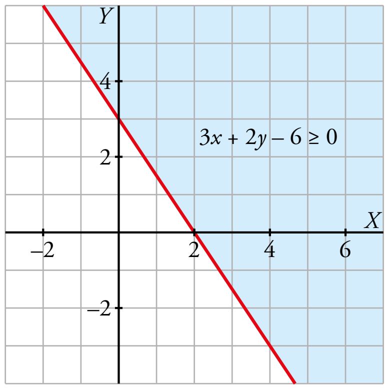
1 Resuelve.

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibujamos la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

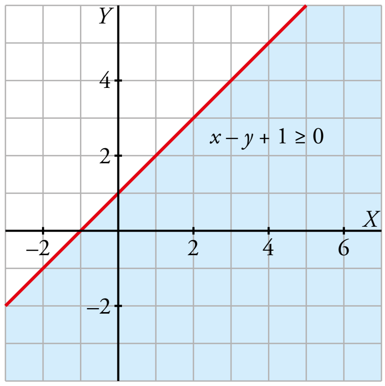
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.



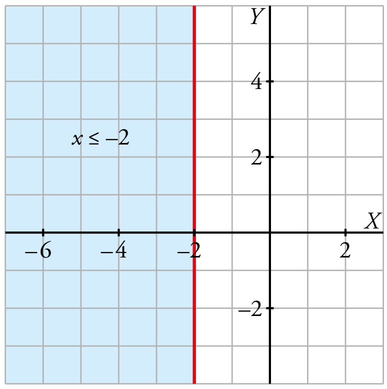
2 Resuelve.

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibujamos la recta $r: x = -2$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 2 \leq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

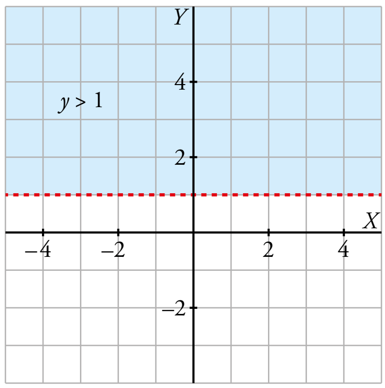


b) Dibujamos la recta $r: y = 1$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 \geq 1$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

La recta $y = 1$ no pertenece al conjunto de soluciones.



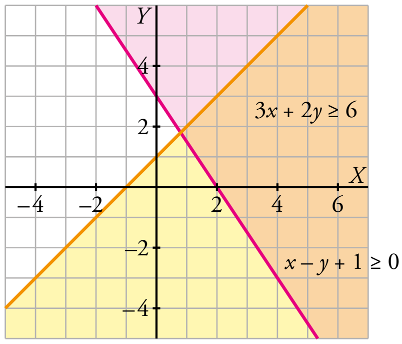
Página 100

3 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

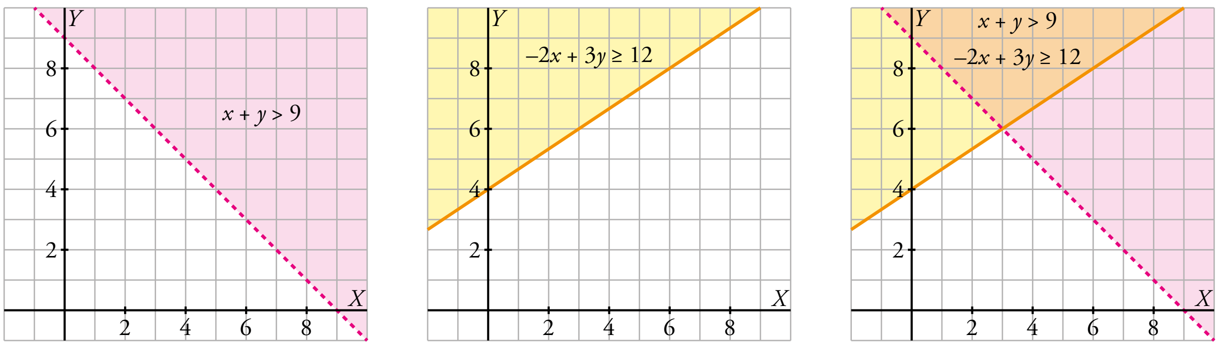
a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y > 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y < 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y < 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y > -3 \\ x + y > 11 \\ x \leq 2 \end{cases}$

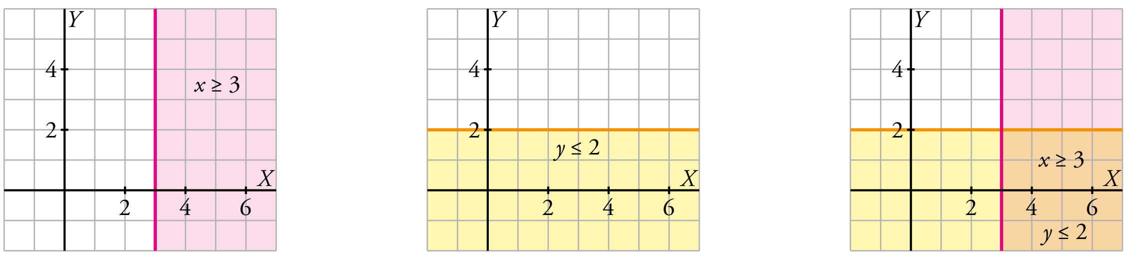
a) Ambas inecuaciones han sido resueltas en el ejercicio 1 anterior. El recinto solución del sistema es la intersección de los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones. Es decir, es el recinto de color marrón.



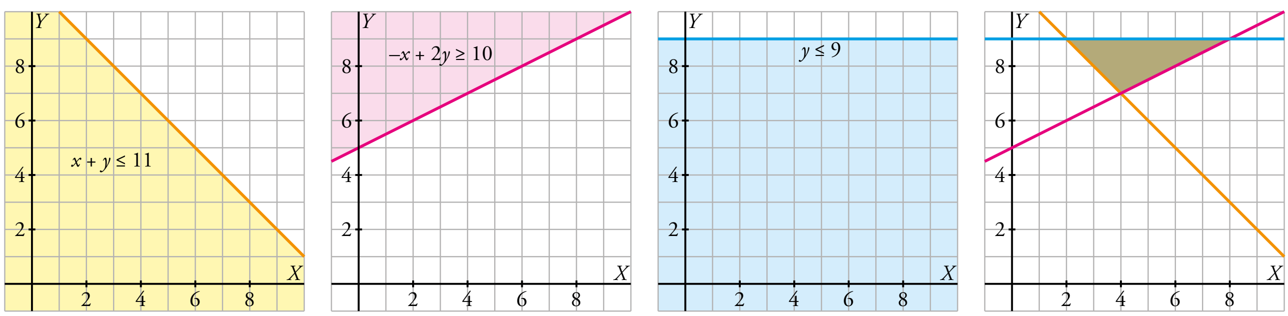
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.



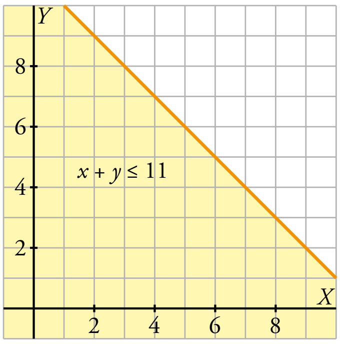
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

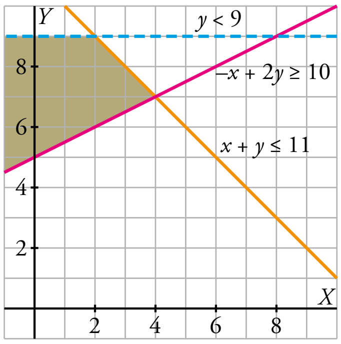


d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los semiplanos. La solución es el triángulo de intersección.

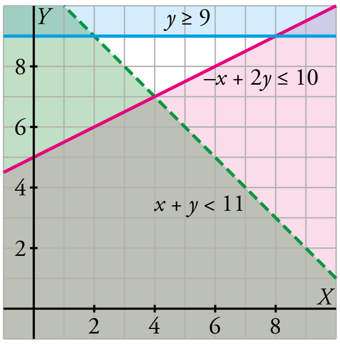


e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. Los semiplanos de la segunda y tercera inecuaciones coinciden con los del apartado d). Representamos el semiplano de la primera inecuación. La solución es la región común a los recintos.

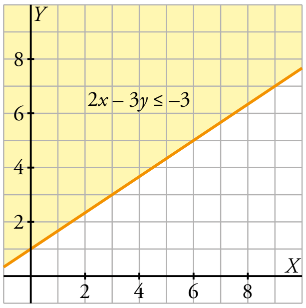


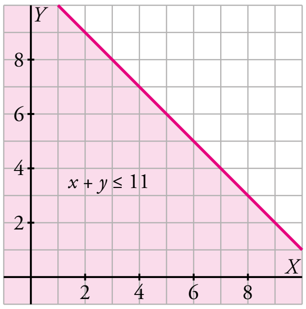


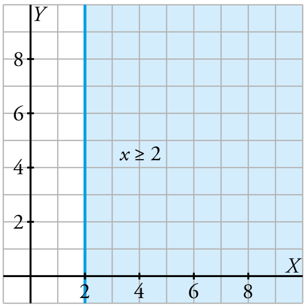
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.

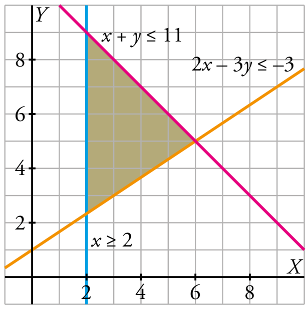


g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. La solución es el triángulo común a los semiplanos.

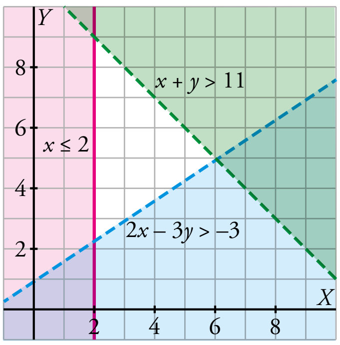








h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.)

Página 101

1. Ecuaciones polinómicas de grado tres o superior

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

$$\mathbf{12x^4 + 14x^3 - 2x = 0}$$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común $2x$:

$$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$$

Buscamos ahora las raíces enteras del nuevo polinomio entre los divisores del término independiente y factorizamos.

	6	7	0	–1
–1		–6	–1	1
	6	1	–1	0

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$$

Como no hay más raíces enteras, para descomponer el polinomio de segundo grado resolvemos la ecuación asociada y como el coeficiente principal es 6, nos queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Ecuaciones con valores absolutos

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $|x^2 - 2| = 2$

b) $|3x + 1| = |2x + 4|$

a) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado a).

$x^2 - 2 = 2 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \rightarrow x_3 = 0$

b) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado b).

$3x + 1 = 2x + 4 \rightarrow x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \rightarrow x_2 = -1$

Página 102

3. Inecuaciones con fracciones algebraicas con una incógnita

Hazlo tú

- **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\dfrac{x-1}{x} \le 0$ **b)** $\dfrac{x-1}{x} \le x$

a) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

$x-1=0 \rightarrow x_1=1;\ x_2=0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	–	–	+
x	–	+	+
$\dfrac{x-1}{x}$	+	–	+

La solución es el intervalo (0, 1]. Añadimos $x = 1$ porque anula la fracción.

b) No podemos multiplicar por x porque no sabemos si cambiaría el signo de la desigualdad, por lo que agrupamos todos los términos a un lado de la desigualdad:

$$\frac{x-1}{x}-x\le 0 \rightarrow \frac{x-1-x^2}{x}\le 0 \rightarrow \frac{x^2-x+1}{x}\ge 0$$

Para que se cumpla la desigualdad, el signo del numerador y del denominador debe ser el mismo, y, además, $x \ne 0$.

Como x^2-x+1 es siempre positivo, su denominador deberá ser positivo, por lo tanto, debe ser $x>0$.

Solución: $(0, +\infty)$

4. Ecuaciones del tipo $ax^{2n}+bx^n+c=0$

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $x^6-26x^3-27=0$

b) $x^{10}+31x^5-32=0$

a) Realizamos el cambio de variable $y = x^3$:

$$y^2-26y-27=0 \rightarrow y=\frac{26\pm\sqrt{26^2+4\cdot 27}}{2}$$

$$y=\frac{26\pm\sqrt{784}}{2}=\frac{26\pm 28}{2} \rightarrow y_1=27;\ y_2=-1$$

Si $y=1 \rightarrow x^3=-1 \rightarrow x_1=-1$

Si $y=27 \rightarrow x^3=27 \rightarrow x_2=3$

b) Realizamos el cambio de variable $y = x^5$:

$$y^2+31y-32=0 \rightarrow y=\frac{31\pm\sqrt{31^2+4\cdot 32}}{2}$$

$$y=\frac{-31\pm 33}{2} \rightarrow y_1=-32;\ y_2=1$$

Si $y=1 \rightarrow x^5=1 \rightarrow x_1=1$

Si $y=-32 \rightarrow x^5=-32 \rightarrow x_2=-2$

Página 103

5. Ecuaciones exponenciales

Hazlo tú

- **Resuelve las ecuaciones:**

a) $3^{x^2+1} = 9^x$

b) $2^{x+1} = 5$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

a) $3^{x^2+1} = 9^x \rightarrow 3^{x^2+1} = 3^{2x} \rightarrow x^2 + 1 = 2x \rightarrow x = 1$

b) $2^{x+1} = 5 \rightarrow x + 1 = \log_2 5 \rightarrow x = \log_2 5 - 1 = 1{,}3219$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$.

$y^2 - 3y + y + 2 = 0 \rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0$, que no tiene solución.

6. Ecuaciones logarítmicas

Hazlo tú

- **Resuelve las ecuaciones:**

a) $\ln (2x) = 1$

b) $\log_x 16 = 2$

c) $\log 3 + \log x = \log 15 - \log 5$

a) $\ln (2x) = 1 \rightarrow \ln (2x) = \ln e \rightarrow 2x = e \rightarrow x = \frac{e}{2}$

b) $\log_x 16 = 2 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

Como la base de un logaritmo no puede ser negativa, la solución es $x = 4$.

c) $\log 3 + \log x = \log 15 - \log 5 \rightarrow \log 3x = \log 75 \rightarrow 3x = 75 \rightarrow x = 25$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 104

1. Resolución de un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

- **Un peregrino que recorre el Camino de Santiago avanza a una velocidad de 3,5 km/h. Se da cuenta de que, a ese paso, llegará 1 hora más tarde de lo previsto al albergue.**

  Entonces, acelera el paso y recorre el resto del camino a 5 km/h, llegando media hora antes del tiempo fijado.

  ¿Qué distancia le faltaba por recorrer ese día hasta el albergue?

  x → distancia que falta por recorrer

  t → tiempo que tardaría si va a 3,5 km/h

  $$\left.\begin{array}{l} x = 3,5t \\ x = 5(t-1,5) \end{array}\right\} \to t = 5,\ x = 17,5$$

  Le faltan 17,5 km por recorrer.

2. Resolución de un problema mediante un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

- **Un corredor sube las cuestas a 8 km/h, las baja a 16 km/h y marcha en llano a 11,5 km/h.**

  En su última maratón tardó 3 horas y media, y si el recorrido hubiese sido en sentido inverso, su tiempo habría sido de 4 horas y cuarto. Sabiendo que una maratón tiene un recorrido de 42 km, ¿cuál fue la longitud del recorrido llano en esta maratón?

  x → tramos de subida en la maratón original

  y → parte llana en la maratón original

  z → tramos de bajada en la maratón original

  $$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{11,5} + \dfrac{z}{16} = 3,5 \\ \dfrac{x}{16} + \dfrac{y}{11,5} + \dfrac{z}{8} = 4,25 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 42 \\ 23x + 16y + 11,5z = 644 \\ 11,5x + 16y + 23z = 782 \end{cases} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \to$$

  $$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ 23x + 16y + 11,5z = 644 \\ -11,5x + 11,5z = 138 \end{cases} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)\ /\ 11,5 \end{array} \to \begin{cases} x + y + z = 42 \\ 23x + 16y + 11,5z = 644 \\ -x + z = 12 \end{cases} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 16 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to$$

  $$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ 7x - 4,5z = -28 \\ -x + z = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 42 \\ 2,5z = 56 \\ -x + z = 12 \end{cases} \begin{array}{l} (2.^a) \\ (3.^a) \\ (1.^a) \end{array} \to \begin{cases} z = 22,4 \\ x = 10,4 \\ y = 9,2 \end{cases}$$

  Hay 9,2 km de recorrido llano.

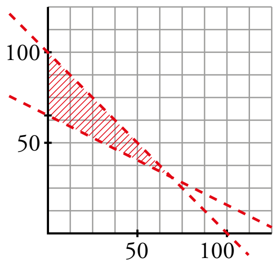
3. Resolución de un problema mediante un sistema de inecuaciones

- **A una exposición asisten menos de 100 personas y se recaudan más de 260 € con entradas de 2 € y de 4 €. ¿Cuántas entradas de cada tipo han podido ser vendidas?**

$x \rightarrow$ número de entradas vendidas de 2 €

$y \rightarrow$ número de entradas vendidas de 4 €

$$\begin{cases} x + y < 100 \\ 2x + 4y > 260 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Cualquier punto de coordenadas enteras del recinto intersección es una solución. Los puntos de las rectas $x + y = 100$ y $2x + 4y = 260$ no forman parte de la solución.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (E.A. todos los tratados en la unidad)

Página 105

Para practicar

Factorización

1 **[Este tipo de trabajo con parámetros requiere que el alumnado trabaje la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

Averigua el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2x + m$ tenga como factor $x - 4$.

Buscamos las raíces enteras del polinomio, de manera que sea factor, o lo que es lo mismo, que 4 sea solución del polinomio:

	2	–9	2	m
4		8	–4	–8
	2	–1	–2	0

Para que 4 sea solución se tendrá que cumplir que $m - 8 = 0 \rightarrow m = 8$

2 **Factoriza cada polinomio y señala sus raíces.**

a) $2x^2 - 8x - 10$

b) $4x^2 - 9$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

d) $x^4 + x^2 - 20$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$

g) $x^5 - 16x$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x$

a) $2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x - 5)(x + 1)$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$ Raíces: $x_1 = 5,\ x_2 = -1$

b) $4x^2 - 9 = 4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$ Raíces: $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{3}{2}$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x^2 - 5) = (x + 1)\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$ Raíces: $x_1 = -1,\ x_2 = \sqrt{5},\ x_3 = -\sqrt{5}$

d) $x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5)$ Raíces: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3\,(x + 3)(x - 1)(x - 2)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (3x + 2)(2x - 1)(x + 1)$ Raíces: $x_1 = -\frac{2}{3};\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -1$

g) $x^5 - 16x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x = 2x(x - 1)(x + 3)(x - 3)$ Raíces: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

3 **Factoriza estos polinomios y encuentra sus raíces:**

a) $9x^4 - x^2$ **b)** $4x^2 - 28x + 49$

c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ **d)** $2x^3 - x^2 - x$

e) $x^4 - 13x^2 + 36$ **f)** $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $9x^4 - x^2 = x^2(9x^2 - 1) = x^2(3x - 1)(3x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = \frac{1}{3},\ x = -\frac{1}{3}$

b) $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$

Raíz: $x = \frac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & x + 3 \\ x^2 + 6x + 9 & x + 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

Raíz: $x = -3$

d)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - x & x \\ 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \\ 1 & \end{array}$$

$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(2x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 13x^2 + 36 & x - 2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ x^2 - 9 & x - 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$

Raíces: $x = 2,\ x = -2,\ x = 3,\ x = -3$

f) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Es un producto notable. No tiene raíces porque $x^2 + 1$ no se puede descomponer.

4 **Saca factor común y usa las identidades notables para factorizar.**

a) $x^7 - 4x^5$ **b)** $9x^4 - 6x^3 + x^2$

c) $2x^3 - 18x$ **d)** $12x^3 + 36x^2 + 27x$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5$ **f)** $6x^9 - 54x$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \frac{1}{4}x$ **h)** $\frac{x^6}{4} - x^4 + x^2$

a) $x^7 - 4x^5 = x^5(x-2)(x+2)$

b) $9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(3x-1)^2$

c) $2x^3 - 18x = 2x(x-3)(x+3)$

d) $12x^3 + 36x^2 + 27x = 3x(2x+3)^2$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5 = 2x^3(2x-7)^2$

f) $6x^9 - 54x = 6x(x^4-3)(x^4+3)$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x(100x^{14} - 60x^7 + 1)$

h) $\frac{x^6}{4} - x^4 + x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2-2)^2$

5 **Descompón los siguientes polinomios:**

a) $x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x$

a)

	1	–4	–10	26	11	30
2		2	–4	–28	–4	–30
	1	–2	–14	–2	–15	0
–3		–3	15	–3	15	
	1	–5	1	–5	0	
5		5	0	5		
	1	0	1	0		

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, por tanto:

$x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30 = (x-2)(x+3)(x-5)(x^2+1)$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

	1	–5	8	–4
1		1	–4	4
	1	–4	4	0

Nos queda por factorizar: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$:

$3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x-1)(x-2)^2$

6 **Halla, en cada uno de estos casos, el máx.c.d. [$A(x)$, $B(x)$] y el mín.c.m. [$A(x)$, $B(x)$]:**

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $B(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$

$A(x) = (x - 3)(x + 4)$

máx. c. d. [$A(x)$, $B(x)$] = $x - 3$

mín. c. m. [$A(x)$, $B(x)$] = $x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$

b) $B(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$A(x)=(x - 1)(x + 1)^2$

máx. c. d. [$A(x)$, $B(x)$] = $(x - 1)(x + 1)$

mín. c. m. [$A(x)$, $B(x)$] = $x(x - 1)(x + 1)^2$

c) $A(x) = x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

$B(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$

máx. c. d. [$A(x)$, $B(x)$] = $(x - 1)(x^2 + 1)$

mín. c. m. [$A(x)$, $B(x)$] =$x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

7 **[A partir de las soluciones, el alumnado debe encontrar el polinomio, trabajando así la innovación (dimensión productiva de esta clave)].**

Escribe un polinomio que tenga como raíces...:

a) **1, 2, –3, –2**

b) **0, –4, –1 (doble)**

a) $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3) = (x - 1)(x + 3)(x^2 - 4) = = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4) =$

$= x^4 - 4x^2 + 2x^3 - 8x - 3x^2 + 12 = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b) $Q(x) = x(x + 1)^2(x + 4) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 4x) = x^4 + 4x^3 + 2x^3 + 8x^2 + x^2 + 4x =$

$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x$

Fracciones algebraicas

8 **Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

9 **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^5 + 3x^4 + 2x^3}$ b) $\dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4}$

c) $\dfrac{-x^3 - 4x^2 + 11x + 30}{x^2 + 2x - 15}$ d) $\dfrac{x^4 - 4x^2}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

a) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^5 + 3x^4 + 2x^3} = \dfrac{x^2 (x-1)(x+1)}{x^3 (x+2)(x+1)} = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4} = \dfrac{(x+2)^3}{(x+2)^2} = x + 2$

c) $\dfrac{-x^3 - 4x^2 + 11x + 30}{x + 2x - 15} = \dfrac{-(x+5)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)} = -x - 2$

d) $\dfrac{x^4 - 4x^2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \dfrac{x^2 (x-2)(x+2)}{x(x+2)^2} = x\dfrac{x-2}{x+2}$

10 **Reduce al mínimo común denominador y realiza las siguientes operaciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3} + \dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2x-3}{x-1} + 3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)^2 - 3(x-1) + (x-2)}{x^2-1} = \dfrac{x^2 + 2x + 1 - 3x + 3 + x - 2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3} + \dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6} = \dfrac{(1-x)(x-2) + 2x(x+3) - (x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)} =$

$= \dfrac{-x^2 + 3x - 2 + 2x^2 + 6x - x^2 - 5x + 10}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{4x+8}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2x-3}{x-1} + 3 = \dfrac{x^2(x-1) - (2x-3)(x+1)^2 + 3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$

$= \dfrac{x^3 - x^2 - (2x-3)(x^2+2x+1) + 3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$

$= \dfrac{x^3 - x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3x^2 + 6x + 3 + 3x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 6x + 3x - 3}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{2x^3 + x^2 + x}{(x+1)^2(x-1)}$

11 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{x} : \dfrac{x-3}{x}$ b) $\dfrac{x+1}{3} \cdot \dfrac{15}{x^2-1}$ c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^2$ d) $\dfrac{x-2}{x} : \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\dfrac{3}{x} : \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{3x}{x(x-3)} = \dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x+1}{3} \cdot \dfrac{15}{x^2-1} = \dfrac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \dfrac{5}{x-1}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^3 = \dfrac{x^6}{36} \cdot \dfrac{27}{x^3} = \dfrac{27x^6}{36x^3} = \dfrac{3x^3}{4}$

d) $\dfrac{x-2}{x} : \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{-1} = \dfrac{x}{x-2}$

12 Opera y simplifica.

a) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right):\dfrac{x}{x+1}$

b) $\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right):\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)$

c) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$

d) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$

e) $\left(\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-2}\right):\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right):\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-2x}{x^2-1}:\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-x+1}{x^2-1}:\dfrac{x}{x+1}=$

$$=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}:\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{x+1}:\frac{x}{x+1}=\frac{-(x+1)}{x(x+1)}=\frac{-1}{x}$$

b) $\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right):\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)=\left[\dfrac{x-1}{x}:\dfrac{x+1}{x}\right]:(x^2-1)=\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}:(x^2-1)=$

$$=\frac{x-1}{x+1}:(x^2-1)=\frac{x-1}{(x+1)(x^2-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

c) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{x-1-x-1}{x^2-1}:\dfrac{x+1+x-1}{x^2-1}=\dfrac{-2}{x^2-1}:\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)}=\dfrac{-1}{x}$

d) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right](x-1)=\left[\dfrac{x^2+1}{x}:\dfrac{x^2-1}{x}\right](x-1)=\dfrac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)}\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

e) $\left(\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-2}\right):\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{x^2-4x+4-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{x-2+x+3}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{2x-5}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{2x-5}{(x-3)(x-2)}=1$

Ecuaciones polinómicas

13 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(3x+1)(2x-3)-(x-3)(6x+4)=9x$

b) $\dfrac{x^2-1}{4}-\dfrac{2}{3}(x+1)=\dfrac{(2x-3)^2-(13x-5)}{16}$

c) $\dfrac{1}{6}[(13-2x)-2(x-3)^2]=-\dfrac{1}{3}(x+1)^2$

d) $\dfrac{x^2-1}{3}+(x-2)^2=\dfrac{x^2+2}{2}$

e) $0{,}5(x-1)^2-0{,}25(x+1)^2=4-x$

f) $(0{,}5x-1)(0{,}5x+1)=(x+1)^2-9$

a) $6x^2-9x+2x-3-6x^2-4x+18x+12=9x$

$2x=9$

$x=\dfrac{9}{2}$

b) $\dfrac{x^2-1}{4}-\dfrac{(2x+2)}{3}=\dfrac{4x^2+9-12x-13x+5}{16}$

$12x^2-12-32x-32=12x^2+27-36x-39x+15$

$-44-32x=42-75x$

$43x=86$

$x=2$

c) $\frac{1}{6}(13-2x-2x^2-18+12x)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$\frac{1}{6}(-2x^2+10x-5)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-\frac{2x^2}{6}+\frac{10x}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-2x^2+10x-5=-2x^2-2-4x$

$14x=3$

$x=\frac{3}{14}$

d) $2x^2-2+6x^2+24-24x=3x^2+6$

$5x^2-24x+16=0$

$x=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{10}$

$x=\frac{24\pm 16}{10}$ $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=4/5 \end{cases}$

e) $\frac{1}{2}(x^2+1-2x)-\frac{1}{4}(x^2+1+2x)=4-x$

$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-x-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}=4-x$

$2x^2+2-4x-x^2-1-2x=16-4x$

$x^2-2x-15=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}$ $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

f) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)=x^2+1+2x-9$

$\frac{x^2}{4}-1=x^2+1+2x-9$

$x^2-4=4x^2+4+8x-36$

$0=3x^2+8x-28$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6}$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-14/3 \end{cases}$

14 **Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:**

a) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

b) $\frac{x^2-2x+5}{2}-\frac{x^2+3x}{4}=\frac{x^2-4x+15}{6}$

c) $\frac{3x+1}{3}-\frac{5x^2+3}{2}=\frac{x^2-1}{2}-\frac{x+2}{3}$

d) $\frac{3x^2-1}{4}+\frac{1}{2}\left[x^2-2-\frac{1}{2}x\right]=\frac{x^2-5}{4}$

a) $x^2+1+2x-x^2-4+4x=x^2+9+6x+x^2-20$

$6x-3=2x^2+6x-11$

$8=2x^2$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x(x-13) = 0 \; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 13 \end{cases}$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x$

$2x(9x-4) = 0 \; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$

d) $\dfrac{3x^2-1}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^2-5}{4}$

$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$

$4x^2 - x = 0$

$x(4x-1) = 0 \; \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \to x_2 = 1/4 \end{cases}$

Página 106

15 **Resuelve estas ecuaciones (una de ellas no tiene solución y otra tiene infinitas):**

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x+2)^2$

c) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

d) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2}$

a) $x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x = x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$

$0 = 0$

Tiene infinitas soluciones.

b) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{(x^2+1-2x)}{4} = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{x^2}{4} - 4 - 2x$

$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = 25x - 5x^2 - 80 - 40x$

$29x = -87$

$x = -\dfrac{87}{29}$

$x = -3$

c) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$

$9 = 0$

No tiene solución.

d) $4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$

$x = \dfrac{58}{24} = \dfrac{29}{12}$

16 **Resuelve las siguientes ecuaciones expresando previamente los decimales en forma de fracción:**

a) $0,\overset{\frown}{3}x^2 - x - 1,\overset{\frown}{3} = 0$

b) $0,\overset{\frown}{1}x^2 - 1 = 0$

c) $0,\overset{\frown}{1}x^2 - 0,\overset{\frown}{5}x = 0$

d) $0,\overset{\frown}{1}x^2 - 1,\overset{\frown}{7} = x - 4$

a) $\frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \left\langle \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{matrix} \right.$

b) $\frac{1}{9}x^2 - 1 = 0 \left\langle \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \right.$

c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{9}x = 0 \left\langle \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right.$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{9} = x - 4 \left\langle \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \end{matrix} \right.$

17 **Resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$

e) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$

f) $x^4 - 4x^2 = 0$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

h) $9x^4 - x^2 = 0$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \left\langle \begin{matrix} z = 4 \left\langle \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{matrix} \right. \\ z = 1 \left\langle \begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right.$$

b) $x^2 = z$

$z^2 + 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \left\langle \begin{matrix} z = -4 \text{ (no vale)} \\ z = 1 \left\langle \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right.$$

c) $x^2 = z$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \left\langle \begin{matrix} z = -2 \text{ (no vale)} \\ z = -1 \text{ (no vale)} \end{matrix} \right. \text{(no tiene solución)}$$

d) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 36 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 144}}{2} \text{ (no tiene solución)}$$

e) $x^2 = z$

$9z^2 - 46z + 5 = 0$

$$z = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 180}}{18} \left\langle \begin{matrix} z = \frac{90}{18} = 5 \left\langle \begin{matrix} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \end{matrix} \right. \\ z = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \left\langle \begin{matrix} x_3 = 1/3 \\ x_4 = -1/3 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right.$$

f) $x^2(x^2-4)=0 \rightarrow x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2$

g) $4x^4-17x^2+4=0$

$z=x^2$

$4z^2-17z+4=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}\begin{cases} z=4 \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2\end{cases} \\ z=\dfrac{1}{4} \begin{cases} x_3=1/2 \\ x_4=-1/2\end{cases}\end{cases}$$

h) $9x^4-x^2=0$

$x^2(9x^2-1)=0 \rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=-\frac{1}{3}$

18 **Resuelve estas ecuaciones del tipo $ax^{2n}+bx^n+c=0$ haciendo el cambio de variable $y=x^n$:**

a) $x^6+16x^3+64=0$ **b)** $8x^6-7x^3-1=0$

c) $x^8-82x^4+81=0$ **d)** $x^8+x^4-2=0$

* ***Mira el ejercicio resuelto 4 de la página 102.***

a) $x^6+16x^3+64=0$

Hacemos el cambio $x^3=y$.

$y^2+16y+64=0 \rightarrow y=-8$

$x=\sqrt[3]{-8}=-2$

Solución: $x=-2$

b) $8x^6-7x^3-1=0$

Hacemos el cambio $x^3=y$.

$8y^2-7y-1=0 \rightarrow y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{8}$

Soluciones: $x_1=\sqrt[3]{1}=1,\ x_2=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$

c) $x^8-82x^4+81=0$

Hacemos el cambio $x^4=y$.

$y^2-82y+81=0 \rightarrow y_1=81,\ y_2=1$

$x=\pm\sqrt[4]{81},\ x=\pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=1,\ x_4=-1$

d) $x^8+x^4-2=0$

Hacemos el cambio $x^4=y$.

$y^2+y-2=0 \rightarrow y_1=1,\ y_2=-2$

$x=\pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1=1,\ x_2=-1$

19 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$ **b)** $16x^5 - 8x^3 + x = 0$

c) $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$ **d)** $x^3 - 49x = 0$

e) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$ **f)** $x^6 + 3x^2 = 0$

a)

	6	7	0	–1
–1		–6	–1	1
	6	1	–1	0

Por tanto, $x_1 = -1$.

Queda por resolver $6x^2 + x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$$

Las soluciones son $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$.

b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0 \rightarrow x(16x^4 - 8x^2 + 1) = 0$

Por tanto, $x = 0$ es solución de la ecuación. Resolvemos ahora la ecuación bicuadrada, $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

Hacemos el cambio $y = x^2$:

$$16y^2 - 8y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ (es solución doble)}$$

$$\rightarrow x = \pm\frac{1}{2},\ x = \pm -\frac{1}{2} \text{ (ambas son soluciones dobles)}$$

Las soluciones de la ecuación son, por tanto $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{2},\ x_5 = -\frac{1}{2}$.

c)

	1	6	–7	–60
3		3	27	60
	1	9	20	0

Por tanto, $x_1 = 3$.

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{-9 \pm 1}{2} \rightarrow x_2 = -5;\ x_3 = -4$$

Las soluciones son $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = -4$.

d) $x^3 - 49x = x(x^2 - 49) = x(x - 7)(x + 7) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 7,\ x_3 = -7$

e)

	1	9	15	–25
1		1	10	25
	1	10	25	0

Por tanto, $x_1 = 1$.

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{-10}{2} \rightarrow x = -5 \text{ (raíz doble)}$$

Las soluciones son $x_1 = 1,\ x_2 = -5,\ x_3 = -5$.

f) $x^6 - 3x^2 = 0 = x^2(x^4 - 3) \rightarrow x_1 = 0$

$x^4 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$

$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[4]{3},\ x_3 = -\sqrt[4]{3}$ (soluciones dobles)

20 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x - 6)^5 = 0$

b) $4x^2(x + 1)^2 (x - 2) = 0$

c) $(x + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 5) = 0$

a) $(3x - 6)^5 = 0 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$

b) $4x^2 (x + 1)^2 (x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

c) $(x + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \\ x^2 + 5 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$

Solución: $x = -2$

21 **Resuelve las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que todas sus soluciones son enteras:**

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

b) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

c) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$

d) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0$

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x + 2)(x + 1) = 0$

Soluciones: $x_1 = -3,\ x_2 = -2,\ x_3 = -1$

b) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 4)(x + 2) = 0$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = -2$

c) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2)(x - 1)^2 = 0$

Soluciones: $x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$

d) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1)(x - 2)^2 = 0$

Soluciones: $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

22 **Descompón en factores y resuelve:**

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^3 - 9x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 5x^2 + 4x = 1$

f) $-x^3 + 13x = 12$

g) $x^3 - 5x^2 + 7x = 3$

h) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

a) $x(x - 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

b) $x^2(x - 1)^2 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$

c) $x(x - 3)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$

d) $(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -3$

e) $2(x - 1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 1/2$

f) $-(x + 4)(x - 1)(x - 3) = 0$

$x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$

g) $(x - 1)^2(x - 3) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

h) $(x - 2)(x + 2)^2 = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Ecuaciones con radicales

23 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{5x+6} = 3 + 2x$ b) $x + \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{2-5x} + x\sqrt{3} = 0$ d) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$

e) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$ f) $x - \sqrt{7-3x} = 1$

g) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$ h) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$4x^2 + 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \quad \begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \begin{cases} x = 2 \ \text{(no vale)} \\ x = -3 \end{cases}$$

c) $2 - 5x = \left(-x\sqrt{3}\right)^2$

$2 - 5x = x^2 \cdot 3$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

d) $\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{2x}\right)^2$

$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$\left(8\sqrt{2x}\right)^2 = (-3x + 22)^2$

$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$

$128x = 9x^2 + 484 - 132x$

$0 = 9x^2 - 260x + 484$

$$x = \frac{260 \pm \sqrt{67\,600 - 17\,424}}{18} \quad \begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$$

e) $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (4 - 2x)^2$

$3x + 4 = 16 + 4x^2 - 16x$

$4x^2 - 19x + 12 = 0$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} \quad \begin{cases} x = 4 \ \text{(no vale)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$$

f) $(x-1)^2 = \left(\sqrt{7-3x}\right)^2$

$x^2 + 1 - 2x = 7 - 3x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \begin{cases} x = -3 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$$

g) $\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1$

h) $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = \left(\sqrt{3-x}\right)^2$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -1$

24 Resuelve.

a) $\dfrac{\sqrt{10+x}}{3} - \dfrac{\sqrt{1-3x}}{2} = 0$

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} + \dfrac{x}{4} = x - 1$

a) $2\sqrt{10+x} = 3\sqrt{1-3x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(10 + x) = 9(1 - 3x) \ \to\ x = -1,$ solución válida.

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} - \dfrac{x}{4} = x - 1 \ \to\ 2\sqrt{x^2+5} = 3x + 12(x-1) \ \to\ 2\sqrt{x^2+5} = 15x - 12$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(x^2 + 5) = (15x - 12)^2 \ \to\ 4x^2 + 20 = 225x^2 - 360x + 144 \ \to\ 221x^2 - 360x + 124 = 0 \ \to$

$\to\ x_1 = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (válida), $x_2 = \dfrac{180 - 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (no válida)

Solución: $x = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$

25 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$(\sqrt{3x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2$

$3x = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$

$2\sqrt{2}\sqrt{x} = 2x - 2$

$(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2 = (2x - 2)^2$

$8x = 4x^2 - 8x + 4 \ \to\ x = \sqrt{3} + 2,\ x = 2 - \sqrt{3}$ no es válida.

Solución: $x = \sqrt{3} + 2$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$(\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x})^2 = (\sqrt{7-6x})^2 \ \to\ 2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} - 6x - 1 = 7 - 6x$

$2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} = 8 \ \to\ (\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4})^2 = 4^2 \ \to\ -7x^2 - 33x - 20 = 16$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{12}{7},\ x_2 = -3.$ Las dos son válidas.

26 **Resuelve aislando el radical y elevando al cubo.**

a) $\sqrt[3]{x^2-28}+3=0$ **b)** $\sqrt[3]{x+1}-2=0$

a) $\sqrt[3]{x^2-28}=-3 \to x^2-28=-27 \to x^2=1 \to x_1=1,\ x_2=-1$

b) $\sqrt[3]{x+1}-2=0 \to \sqrt[3]{x+1}=2 \to x+1=8 \to x=7$

Ecuaciones racionales

27 **Resuelve.**

a) $\frac{x+2}{x}+3x=\frac{5x+6}{2}$ **b)** $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=\frac{x}{3}-1$

c) $\frac{600}{x}+80=\frac{600}{x-2}$ **d)** $\frac{8}{x+6}+\frac{12-x}{x-6}=1$

a) $2x+4+6x^2=5x^2+6x$

$x^2-4x+4=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$

$x=2$

b) $3+6+9=x^2-3x$

$x^2-3x-18=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2} \begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-3 \end{cases}$

c) $600x-1\,200+80x^2-160x=600x$

$80x^2-160x-1\,200=0$

$x^2-2x-15=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm 8}{2} \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

d) $8x-48+12x-x^2+72-6x=x^2-36$

$2x^2-14x-60=0$

$x=\frac{14\pm\sqrt{196+480}}{4} \begin{cases} x_1=(14+26)/4=10 \\ x_2=(14-26)/4=-3 \end{cases}$

28 **Resuelve sin olvidar comprobar las soluciones:**

a) $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2}=0$ **b)** $\frac{x}{x-2}+\frac{2x}{2-x}=-x$

c) $\frac{3x-7}{x}=\frac{8x}{x+1}-5$ **d)** $\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}=x+2$

e) $\frac{x+7}{x+1}-\frac{7x+1}{x^2+2x+1}=x-4$ **f)** $\frac{30}{x^2+5x+6}-\frac{x}{x+2}=\frac{2x+1}{x+3}$

a) $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2}=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$\frac{2x-1}{x^2}=0 \to 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0$$

$x = \frac{1}{2}$ es válida.

b) $\frac{x}{x-2} + \frac{2x}{2-x} = -x$

$\frac{x}{x-2} + \frac{2x}{2-x} + x = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x - 2)$.

$\frac{x(x-3)}{x-2} = 0 \rightarrow x(x-3) = 0$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Son válidas.

c) $\frac{3x-7}{x} = \frac{8x}{x+1} - 5$

$\frac{3x-7}{x} - \frac{8x}{x+1} + 5 = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x + 1)$.

$\frac{(x-7)}{x(x+1)} = 0 \rightarrow x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$ es válida.

d) $\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+1}{x+3} = x + 2$

$\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+1}{x+3} - x - 2 = 0$

Reducimos a común denominador, simplificamos y multiplicamos por $(x + 3)$.

$\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+1}{x+3} - x - 2 = -\frac{(x+2)^2}{x+3} = 0 \rightarrow x + 2 = 0$

Solución: $x = -2$, es válida.

e) $\frac{x+7}{x+1} - \frac{7x+1}{x^2+2x+1} = x - 4$

$\frac{x+7}{x+1} - \frac{7x+1}{x^2+2x+1} - x + 4 = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x + 1)^2$.

$\frac{-x^3+3x^2+8x+10}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow -x^3 + 3x^2 + 8x + 10 = 0$

Factorizamos: $-x^3 + 3x^2 + 8x + 10 = -(x-5)(2x + x^2 + 2)$

La solución es $x = 5$, que es válida.

f) $\frac{30}{x^2+5x+6} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x+1}{x+3}$

$\frac{30}{x^2+5x+6} - \frac{x}{x+2} - \frac{2x+1}{x+3} = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x^2 + 5x + 6$.

$-\frac{3x^2+8x-28}{x^2+5x+6} = 0 \rightarrow 3x^2 + 8x - 28 = 0$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{14}{3}$. Son válidas.

29 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\frac{10}{3}+\frac{5-x}{x+5}=\frac{x+5}{x-5}$ b) $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$

a) $10x^2-250+15x-3x^2-75+15x=3x^2+15x+15x+75$

$4x^2=400$

$x^2=100 \begin{cases} x_1=10 \\ x_2=-10 \end{cases}$

b) $x(x+3)+2x(x-3)=6$

$x^2+3x+2x^2-6x=6$

$3x^2-3x-6=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{6} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

30 **Resuelve.**

a) $\frac{x}{x+1}=\frac{4}{x+4}$ b) $\frac{3}{x+3}=\frac{x+2}{2-x}$

c) $\frac{2x}{x+2}=\frac{3x+2}{2x}$ d) $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x}{x^2+1}$

a) $x^2+4x=4x+4 \rightarrow x^2=4 \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $6-3x=x^2+3x+2x+6 \rightarrow x^2+8x=0 \rightarrow x(x+8)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-8 \end{cases}$

c) $4x^2=3x^2+2x+6x+4 \rightarrow x^2-8x-4=0 \rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64+16}}{2} \begin{cases} x_1=4+2\sqrt{5} \\ x_2=4-2\sqrt{5} \end{cases}$

d) $x^2(x^2+1)=x(x+1) \rightarrow x^4+x^2-x^2-x=0 \rightarrow x^4-x=0 \rightarrow x(x^3-1)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$

Página 107

Ecuaciones exponenciales

31 **Resuelve expresando ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base:**

a) $3^{x^2+1}=\frac{1}{9}$ b) $\frac{9^{2x}}{3^x}=27$

c) $5\cdot 2^{x+3}=\frac{5}{4}$ d) $5^{x^2+3x}=0,04$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{8}{27}$ f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=81$

g) $(0,01)^x=100$ h) $3^{x+1}\cdot 2^{x+1}=36$

i) $3\cdot 9^x\cdot 27^x=1$ j) $5^{x-5}\cdot 125^{2x}=25$

a) $3^{x^2+1}=\frac{1}{9} \rightarrow 3^{x^2+1}=3^{-2} \rightarrow x^2+1=-2 \rightarrow x^2=-3 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $\frac{9^{2x}}{3^x}=27 \rightarrow \frac{3^{4x}}{3^x}=3^3 \rightarrow 3^{4x-x}=3^3 \rightarrow 3x=3 \rightarrow$ *Solución:* $x=1$

c) $5\cdot 2^{x+3}=\frac{5}{4} \rightarrow 5\cdot 2^{x+3}=5\cdot 2^{-2} \rightarrow x+3=-2 \rightarrow$ *Solución:* $x=-5$

d) $5^{x^2+3x}=0,04 \rightarrow 5^{x^2+3x}=\frac{4}{100}=\frac{1}{25} \rightarrow 5^{x^2+3x}=\frac{1}{25} \rightarrow 5^{x^2+3x}=5^{-2} \rightarrow x^2+3x=-2$

Soluciones: $x_1=-1$, $x_2=-2$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27} \to \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \to$ *Solución:* $x = 3$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81 \to \left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

g) $(0{,}01)^x = 100 \to (0{,}01)^x = 0{,}01^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36 \to 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^2 \to 6^{x+1} = 6^2 \to x + 1 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125 \to \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \to$

$\to \sqrt{2^{3x-1}} = \frac{1}{8} \to 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-3} \to \frac{3x-1}{2} = -3 \to$ *Solución:* $x = -\frac{5}{3}$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5} \to 3\sqrt[3]{3^{3(x-1)}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{2x+5} \to 3^{1+\frac{3(x-1)}{3}} = 3^{-2(2x+5)} \to$

$\to 1 + \frac{3(x-1)}{3} = -2(2x+5) \to x = -2(2x+5) \to$ *Solución:* $x = -2$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1 \to 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^0 \to 3^{1+2x+3x} = 3^0 \to 1 + 5x = 0 \to$ *Solución:* $x = -\frac{1}{5}$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25 \to 5^{x-5} \cdot 5^{3 \cdot 2x} = 5^2 \to 5^{x-5+6x} = 5^2 \to 7x - 5 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

32 Resuelve estas ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $\mathbf{3^{2+x} - 3^x = 72}$

b) $\mathbf{3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21}$

c) $\mathbf{3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}}$

d) $\mathbf{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0}$

a) Hacemos el siguiente cambio de variable: $3^x = y$

$3^2y - y = 72 \to y = 9 = 3^2$

$3^x = 3^2 \to x = 2$

b) $3^x = z;\ z - \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 21 \to z = 27 \to x = 3$

c) $3^x = z;\ z - \frac{1}{z} = \frac{728}{27} \to z^2 - 1 = \frac{728}{27}z \to 27z^2 - 728z - 27 = 0 \to$

$\to z_1 = 27,\ z_2 = -\frac{2}{54}$ (no vale) $\to x = 3$

d) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \to (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $y = 2^x$, con lo que obtenemos:

$$y^2 - 6x + 8 = 0 \to y = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$y = 4 \to 2^x = 4 \to 2^x = 2^2 \to x = 2$

$y = 2 \to 2^x = 2 \to 2^x = 2^1 \to x = 1$

Soluciones: $x_1 = 1;\ x_2 = 2$

33 Resuelve estas ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$

f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

g) $2^{x/2} + 2^x = 6$

h) $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$

a) $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \rightarrow x + \frac{2}{z} = 3;\ z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\ z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1 \\ 1 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

b) $2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{5}{2};\ 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\ 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \frac{(2^x)^3}{2} = \frac{17}{16} \rightarrow 2^x = z \rightarrow 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128 + 8)(z)^3 = 17;\ (z)^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \rightarrow z = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\ 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\ 7^x = \frac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\ x_2 = 1$

g) $2^{x/2} - 3 \cdot 2^x = 6 \rightarrow \sqrt{2^x} - 3 \cdot 2^x = 6$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$\sqrt{y} - 3 \cdot y = 6 \rightarrow \sqrt{y} = 3 \cdot y + 6 \rightarrow (\sqrt{y})^2 = (3y+6)^2 \rightarrow y = 9y^2 + 36y + 36 \rightarrow$

$\rightarrow 9y^2 + 35y + 36 = 0 \rightarrow y = \frac{-35 \pm \sqrt{-71}}{18}$

No tiene solución.

h) $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$

Hacemos el cambio de variable $3^x = y$:

$\sqrt{y^2 + 7} = y + 1 \rightarrow (\sqrt{y^2+7})^2 = (y+1)^2 \rightarrow y^2 + 7 = y^2 + 2y + 1 \rightarrow 7 = 2y + 1 \rightarrow y = 3$

Solución: $x = 1$

34 Halla la solución de las siguientes ecuaciones tomando logaritmos en cada miembro:

a) $7^x = 20$ **b)** $1{,}2^x = 10$

a) $7^x = 20 \rightarrow x = log_7 20$ b) $1{,}2^x = 10 \rightarrow x = log_{1{,}2} 10$

35 Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27$ **b)** $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$ **d)** $\dfrac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3$ **f)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4$

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27 \rightarrow \dfrac{1}{27} = e^x \rightarrow ln\dfrac{1}{27} = ln\, e^x \rightarrow x = ln\dfrac{1}{27} = ln\, 1 - ln\, 27 = 0 - ln\, 27 \rightarrow x \approx -3{,}296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \rightarrow ln\, e^{x-9} = ln\sqrt{73} \rightarrow x - 9 = \dfrac{1}{2} ln\, 73 \rightarrow x = 9 + \dfrac{ln\, 73}{2} \rightarrow x \approx 11{,}145$

c) $6^x = 81 \rightarrow x\, log\, 6 = log\, 81 \rightarrow x = \dfrac{log\, 81}{log\, 6} \approx 2{,}453$

d) $\dfrac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 3 \rightarrow x\, log\dfrac{2}{3} = log\, 3 \rightarrow x = \dfrac{log\, 3}{log\, 2 - log\, 3} \approx -2{,}710$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3 \rightarrow 2^{x+1} \cdot 2^{4(2x+1)} = 3 \rightarrow 2^{9x+5} = 3 \rightarrow log\, 2^{9x+5} = log\, 3 \rightarrow$

$\rightarrow (9x + 5)\, log\, 2 = log\, 3 \rightarrow (9x + 5) = \dfrac{log\, 3}{log\, 2} = 1{,}5850$

Solución: $x = \dfrac{1{,}5850 - 5}{9} = -0{,}3794$

f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4 \rightarrow 5^{-x} \cdot 5^{3x+3} = 4 \rightarrow 5^{2x+3} = 4 \rightarrow log\, 5^{2x+3} = log\, 4 \rightarrow$

$\rightarrow (2x + 3)\, log\, 5 = log\, 4 \rightarrow (2x + 3) = \dfrac{log\, 4}{log\, 5} = 0{,}8613$

Solución: $x = \dfrac{0{,}8613 - 3}{2} = -1{,}0693$

Ecuaciones logarítmicas

36 Resuelve aplicando la definición de logaritmo.

a) $lox_x\, 25 = 2$ **b)** $log\, x = -1$

c) $lox_x\, 27 = 3$ **d)** $lox_2\, x = 3$

a) Como la base tiene que ser positiva, $x = 5$.

b) $log\, x = -1 \rightarrow 10^{-1} = x \rightarrow x = \dfrac{1}{10}$

c) $log_x\, 27 = 3 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x = 3$

d) $log_2\, x = -3 \rightarrow 2^{-3} = x \rightarrow x = \dfrac{1}{8}$

37 Halla la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\boldsymbol{log\,x = log\,9 + log\,2}$ **b)** $\boldsymbol{ln\,x = 2\,ln\,10}$

c) $\boldsymbol{\frac{1}{2} log\,(x + 1) = log\,3}$ **d)** $\boldsymbol{\frac{1}{3} log_2\,x = -3}$

a) $log\,x = log\,9 + log\,2 \to log\,x = log\,(9 \cdot 2) \to x = 18$

b) $ln\,x = 2ln\,10 \to ln\,x = ln\,10^2 \to x = 100$

c) $\frac{1}{2} log\,(x+1) = log\,3 \to log\,\sqrt{(x+1)} = log\,3 \to \sqrt{(x+1)} = 3 \to x+1 = 9 \to x = 8$

d) $\frac{1}{3} log_2\,x = -3 \to log_2 \sqrt[3]{x} = log_2\,2^{-3} \to \sqrt[3]{x} = 2^{-3} \to x = 2^{-9} \to x = \frac{1}{512}$

38 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\boldsymbol{log\,(x^2 + 1) - log\,(x^2 - 1) = log\,\frac{13}{12}}$

b) $\boldsymbol{ln\,(x - 3) + ln\,(x + 1) = ln\,3 + ln\,(x - 1)}$

a) $log\,\frac{x^2+1}{x^2-1} = log\,\frac{13}{12}$

$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13;\ 25 = x^2$

$x_1 = -5;\ x_2 = 5$

b) $ln\,(x^2 - 2x - 3) = ln\,(3x - 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3;\ x^2 - 5x = 0$

$x = 5\ \ (x = 0$ no vale$)$

Sistemas de ecuaciones

39 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\boldsymbol{\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}}$ **b)** $\boldsymbol{\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}}$

c) $\boldsymbol{\begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}}$ **d)** $\boldsymbol{\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}}$

a) $y = 1 - 23x$

$2x - 11 + 253x = -11$

$0 = 255x$

$x = 0,\ \ y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y \to y = 2$

$x = 0,\ \ y = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7 \to 5y = 5 \to y = 1$

$x = -1,\ \ y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x - \ y = 8 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} -2x + 3y = -24 \\ 2x - \ y = 8 \\ \hline 2y = -16 \end{array} \rightarrow y = -8$

$x = 0, \ y = -8$

40 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x \cdot y = 15} \\ \boldsymbol{\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3}} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 2} \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{2} = 15 \rightarrow y^2 = 9 \begin{array}{l} y = 3 \rightarrow x = 5 \\ y = -3 \rightarrow x = -5 \end{array}$

$x_1 = 5, \ y_1 = 3; \ x_2 = -5, \ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2 - 2x}{3} \end{array}\right\}$

$4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2 - 2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0 \rightarrow 5x^2 - 2x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

41 **Resuelve por sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 6} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 20} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{xy = 1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{(x^2 + 1)\,y^2 = 5} \\ \boldsymbol{4x - y = 0} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - y^2 = 5} \\ \boldsymbol{xy = 6} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 6 + y \\ (6 + y)^2 + y^2 = 20 \rightarrow 2y^2 + 12y + 36 = 20 \rightarrow y_1 = -2, \ y_2 = -4 \end{array}$

$\begin{cases} y_1 = -2 \rightarrow x_1 = 4 \\ y_2 = -4 \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 4, \ y_1 = -2; \ x_2 = 2, \ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 - y \\ (2 - y)\,y = 1 \rightarrow 2y - y^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 1 \end{array}$

$x = 1, \ y = 1$

c) $\left.\begin{array}{l} (x^2 + 1)\,y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 4x \\ (x^2 + 1)\,(4x)^2 = 5 \rightarrow 16x^4 + 16x^2 - 5 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}, \ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \rightarrow y_2 = -2 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}, \ y_1 = 2; \ x_2 = -\dfrac{1}{2}, \ y_2 = -2$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \ \to \ \left(\dfrac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \ \to \ -\dfrac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \ \to \ -\dfrac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \ \to \\ xy = 6 \ \to \ x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

$\to \ y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \ \to \ y_1 = 2, \ y_2 = -2$

$y_1 = 2, \ x_1 = 3; \ y_2 = -2, \ x_2 = -3$

42 Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 - 5y^2 = 30} \\ \mathbf{x^2 - 2y^2 = 7} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4}} \\ \mathbf{x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4}} \end{cases}$

a) $\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = \ \ 30 \\ -3x^2 + 6y^2 = -21 \\ \hline y^2 = \ \ \ 9 \end{array} \ \to \ y = \pm 3$

$x^2 = 25 \ \to \ x = \pm 5$

$x_1 = 5, \ y_1 = 3; \ x_2 = -5, \ y_2 = 3; \ x_3 = 5, \ y_3 = -3; \ x_4 = -5, \ y_4 = -3$

b) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4} \\ \hline 2x^2 \qquad\qquad = \dfrac{2}{4} \end{array} \ \to \ x = \pm\dfrac{1}{2}$

- Si $x = \dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{4} + y^2 + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{4}$

$1 + 4y^2 + 2y = 3$

$4y^2 + 2y - 2 = 0$

$2y^2 + y - 1 = 0$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$

- Si $x = -\dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{4} + y^2 - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{4}$

$1 + 4y^2 - 2y = 3$

$4y^2 - 2y - 2 = 0$

$2y^2 - y - 1 = 0$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}, \ y_1 = -1; \ x_2 = \dfrac{1}{2}, \ y_2 = \dfrac{1}{2}; \ x_3 = -\dfrac{1}{2}, \ y_3 = 1; \ x_4 = -\dfrac{1}{2}, \ y_4 = -\dfrac{1}{2}$

43 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 = 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x = y - y^2 \end{array}\right\}$

$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3 \to 2x - 3y = 1 \to x = \dfrac{1+3y}{2}$

$\dfrac{1+9y^2+6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2 \to 1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2 \to$

$\to 13y^2 - 10y - 3 = 0 \to y = \dfrac{10 \pm \sqrt{100+156}}{26} = \dfrac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$

$x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{2}{13},\ y_2 = -\dfrac{3}{13}$

b) $x = \dfrac{28}{y}$

$\left(\dfrac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65 \to 784 + y^4 = 65y^2 \to y^4 - 65y^2 + 784 = 0$

$y^2 = z \to z = \dfrac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \to y = \pm 7 \\ 16 \to y = \pm 4 \end{cases}$

$x_1 = 7,\ y_1 = 4;\ x_2 = -7,\ y_2 = -4;\ x_3 = 4,\ y_3 = 7;\ x_4 = -4,\ y_4 = -7$

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \to x^2 - 5x + 6 = 0 \to x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x^2 & + & y^2 & - & 5x & - & 5y & + & 10 & = & 0 \\ -x^2 & + & y^2 & + & 5x & - & 5y & - & 2 & = & 0 \\ \hline & & 2y^2 & - & & & 10y & + & 8 & = & 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \to y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 3,\ y_1 = 4;\ x_2 = 3,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = 4;\ x_4 = 2,\ y_4 = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\}$

$\dfrac{16y^2}{9} - y^2 = 7 \to 16y^2 - 9y^2 = 63 \to y^2 = 9$

$x_1 = 4,\ y_1 = 3;\ x_2 = -4,\ y_2 = -3$

44 Resuelve.

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y \rightarrow 8y = 24 \rightarrow y = 3$

$x = 4, \ y = 3$

b) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x-6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \ \text{(no vale)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$

$x = 6, \ y = 6$

45 Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \log x + \log y = \log 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + y \\ 2^{1+y} + 2^y = 6 \rightarrow 2 \cdot 2^y + 2^y = 6 \rightarrow 2^y \cdot 3 = 6 \rightarrow 2^y = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2 \end{array}$

$x = 2, \ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 5 - y \\ (5 - y)y = 6 \rightarrow 5y - y^2 = 6 \rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \end{array}$

$y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$x_1 = 2, \ y_1 = 3; \ x_2 = 3, \ y_2 = 2$

46 Resuelve.

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

a) $2 \log x = 2$

$x = 10; \ y = 100$

b) $\begin{array}{l} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ 2\log_2 x - \log_2 y = 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ 6\log_2 x - 3\log_2 y = 9 \\ \hline 7\log_2 x \qquad\quad = 14 \end{array}$

$x = 4, \ y = 2$

Página 108

Método de Gauss

47 Resuelve.

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ y+z=1 \\ 4x-z=7 \end{array}\right.$

a) Como ya sabemos que $x = 1$ sustituimos en la segunda ecuación y tenemos que $y = -1$. Ya podemos sustituir en la primera ecuación x e y para encontrar que $z = 3$.

b)
$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 4x-z=7 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{array} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 2y-z=9 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{array} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 3y+z=1 \\ 5y=10 \end{array}\right.$$

Por tanto: $y = 2$, $z = -5$, $x = \dfrac{1}{2}$

48 Resuelve por el método de Gauss.

a) $\left\{\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ x+2y+z=11 \\ 2x-y+z=8 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 3x+6y-2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y-z=1 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right.$

a)
$$\left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ x+2y+z=11 \\ 2x-y+z=8 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ 2x+y=1 \\ 3x-2y=-2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(2.^a) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-z=-10 \\ 2x+y=1 \\ 7x=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=-1+10=9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=9 \end{array}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 3x+6y-2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 7x=0 \\ 6x-2y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 3x+2z=5 \\ 2x+2z=4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 3x+2z=5 \\ -x=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=1 \\ z=\dfrac{5-3x}{2}=1 \\ y=3-x-z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}$$

d)
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ 3x+3z=36 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a):3 \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x+z=12 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ 2x=18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=9 \\ z=x-6=3 \\ y=18-x-z=6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=9 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}$$

49 Resuelve.

a) $\begin{cases} 3x+2y+z-3=0 \\ x+y=z-5 \\ x=z-2y-3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 7x-3y+z=-11 \\ x-y+1=z \\ 2x+2y=8+z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{cases}$

a)
$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z-3=0 \\ x+y=z-5 \\ x=z-2y-3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=3 \\ x+y-z=-5 \\ x+2y-z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=-5 \\ 3x+2y+z=3 \\ x+2y-z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-3\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x+y-z=-5 \\ -y+4z=18 \\ y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-2 \\ y=2 \\ z=5 \end{array}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 7x-3y+z=-11 \\ x-y+1=z \\ 2x+2y=8+z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 7x-3y+z=-11 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+2y-z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 7x-3y+z=-11 \\ 2x+2y-z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-7\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 4y+8z=-4 \\ 4y+z=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 4y+8z=4 \\ -7z=14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \\ z=-2 \end{array}$$

c)
$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ -6y+5z=27 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+6\cdot(2.^a) \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ 23z=69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=\dfrac{69}{23}=3 \\ y=7-3z=7-9=-2 \\ x=2-y-z=2+2-3=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{array}$$

d)
$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x+y-2z=9 \\ 3x+2z=13 \\ 3x+4z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=9 \\ 3x+2z=13 \\ 2z=-5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=\dfrac{-5}{2} \\ x=\dfrac{13-2z}{3}=6 \\ y=9-x+2z=9-6-5=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=6 \\ y=-2 \\ z=\dfrac{-5}{2} \end{array}$$

50 **Resuelve aplicando el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to$

$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6z = 8 \\ 6x + 18z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) : 6 \end{array} \to$

$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x + 3z = 4/6 \end{array}\right\}$ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias.

El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to (5 - 5z) + y = 2 - 3z \to y = 2z - 3 \\ \to x = 5 - 5z \end{array}$

$x = 5 - 5z, \; y = 2z - 3, \; z = z$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 5 \; (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{5x - 9}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$

$x = 2, \; y = \dfrac{1}{2}, \; z = \dfrac{3}{2}$

e) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{array}\right\}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

f) $\left.\begin{array}{r}-2x+y+z=1\\3x+2y-z=0\\-x+4y+z=2\end{array}\right\}\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}}\left.\begin{array}{r}-2x+y+z=1\\x+3y=1\\x+3y=1\end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y:

$\left.\begin{array}{l}-2x+z=1-y\\x=1-3y\end{array}\right\}\to -2(1-3y)+z=1-y \to z=3-7y$

$x = 1 - 3y,\ z = 3 - 7y$

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

51 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $2x-3<x-1$

b) $\dfrac{3x-2}{2}\le\dfrac{2x+7}{3}$

c) $-3x-2<5-\dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{3x}{5}-x>-2$

a) $x<2$; $(-\infty, 2)$

b) $9x-6\le 4x+14 \to 5x\le 20 \to x\le 4$; $(-\infty, 4]$

c) $-6x-4<10-x \to -14<5x \to x>-\dfrac{14}{5}$; $\left(-\dfrac{14}{5},+\infty\right)$

d) $3x-5x>-10 \to -2x>-10 \to 2x<10 \to x<5$; $(-\infty, 5)$

52 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2+x)>-5x$

b) $\dfrac{x-1}{2}>x-1$

a) $10+5x>-5x$; $10x>-10$; $x>-1$

$(-1, +\infty)$

b) $x-1>2x-2$; $1>x$

$(-\infty, 1)$

53 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases}4x-3<1\\x+6>2\end{cases}$

b) $\begin{cases}3x-2>-7\\5-x<1\end{cases}$

c) $\begin{cases}5-x<-12\\16-2x<3x-3\end{cases}$

d) $\begin{cases}2x-3>0\\5x+1<0\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r}x<1\\x>-4\end{array}\right\}(-4,1)$

b) $\left.\begin{array}{l}x>-\dfrac{5}{3}\\x>4\end{array}\right\}(4,+\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l}x>17\\x>\dfrac{19}{5}\end{array}\right\}(17,+\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l}x>\dfrac{3}{2}\\x<-\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}$ No tiene solución.

54 Resuelve.

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ **b)** $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$ **d)** $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ **f)** $x^2 - 7x + 6 > 0$

a) $-(x+3)(x+1) \geq 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) < 0 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

c) $x(x+3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

d) $-(x-1)(x-5) \leq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0 \rightarrow [1, 6]$

f) $x^2 - 7x + 6 > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

55 Resuelve.

a) $(x+1)x^2(x-3) > 0$ **b)** $x(x^2 + 3) < 0$

a) $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x+1>0\\x-3>0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x>-1\\x>3\end{array}\right\}(3,+\infty)\\\left.\begin{array}{l}x+1<0\\x-3<0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x<-1\\x<3\end{array}\right\}(-\infty,-1)\end{array}\right\}(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$$

b) $(-\infty, 0)$

56 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-2, \infty) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 & \rightarrow \textit{Soluciones: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[1, 4] \cap (-\infty, 3) = [1, 3)$

57 Resuelve.

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \leq 0 \end{cases}$$

* ***La solución son las soluciones comunes de las dos inecuaciones.***

$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 & \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, -1] \cup [6, \infty) \\ -x^2 + 11x - 24 \geq 0 & \rightarrow \textit{Soluciones: } [3, 8] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -1] \cup [6, \infty)) \cap [3, 8] = [6, 8]$

58 Resuelve gráficamente.

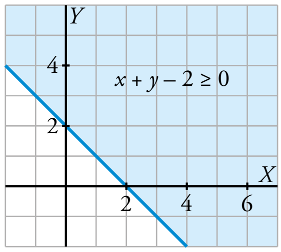
a) $x + y - 2 \geq 0$ **b)** $2x - 3y \leq 6$

c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3$ **d)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1$

a) Dibujamos la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad $0 + 0 - 2 \geq 0$.

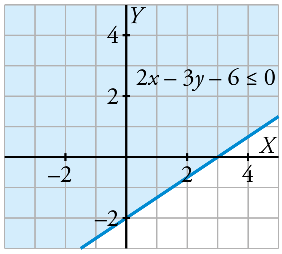
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: 2x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \leq 0$.

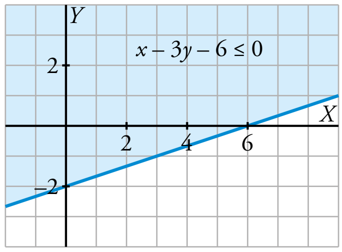
La solución es el semiplano que contiene a O.



c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3 \rightarrow x - 3y - 6 \leq 0$. Dibujamos la recta $r: x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \leq 0$.

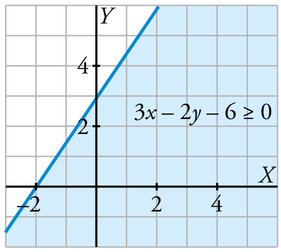
La solución es el semiplano que contiene a O.



d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1 \rightarrow 3x - 2y + 6 \geq 0$. Dibujamos la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.

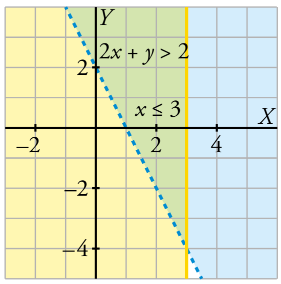


59 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

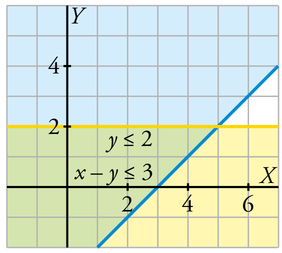
a) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ y \leq x + 1 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x \geq 2 \\ 3x + y \geq 7 \\ 2x - y \geq -7 \end{cases}$

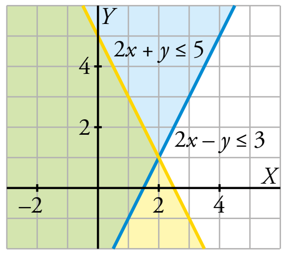
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La recta $2x + y = 2$ no pertenece al recinto solución.



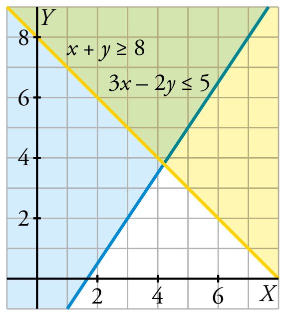
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



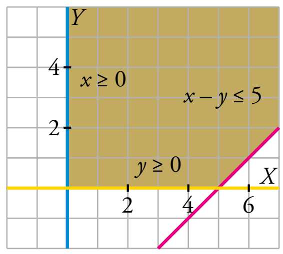
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



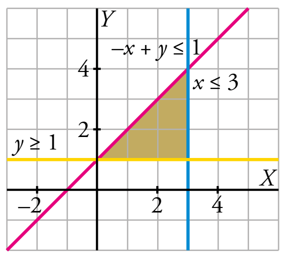
d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



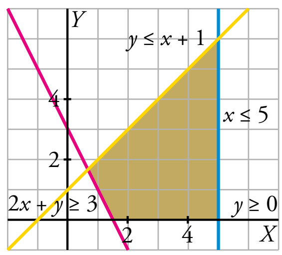
e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



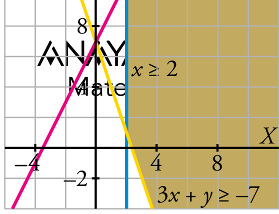
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos.



g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



Para resolver

60 Resuelve estas ecuaciones con valor absoluto.

a) $|x + 1| = 3$ **b)** $|x^2 - 3| = 1$ **c)** $\left|\frac{x+1}{2}\right| = 2$ **d)** $|x + 2| = |3x - 2|$

* ***Fíjate en el ejercicio resuelto 2 de la página 101.***

a) $|x + 1| = 3 \to \begin{cases} x+1=3 \to x=2 \\ x+1=-3 \to x=-4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -4$

b) $|x^2 - 3| = 1 \to \begin{cases} x^2-3=1 \to x_1=2,\ x_2=-2 \\ x^2-3=-1 \to x_3=\sqrt{2},\ x_4=-\sqrt{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

c) $\left|\frac{x+1}{2}\right| = 2 \to \begin{cases} \frac{x+1}{2}=2 \to x=3 \\ \frac{x+1}{2}=-2 \to x=-5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -5$

d) $|x + 2| = |3x - 2| \to \begin{cases} x+2=3x-2 \to x=2 \\ x+2=-(3x-2) \to x=0 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = 0$

61 Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x-1);\ Q(x) = x^2(x-1)$

62 Inventa ecuaciones que tengan por soluciones estos valores:

a) $3,\ -3,\ \sqrt{7}$ **y** $-\sqrt{7}$ **b)** 5; 0,3 **y** –2

c) $0,\ \frac{1}{2}$ **y** 0,7 **d)** $0,\ 1,\ -1$ **y** $\frac{1}{3}$

a) $(x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = (x^2-9)(x^2-7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x-5)(x-0,3)(x+2) = x^3 - 3,3x^2 - 9,1x + 3$

c) $x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-0,7) = x(x-0,5)(x-0,7) = x^3 - 1,2x^2 + 0,35x$

d) $x(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x$

Página 109

63 **[Escuchando los argumentos de sus compañeros y compañeras el alumnado puede trabajar la comprensión oral].**

¿Verdadero o falso?

a) **Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas puede ser compatible indeterminado.**

b) **Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas puede ser compatible determinado.**

c) **Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas puede ser incompatible.**

a) Cierto, ya que la soluciones dependerán de una tercera incógnita y según valga esta tercera tendremos los valores de las dos primeras. Es decir puede tener solución aunque no podamos precisarla.

b) Falso, puede ser compatible pero no podremos determinarlo.

c) Cierto, es posible que no tenga una solución común.

64 Comprueba que una de estas inecuaciones tiene por solución al conjunto $\mathbb{R}$ y la otra es incompatible:

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1$ **b)** $3(x-2)+7<x+2(x-5)$

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1 \rightarrow -3x-14<-3x+1 \rightarrow -14<1$ que es cierto para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

b) $3(x-2)+7<x+2(x-5) \rightarrow 3x+1<3x-10 \rightarrow 1<-10$ que es falso, luego no se verifica nunca la desigualdad.

65 Resuelve.

a) $\frac{1}{x+3}<0$ **b)** $\frac{x^2+1}{x+5}>0$ **c)** $\frac{x+3}{x-3}\le 0$ **d)** $\frac{x^2-4}{x}\ge 0$

a) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, +\infty)$
1	+	+
$x+3$	–	+
$\frac{1}{x+3}$	–	+

Solución: $(-\infty, -3)$

b) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

$x^2+1=0$ no tiene solución.

Solución: $(-5, +\infty)$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
x^2+1	+	+
$x+5$	–	+
$\frac{x^2+1}{x+5}$	–	+

c) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3]$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$x+3$	–	+	+
$x-3$	–	–	+
$\frac{x+3}{x-3}$	+	–	+

Solución: $[-3, 3)$; $x=3$ no es solución porque hace cero el denominador.

d) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -2]$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$[2, +\infty)$
$x^2 - 4$	+	–	–	+
x	–	–	+	+
$\frac{x^2-4}{x}$	–	+	–	+

Solución: $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$; $x = 0$ no es solución porque hace cero del denominador.

66 **Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20 % a unos y un 25 % a otros. Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se rebajó el 25 %.**

x = n.º de ordenadores vendidos con un 20 % de descuento

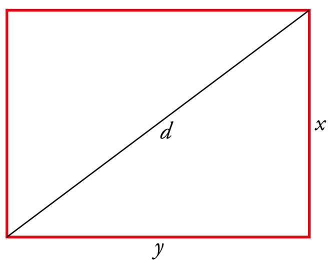
y = n.º de ordenadores vendidos con un 25 % de descuento

Expresamos las condiciones mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 0,8 \cdot 1\,200x + 0,75 \cdot 1\,200y = 56\,400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 60 \\ 960x + 900y = 56\,400 \end{cases} \rightarrow x = 40,\ y = 20$$

Se han vendido 20 ordenadores con un 25 % de descuento.

67 **Calcula las dimensiones que debe tener una finca rectangular sabiendo que su perímetro mide 140 m y que su diagonal mide 50 m.**



$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 140 = 2x + 2y \\ 50 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 70 = x + y \\ 2\,500 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 30,\ y_1 = 40;\ x_2 = 40,\ y_2 = 30$

Un lado mide 30 m, y el otro, 40 m.

68 **En una caja registradora encontramos billetes de 50 €, 100 € y 200 €, siendo el número total de billetes igual a 21, y la cantidad total de dinero de 1 800 €. Sabiendo que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €, calcula el número de billetes de cada clase.**

x = n.º de billetes de 50 €

y = n.º de billetes de 100 €

z = n.º de billetes de 200 €

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 21 \\ 50\,x + 100y + 200\,z = 1\,800 \\ x = 5z \end{aligned}\right\} \ \textit{Solución:}\ x = 10,\ y = 9,\ z = 2$$

Hay 10 billetes de 50 €, 9 billetes de 100 € y 2 billetes de 200 €.

69 **En una función de teatro se recaudan 5 200 €, vendiéndose 200 entradas de tres precios distintos: 30 €, 25 € y 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de localidades de cada tipo.**

x = n.º de localidades a 10 €

y = n.º de localidades a 25 €

z = n.º de localidades a 30 €

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=200 \\ 10x+25y+30z=5\,200 \\ 4x=y \end{array}\right\} \ \textit{Solución}:\ x=20,\ y=80,\ z=100$$

Se han vendido 20 localidades de 10 €, 80 de 25 € y 100 de 30 €.

70 **Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y 15 €/kg. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?**

x = kilos de bombones de 10 €/kg

y = kilos de bombones de 15 €/kg

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y\ge 40 \\ 10x+15y\le 600 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

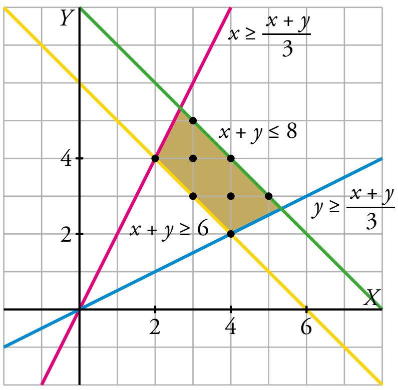
71 ODS **Meta. 5.5.** **[Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un debate sobre las medidas necesarias para incrementar la presencia de las mujeres en puestos de responsabilidad política, dirección de empresas…].**

Un comité de una comunidad de vecinos, debe estar formado entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?

Llamamos x al n.º de mujeres e y al n.º de hombres. Las condiciones son:

$$\begin{cases} 6\le x+y\le 8 \\ x\ge \dfrac{x+y}{3} \\ y\ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Las diferentes posibilidades son: $(x=4,\ y=2)$, $(x=3,\ y=3)$, $(x=2,\ y=4)$, $(x=4,\ y=3)$, $(x=3,\ y=4)$, $(x=5,\ y=3)$, $(x=4,\ y=4)$, $(x=3,\ y=5)$, que corresponden a los puntos del recinto común cuyas coordenadas son enteras.

72 **[La resolución del problema requiere que el alumnado trabaje la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

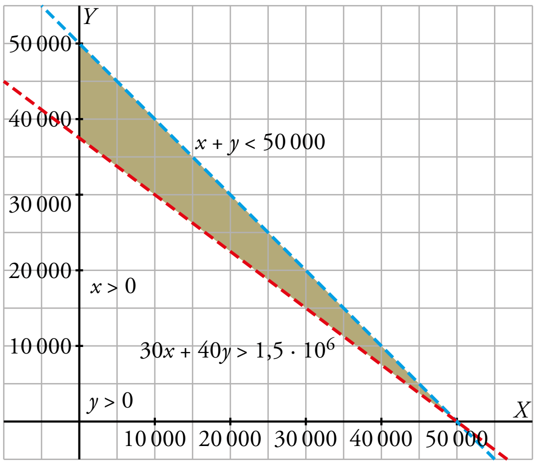
La recaudación de un partido de fútbol en el que se vendieron menos de 50 000 entradas superó los 1,5 millones de euros. Si se vendieron entradas de 30 € y de 40 €, ¿cuántas localidades de cada tipo pudieron ser vendidas?

x = n.º de entradas de 30 €

y = n.º de entradas de 40 €

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y < 50\,000 \\ 30x + 40y > 1{,}5 \cdot 10^6 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Las posibles soluciones son los puntos de coordenadas enteras que están en el recinto intersección de los cuatro semiplanos.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 2.3. (EA 2.3.1.-EA 2.3.2.-EA 2.3.3.)

Página 109

1 **Factoriza los siguientes polinomios señalando sus raíces:**

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ **b)** $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
-1 & & -1 & 0 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Las raíces de $P(x)$ son -2, -1 y 2.

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Sacando factor común: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2.º grado a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{array}{l} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 1 \end{array} \qquad Q(x) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces de $Q(x)$ son $-\frac{1}{2}$, 0 y 1.

2 **Opera y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4}$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x+2}\right)$

a) $$\frac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{(x+5) - 2x}{(x+5)^3} = \frac{5-x}{(x+5)^3}$$

b) $$\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right) = \left(\frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{x+2+x}{x+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{2x+2}{x+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3x+2}{x(x+2)}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{2x+2}\right) = \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x^2+2x}$$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

b) $x^4-8x^2-9=0$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

Multiplicando por mín.c.m.(2, 3) = 6 $\to$

$\to\ 2(3x+1)-3(5x^2+3)=3(x^2-1)-2(x+2)\ \to$

$\to\ 6x+2-15x^2-9=3x^2-3-2x-4\ \to\ -15x^2+6x-7=3x^2-2x-7\ \to$

$\to\ 18x^2-8x=0\ \to\ 2x(9x-4)=0 \begin{cases} 2x=0\ \to\ x_1=0 \\ 9x-4=0\ \to\ x_2=4/9 \end{cases}$

b) $x^4-8x^2-9=0 \xrightarrow{x^2=y} y^2-8y-9=0$

$y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-9)\cdot(1)}}{2}=\dfrac{8\pm 10}{2} \begin{cases} y=9\ \to\ x^2=9\ \to\ x=\pm 3 \\ y=-1\ \text{(no vale)} \end{cases}$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x\ \to\ (2x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2\ \to\ 4x^2-4x+1=2x-1\ \to\ 4x^2-6x+2=0\ \to\ 2x^2-3x+1=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(2)\cdot(1)}}{4}=\dfrac{3\pm 1}{4} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1/2 \end{cases}$ (Son válidas ambas soluciones.)

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}\ \to\ (x+1)\cdot x-(x-3)(x+3)=x^2-3\ \to\ x^2+x-(x^2-9)=x^2-3\ \to$

$\to\ x^2+x-x^2+9=x^2-3\ \to\ x+9=x^2-3\ \to\ x^2-x-12=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-12)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-3 \end{cases}$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x^2}\cdot 3^{-2}=9$ **b)** $5^{x^2}\cdot 25^{x-1}=5^{3x}$

c) $\log x+\log 2=1$ **d)** $\log_x 49=2$

a) $3^{x^2}\cdot 3^{-2}=9\ \to\ 3^{x^2-2}=3^2\ \to\ x^2-2=2\ \to\ x^2=4\ \to\ x=\pm 2$

b) $5^{x^2}\cdot 25^{x-1}=5^{3x}\ \to\ 5^{x^2}\cdot(5^2)^{x-1}=5^{3x}\ \to\ 5^{x^2}\cdot 5^{2x-2}=5^{3x}\ \to\ 5^{x^2+2x-2}=5^{3x}\ \to$

$\to\ x^2+2x-2=3x\ \to\ x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-2)}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

c) $\log x+\log 2=1\ \to\ \log 2x=\log 10\ \to\ 2x=10\ \to\ x=5$

d) $\log_x 49=2\ \to\ x^2=49\ \to\ x=7,\ x=-7$

Como la base no puede ser negativa, $x=7$.

5 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = -2 \;\to\; x = -\dfrac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \;\to\; -\frac{6}{y} + 2y = -1 \;\to\; -6 + 2y^2 = -y \;\to\; 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{3}{2} \;\to\; x_1 = -\dfrac{4}{3} \\ y_2 = -2 \;\to\; x_2 = 1 \end{cases}$$

Hay dos pares de *soluciones*:

$x_1 = -\dfrac{4}{3},\ y_1 = \dfrac{3}{2};\ x_2 = 1,\ y_2 = -2$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \;\to\; x = 4 + 2y \end{cases}$

$$\sqrt{-2\,(4 + 2y)} + y = 1 \;\to\; \left(\sqrt{-8 - 4y}\right)^2 = (-1 - y)^2 \;\to\; -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \;\to\; y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{-6}{2} \;\to\; y = -3$$

$x = 4 + 2(-3) \;\to\; x = -2$

Solución: $x = -2,\ y = -3$

6 **Resuelve por el método de Gauss.**

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} -8y + 7z = 29 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) + 8 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} -z = -3 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} z = 3 \\ y = -1 \\ x = 1 \end{matrix}$

Solución: $x = 1,\ y = -1,\ z = 3$

b) $\left.\begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \cdot (1.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} x - 5y + 9z = 4 \\ 11y - 21z = -6 \\ 22y - 42z = -4 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} x - 5y + 9z = 4 \\ 11y - 21z = -6 \\ 0 = 8 \end{matrix}\right\}$

El sistema no tiene solución.

7 **Resuelve.**

a) $x^2 + 5x \geq 0$

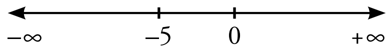
b) $x^2 - 25 < 0$

c) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \\ x + 1 \leq 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$

a) $x^2 + 5x \geq 0 \rightarrow x(x + 5) \geq 0$

Las raíces de $x(x + 5) = 0$ son 0 y 5:

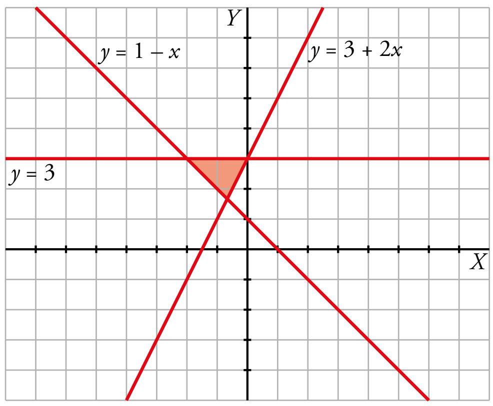


$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = -6 \rightarrow -6(-6+5) > 0 \\ \text{Si } x = -1 \rightarrow -1(-1+5) < 0 \\ \text{Si } x = 1 \rightarrow 1(1+5) > 0 \end{array}\right\} \textit{Solución}: \ (-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$$

b) $x^2 - 25 < 0 \rightarrow x^2 < 25 \rightarrow -5 < x < 5 \rightarrow$ *Solución*: $(-5, 5)$

c) $\left.\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3 \\ x + 1 \leq 8 \rightarrow x \leq 7 \end{cases}\right\}$ *Solución*: $[3, 7]$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$ La solución es el recinto sombreado:



8 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?**

Llamamos x al número de kilos que compró el tendero.

Llamamos y al precio al que compra cada kilo de manzanas.

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x - 20)(y + 0,4) = 147 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (nos quedamos solo con la solución positiva):

$$x = 125, \ y = 1$$

Por tanto, el tendero compró 125 kg.