7 CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y SU COMPOSICIÓN

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

1 RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.)

Página 200

1 **Después de leer el texto del recuadro referido al punto material, explica el significado de este párrafo: «La posibilidad de utilizar puntos materiales depende de lo que estudiemos. Así, podemos considerar la Luna como tal para estudiar su traslación alrededor de la Tierra, pero no cuando estemos interesados en su movimiento de rotación».**

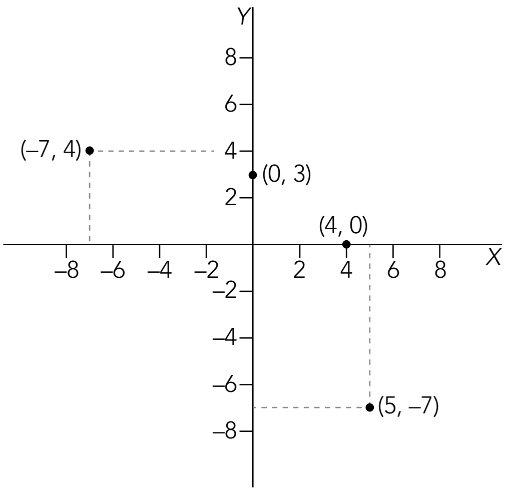
Si estudiamos el movimiento de traslación, lo que nos interesa es saber dónde está el astro, y nos basta saber dónde está su centro de masas. En este caso, se puede considerar punto material. Sin embargo, si queremos estudiar el movimiento de rotación, tendremos que estudiar el movimiento de distintos puntos de la superficie del astro, lo que no podríamos hacer si la considerásemos un punto material.

2 **Representa, en un sistema de ejes coordenados, los siguientes puntos:**

a) (0, 3) **b) (4, 0)**

c) (5, –7) **d) (–7, 4)**

La representación gráfica de estos puntos es la siguiente:



2 POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.)

Página 201

3 **Un móvil se encuentra en las coordenadas *x* = 2 m, *y* = 3 m. Se desplaza 1 m en sentido positivo del eje *X* y 2 m en sentido negativo del eje *Y*. ¿Cuál será ahora su vector posición? ¿A qué distancia se encuentra del origen? ¿Y del punto de partida?**

Si el móvil se desplaza 1 metro en sentido positivo del eje *X*, la coordenada *x* será:

$$x = 2 + 1 = 3 \text{ m}$$

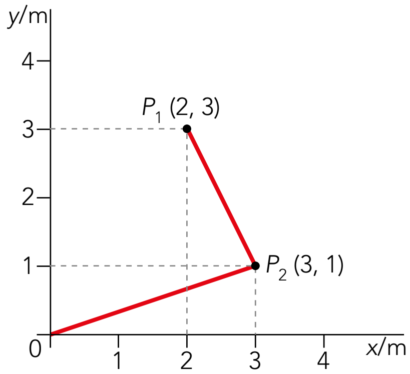
Si se desplaza 2 metros en sentido negativo del eje *Y*, la coordenada *y* será:

$$y = 3 - 2 = 1 \text{ m}$$

Por tanto, el vector posición es:

$$\vec{r} = (3 \cdot \vec{i} + \vec{j}) \text{ m}$$

Representamos en un diagrama el vector posición y el punto de partida:



La distancia al origen, en cualquier punto, es el módulo del vector posición. Por tanto, la distancia de P_2 al origen es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\text{m})^2 + (1\text{m})^2} = \sqrt{10} \text{ m}$$

Y la del punto de partida, P_1, será:

$$d_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{[(3 - 2) \text{ m}]^2 + [(1 - 3) \text{ m}]^2} = \sqrt{5} \text{ m}$$

4 El vector posición de una partícula, en un momento determinado, es $\vec{r} = (-2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})$ m. Sabemos que el vector desplazamiento, respecto de una posición anterior, es $\Delta\vec{r} = (-4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j})$ m. ¿En qué punto se encontraba?

El vector desplazamiento es la diferencia entre la posición dada menos la inicial. Por tanto, al vector posición inicial le corresponderán los puntos:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = x - x_0 \,; \quad -4 = -2 - x_0 \rightarrow x_0 = 2 \\ \Delta y = y - y_0 \,; \quad 3 = 2 - y_0 \rightarrow y_0 = -1 \end{array}\right\} P\,(2, -1) \text{ m}$$

Por tanto la partícula se encontraba en el punto (2, –1) m.

5 Visualiza la animación «Sistemas de referencia», que encontrarás en anayaeducacion.es, para repasar los contenidos que viste el curso pasado sobre el estudio del movimiento.

Respuesta abierta.

Le sugerimos que recomiende periódicamente a su alumnado la visita al banco de recursos disponible en **anayaeducacion.es**, donde podrá encontrar una variedad de recursos que le ayudarán a reforzar los contenidos trabajados en cada una de las unidades del libro. Entre ellos, podrá encontrar:

- Vídeos.
- Laboratorios virtuales y simulaciones.
- Resúmenes de contenidos.
- Presentaciones interactivas.
- Actividades interactivas de ejercitación.
- Soluciones de las actividades con resultado numérico.

4 CAMBIOS DE POSICIÓN: VELOCIDAD

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.) CE.6.3. (EA.6.3.1.)

Página 203

6 La inversa. **En el texto se dice que la celeridad media (c_m) es mayor o igual que el módulo de la velocidad media (v_m). ¿En qué casos coinciden? Describe un movimiento en el que $c_m \neq 0$ y $\vec{v}_m = 0$.**

La celeridad media es el cociente entre el espacio recorrido (el espacio que seguimos en una trayectoria) y el tiempo que se tarda en recorrerlo, mientras que la velocidad media es la variación de los vectores posición con respecto al tiempo. Por tanto, la celeridad media siempre será mayor o igual que la velocidad media. Solo coincidirán en los casos en que sea un movimiento rectilíneo uniforme, sin cambio de sentido. El único caso en el que $\vec{v}_m$ se anula es aquel en el que la posición inicial coincide con la final, pues $\Delta\vec{r} = 0$, y así $\vec{v}_m = 0$. Por ejemplo, en un movimiento circular uniforme:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} \xrightarrow{\vec{r}_2 = \vec{r}_1} \vec{v}_m = \frac{0}{\Delta t} = 0$$

$$c_m = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\Delta t}$$

En **anayaeducacion.es** dispone de un documento que explica cómo utilizar la técnica de desarrollo de pensamiento «La inversa», cuya aplicación se propone para resolver este ejercicio.

7 La ecuación del movimiento de una partícula viene dada por $\vec{r}\,(t) = (t-2) \cdot \vec{i} + (3 \cdot t^2 + 1) \cdot \vec{j}$, en el SI. Realiza un estudio del movimiento entre t_1 = 3 s y t_2 = 10 s. (Si no sabes representar la ecuación de la trayectoria, puedes unir las posiciones en varios instantes de tiempo).

Para dibujar la trayectoria de la partícula, escribimos la ecuación del movimiento en función de x e y:

$$x = t - 2 \rightarrow t = x + 2$$

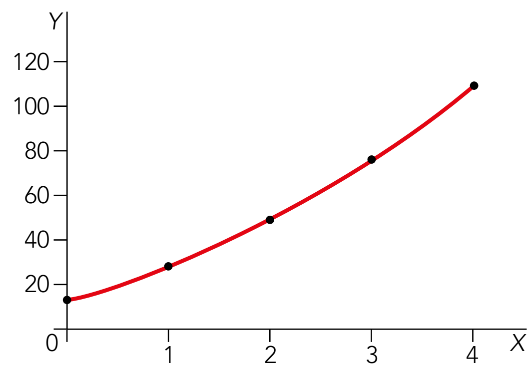
$$y = 3 \cdot t^2 + 1$$

Despejamos t de la primera y sustituímos en la segunda y, así, obtenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 13$$

La gráfica que obtenemos al representarla es la siguiente:

x	0	1	2	3	4
y	13	28	49	76	109



Para el estudio del movimiento, calculamos el vector desplazamiento entre los instantes señalados:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(10) - \vec{r}(3) = [(10-2) - (3-2)] \cdot \vec{i} + [(3 \cdot 10^2 + 1) - (3 \cdot 3^2 + 1)] \cdot \vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = 7 \cdot \vec{i} + 273 \cdot \vec{j}$$

Como $\Delta t = t_2 - t_1 = 10\ \text{s} - 3\ \text{s} = 7\ \text{s}$, la velocidad media es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(7 \cdot \vec{i} + 273 \cdot \vec{j})\ \text{m}}{7\ \text{s}} = (1 \cdot \vec{i} + 39 \cdot \vec{j})\ \text{m/s}$$

$$v_m = \sqrt{1^2 + 39^2} \approx 39\ \text{m/s}$$

La velocidad instantánea es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d[(t-2) \cdot \vec{i} + (3 \cdot t^2 + 1) \cdot \vec{j}]}{dt}$$

$$\vec{v} = (1 \cdot \vec{i} + 6 \cdot t \cdot \vec{j})\ \text{m/s}$$

5 CAMBIOS DE VELOCIDAD: ACELERACIÓN

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.) CE.6.3. (EA.6.3.1.) CE.6.5. (EA.6.5.1.)

Página 205

8 **Desde un punto de vista cinemático, ¿cuántos aceleradores tiene un vehículo? Razona tu respuesta.**

En un coche hay tres aceleradores: el «acelerador», que aumenta la celeridad; el «freno», que la disminuye, y el «volante», que modifica la dirección del vector velocidad.

9 **Identifica en tu entorno dos movimientos de cada uno de los tipos presentados en la tabla del apartado 5.4. Indica, en cada caso, el sistema de referencia que has utilizado.**

Movimiento	Ejemplo	Sistema de referencia
Rectilíneo uniforme	Una moto a $\vec{v}$ = cte	Un observador en reposo con respecto al suelo
	Una cinta transportadora recta en régimen estacionario	
Rectilíneo uniformemente acelerado	Un tren que sale de la estación	
	Un objeto en caída libre	
Rectilíneo acelerado	Un coche que pasa de ir detrás de otro vehículo a intentar adelantarlo	
	Un coche en un atasco en una calle recta	
Circular uniforme	Las manillas de un reloj analógico	
	La noria de la feria (una vez que ha arrancado)	
Circular uniformemente acelerado	Las aspas de un helicóptero al salir	
	Una noria de la feria al arrancar	
Circular acelerado	Las aspas de un helicóptero al salir	
	Un CD cuando cambiamos de canción	
Curvilíneo uniforme $a_n > 0$ $a_t = 0$ $\rho \neq$ cte	Un coche que toma una curva con velocidad constante	
	Una persona que callejea con paso constante	
Curvilíneo uniformemente acelerado $a_n > 0$ $\rho \neq$ cte a_t = cte	El disparo de una flecha	
	El recorrido de una pelota de golf tras ser golpeada	
Curvilíneo acelerado $a_n > 0$ $\rho \neq$ cte $a_t \neq 0$	Un globo que se desinfla	
	El movimiento de un cometa	

10 El vector posición de un móvil viene dado por $\vec{r}\,(t) = [3 \cdot \cos(5 \cdot t) \cdot \vec{i} + 3 \cdot \text{sen}\,(5 \cdot t) \cdot \vec{j}\,]$ m. Calcula las componentes de la aceleración, cartesianas e intrínsecas. Represéntalas, junto al vector posición y el vector velocidad, en dos puntos que tú elijas de la trayectoria.

Para calcular las componentes de la aceleración, debemos derivar dos veces la trayectoria. La primera derivada será la velocidad instantánea, y la segunda, la aceleración instantánea. De esta forma, las componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración son:

$$\vec{v}_x\,(t) = \frac{d\vec{r}_x(t)}{dt} = -15 \cdot \text{sen}\,(5 \cdot t) \cdot \vec{i}\ \text{m/s} \qquad \vec{a}_x\,(t) = \frac{d\vec{v}_x(t)}{dt} = -75 \cdot \cos(5 \cdot t) \cdot \vec{i}\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{v}_y\,(t) = \frac{d\vec{r}_y(t)}{dt} = 15 \cdot \cos(5 \cdot t) \cdot \vec{j}\ \text{m/s} \qquad \vec{a}_y\,(t) = \frac{d\vec{v}_y(t)}{dt} = -75 \cdot \text{sen}\,(5 \cdot t) \cdot \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

Para obtener las componentes intrínsecas, calculamos el módulo del vector velocidad:

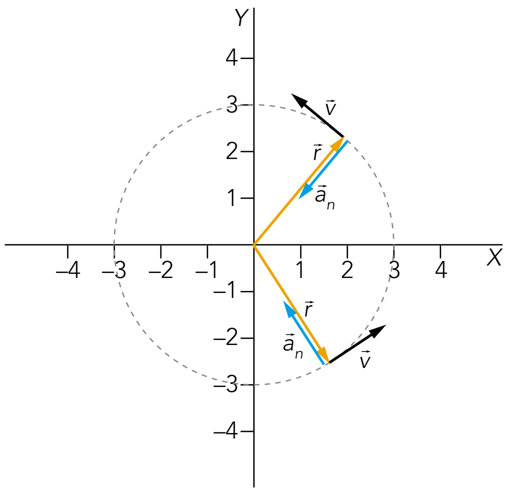
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15 \cdot \text{sen}\,(5 \cdot t))^2 + (15 \cdot \cos(5 \cdot t))^2} = 15\ \text{m/s}$$

La componente tangencial es la derivada del módulo de la velocidad respecto al tiempo. En este caso, la velocidad no depende del tiempo; por tanto, $a_t = 0$. Se trata de un movimiento uniforme.

El módulo de la aceleración será igual a la aceleración normal:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-75 \cdot \cos(5 \cdot t))^2 + (75 \cdot \text{sen}(5 \cdot t))^2} = 75\ \text{m/s}^2 \rightarrow a_n = 75\ \text{m/s}^2$$

La trayectoria del movimiento es una circunferencia. Si representamos el vector posición y el vector velocidad en dos puntos, obtenemos:



Nota: Debemos recordar que $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$.

6 MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.3. (EA.6.3.2.) CE.6.4. (EA.6.4.1.) CE.6.5. (EA.6.5.1.)

Página 207

11 ¿Desde qué altura se ha de soltar un cuerpo para que llegue al suelo con una velocidad de 100 km/h? Representa sus gráficas *y-t* y *v-t*.

Para calcular la altura a la que se debe soltar el cuerpo debemos utilizar las ecuaciones de caída libre, donde $v_0 = 0$ y $a = -g$, siendo g la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra igual a 9,8 m/s².

$$y = h_0 - \frac{2}{1} \cdot g \cdot t^2 \qquad v = -g \cdot t$$

En primer lugar, expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 27{,}78\ \text{m/s}$$

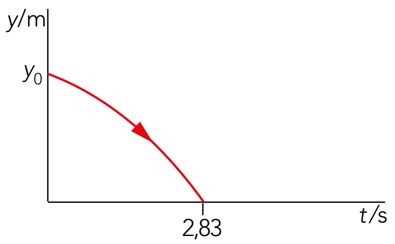
La velocidad de llegada se considera negativa según el convenio de signos. Por tanto, el tiempo que tarda el objeto en recorrer el espacio será:

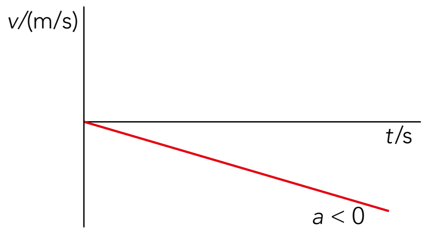
$$v = -g \cdot t \rightarrow t = \frac{v}{-g} = \frac{-27{,}78\ \text{m/s}}{-9{,}81\ \text{m/s}^2} = 2{,}83\ \text{s}$$

Cuando el cuerpo llega al suelo, $y = 0$. Por tanto:

$$h_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (2{,}83\ \text{s})^2 = 39{,}3\ \text{m}$$

Las gráficas que representan este movimiento son:





12 **Comprueba que las ecuaciones del MRUA son dimensionalmente homogéneas. Repasa, si lo necesitas, la unidad introductoria del libro.**

Para estudiar la homogeneidad de las ecuaciones, planteamos sus ecuaciones de dimensiones. La ecuación de la velocidad para el movimiento uniformemente acelerado viene dada por:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \begin{cases} [v] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \\ [v_0 + a \cdot t] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} + \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{T}^{-1} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \end{cases}$$

Por tanto, queda demostrado que la ecuación es homogénea.

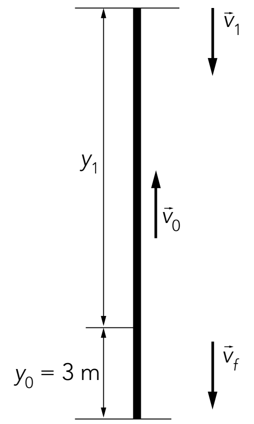
En el caso del espacio:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \begin{cases} [x] = \text{L} \\ \left[v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{T} + \text{L} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{T}^{-2} = \text{L} \end{cases}$$

Luego, la ecuación es homogénea.

13 **Desde una altura de 3 m se lanza un cuerpo, verticalmente hacia arriba, de modo que impacta con el suelo a 20 m/s. Calcula v_0.**

El esquema que representa el movimiento del cuerpo es el siguiente:



Las ecuaciones que utilizamos son:

$$v = v_0 - g \cdot t \qquad y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Cuando $y = 0$, la velocidad final $v = -20$ m/s. Por tanto, sustituyendo los datos en el SI tendremos en el momento del impacto en el suelo que:

$$-20 = v_0 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow v_0 = 9{,}8 \cdot t - 20$$

$$0 = 3 + v_0 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

Así, sustituyendo el valor de v_0 en la segunda ecuación, hallamos los posibles valores del tiempo:

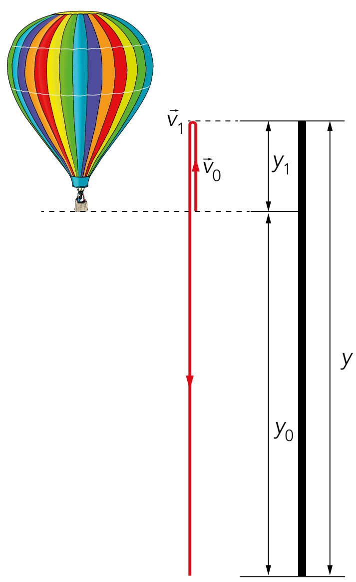
$$4{,}9 \cdot t^2 - 20 \cdot t + 3 = 0 \begin{cases} t_1 = 3{,}93 \text{ s} \\ t_2 = 0{,}16 \text{ s} \end{cases}$$

De donde desechamos t_2 porque haría que el valor de v_0 fuese negativo. Así, cuando $t_1 = 3{,}93$ s, la velocidad inicial será:

$$v_0 = 9{,}8 \cdot 3{,}93 - 20 = 18{,}51 \text{ m/s}$$

14 **Desde un globo que está a 15 m del suelo y asciende verticalmente a 2 m/s se suelta un saco de lastre. ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?**

Realizamos un esquema que represente el movimiento:



Las ecuaciones del movimiento del saco son:

$$v = v_0 - g \cdot t \qquad h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Del enunciado sabemos que la altura inicial, h_0, es de 15 m, y que la velocidad inicial es de 2 m/s. Además, diremos que cuando llegue al suelo, $y = 0$. Por tanto, sustituyendo los datos en unidades del SI:

$$v = 2 - 9{,}81 \cdot t \qquad 0 = 15 + 2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$$

De la segunda ecuación obtenemos dos valores del tiempo, que son:

$$t_1 = 1{,}96 \text{ s} \qquad t_2 = -1{,}56 \text{ s}$$

Por tanto, el saco de lastre tarda 1,96 s en llegar al suelo (se obvia el segundo valor por ser negativo).

7 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.8. (EA.6.8.1.-6.8.2.)

Página 210

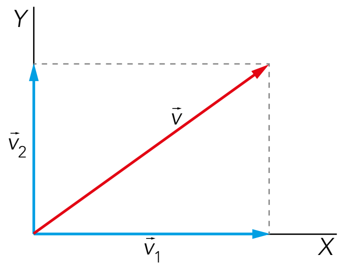
15 ¿Qué movimiento se obtiene al superponer dos MRUA perpendiculares, ambos con $v_0 = 0$?

Tenemos dos movimientos rectilíneos uniformemente acelerados, por lo que la suma de ambos también será un movimiento uniformemente acelerado. La ecuación de la velocidad en un MRUA viene dada por la ecuación:

$$v = v_0 + a \cdot t \xrightarrow{v_0 = 0} v = a \cdot t$$

Vectorialmente, como vemos en el esquema, su velocidad será la compuesta por la velocidad en el eje X (v_1) y la velocidad en el eje Y (v_2):

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}$$



De la misma forma, la aceleración será la compuesta por el eje X (a_1) y el eje Y (a_2):

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$$

La trayectoria la deducimos de la ecuación del espacio para un MRUA:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Considerando $x_0 = 0$, y como nos indican que v_0 es nula, las ecuaciones para el eje X, y para el eje Y serán, respectivamente:

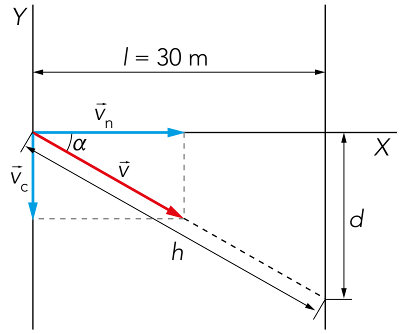
$$x = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$$

La ecuación de la trayectoria la obtenemos al despejar t^2 de la ecuación de x, y sustituyendo en la de y:

$$\frac{2 \cdot x}{a_1} = t^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{a_1}\right) \rightarrow y = \frac{a_2}{a_1} \cdot x$$

16 **El nadador del ejercicio resuelto 7 comienza a nadar en la dirección perpendicular al río. ¿A qué distancia del embarcadero de la derecha, situado enfrente del otro, tocaría tierra? ¿Cuánto tardaría?**

Tomamos como sistema de referencia unos ejes cartesianos, con el origen situado en la posición inical del nadador. Consideramos el eje *X* para referirnos a la velocidad del nadador ($\vec{v}_n$) y el eje *Y* para la de la corriente ($\vec{v}_c$). El esquema será:



El vector velocidad será:

$$\vec{v} = v_n \cdot \vec{i} + v_c \cdot \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$$

Podemos descomponer el movimiento en dos MRU, uno en el sentido del eje *X* y otro en el del eje *Y*:

Eje *X* $\Rightarrow$ $x = v_x \cdot t = 2t$

Eje *Y* $\Rightarrow$ $y = v_y \cdot t = t$

El vector posición será, por tanto:

$$\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}$$

Para llegar a la otra orilla, el nadador debe recorrer 30 metros a lo largo del eje *X*. Sustituyendo en la ecuación de este movimiento, podemos averiguar cuánto tiempo tarda en llegar a la otra orilla:

$$x = 2t \rightarrow 30 = 2t \rightarrow t = 15 \text{ s}$$

Finalmente, podemos calcular qué distancia recorre a lo largo del eje *Y* durante esos 15 segundos:

$$y = t = 15 \text{ m} \rightarrow d = 15 \text{ m}$$

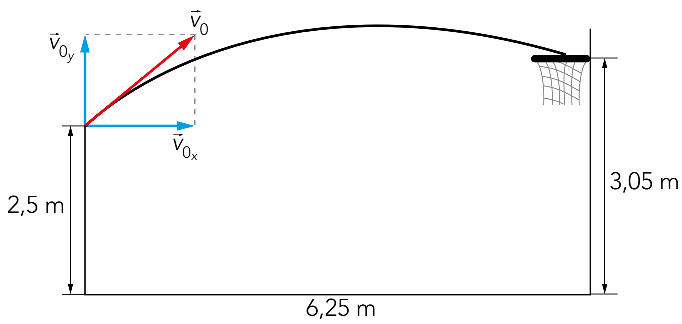
17 **Un jugador de baloncesto lanza el balón desde 2,50 m de altura con una elevación de 37° y encesta en la canasta, situada a 6,25 m de distancia y 3,05 m de altura. ¿Con qué velocidad lanzó?**

Se trata de un movimiento parabólico, para el que sus ecuaciones y su representación gráfica son:

Eje *X* $\quad x(t) = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \ ; \ v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$

Eje *Y*: $\quad y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_0 + v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha - g \cdot t$$



Como el tiempo transcurrido es el mismo para los dos ejes, despejamos t en x y los sutituimos en y:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \rightarrow y = y_0 + \cancel{v_0} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cdot \cos \alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}\right)^2$$

$$y = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Despejando v_0, y sustituyendo por los datos del enunciado, obtenemos su valor:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - y$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (y_0 + x \cdot tg\ \alpha - y)}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (6{,}25\,\text{m})^2}{2 \cdot \cos^2 37° \cdot (2{,}5\,\text{m} + 6{,}25 \cdot tg\ 37° - 3{,}05\,\text{m})}} = 8{,}5\,\text{m/s}$$

18 **¿Qué pasaría si variámos la velocidad de lanzamiento y el ángulo? ¿Con qué valores encestaría?**

Respuesta abierta.

En **anayaeducacion.es** dispone de un documento que explica cómo utilizar la técnica de desarrollo de pensamiento «¿Qué pasaría si...?», propuesta para resolver este ejercicio.

8 CONTRIBUCIONES DE GALILEO AL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.1. (EA6.1.2.)

Página 211

19 ODS **Piensa en la época de las contribuciones de Galileo. ¿Crees que habrían sido igualmente consideradas de haber sido realizadas por una mujer? Para alcanzar las metas 4.5 y 5.5 indaga en, al menos, dos hitos relevantes de mujeres relacionadas con la educación y otro más con el estudio de la física o la química.**

Respuesta abierta.

Antes de responder a esta actividad, es recomendable que su alumnado visualice los vídeos sobre las metas 4.5 y 5.5 de los ODS, disponibles en **anayaeducacion.es**.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.-6.1.2.) CE.6.2. (EA.6.2.1.) CE.6.3. (EA.6.3.1.-6.3.2.) CE.6.4. (EA.6.4.1.) CE.6.5. (EA.6.5.1.) CE.6.8. (EA.6.8.1.-6.8.2.-6.8.3.)

Página 216

Relatividad del movimiento. Magnitudes cinemáticas

1 Describe el movimiento del extremo del aspa de un ventilador, desde tu perspectiva, si:

a) Te sitúas justo enfrente.

b) Te alejas perpendicularmente al plano de giro.

c) Andas en dirección paralela a dicho plano.

d) Te sitúas en un lateral del ventilador, viéndolo de perfil.

¿Cuál de estas descripciones es la correcta?

a) Movimiento circular uniforme, ya que la velocidad es constante.

b) El extremo del aspa describiría una espiral de radio decreciente.

c) En este caso, el extremo del aspa describiría un cicloide.

d) Movimiento de vaivén que se repite en el tiempo.

Todas las descripciones son correctas, ya que la descripción del movimiento depende del sistema de referencia.

2 Un observador, *A*, está en el interior de un vehículo que circula por delante de una gasolinera, en cuya cafetería hay otro observador, *B*. Razona para cuál de ellos es cierta cada una de estas afirmaciones:

a) El surtidor de la gasolinera está en reposo.

b) Los árboles del arcén se mueven.

c) Un maletín situado en uno de los asientos del coche está en reposo.

d) Un avión que vuela en dirección perpendicular a la carretera se encuentra en movimiento.

a) El observador *B*, que está en la cafetería, ve el surtidor en reposo.

b) Para el observador *A*, que está en el coche.

c) Para el observador *A*, que está en el coche, el maletín no se mueve.

d) Para ambos observadores *A* y *B*, el avión está en movimiento.

3 En cada uno de los siguientes casos, ¿qué móvil va más rápido, el *A* o el *B*? ¿Por qué?

De forma general, diremos que el móvil que va más rápido será el que recorra mayor espacio en menos tiempo. Por tanto:

– En el primer caso, será el móvil *B*, ya que en el mismo tiempo recorre mayor espacio.

– En el segundo caso, será el móvil *A*, porque recorre el mismo espacio en menos tiempo.

– En el tercer caso, será el móvil *A*, ya que recorre más espacio en menos tiempo.

– En el cuarto caso, será el móvil *B*. Aunque recorre menos espacio que *A*, el tiempo es la mitad y el espacio que recorre es mayor a la mitad del que recorre *A*. Si fuera justo la mitad del espacio que recorre *A*, la velocidad sería la misma.

4 Desde una posición determinada, un móvil se desplaza 10 m hacia el este, 20 m hacia el norte, 5 m hacia el oeste y 30 m hacia el sur:

a) Calcula el espacio recorrido, y el módulo del vector desplazamiento.

b) Desde la última posición, ¿qué espacio ha de recorrer, y en qué dirección, para llegar en línea recta al punto de partida?

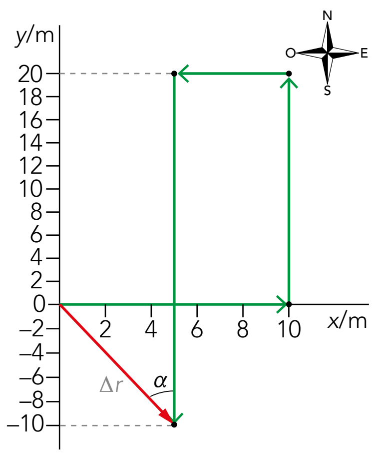
a) El espacio recorrido será la suma de lo recorrido en cada tramo:

$$\Delta s = 10\ \text{m} + 20\ \text{m} + 5\ \text{m} + 30\ \text{m} = 65\ \text{m}$$

Para calcular el vector desplazamiento, debemos conocer el punto final. Para ello, dibujamos un eje de coordenadas, donde el este será hacia el eje *X* positivo, norte hacia el eje Y positivo, el oeste hacia el eje *X* negativo y el sur hacia el eje *Y* negativo. Considerando que parte del origen de coordenadas, el punto final se encuentra en:

$$x = 10\ \text{m} - 5\ \text{m} = 5\ \text{m}$$

$$y = 20\ \text{m} - 30\ \text{m} = -10\ \text{m}$$



Con el teorema de Pitágoras, calculamos el módulo del vector desplazamiento:

$$\Delta r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \Delta r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25\ \text{m}^2 + 100\ \text{m}^2} = \sqrt{125}\ \text{m}^2 = 5\sqrt{5}\ \text{m}$$

b) El espacio que debe recorrer será el calculado en el apartado anterior, $\Delta s = 5\sqrt{5}$ m. El ángulo que se debe girar, mirando hacia el norte, lo deducimos por trigonometría:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{5\sqrt{5}}\ ;\ \alpha = 26{,}56°$$

Por tanto, diremos que el móvil debe recorrer en línea recta $5\sqrt{5}$ m en dirección noroeste con un ángulo de 26,56° medido sobre la vertical, hasta llegar al punto de partida.

5 **Las ecuaciones paramétricas de un movimiento vienen dadas por:**

$$x = t^2$$

$$y = 5 + 2 \cdot t^2$$

a) Determina la ecuación de la trayectoria y represéntala gráficamente.

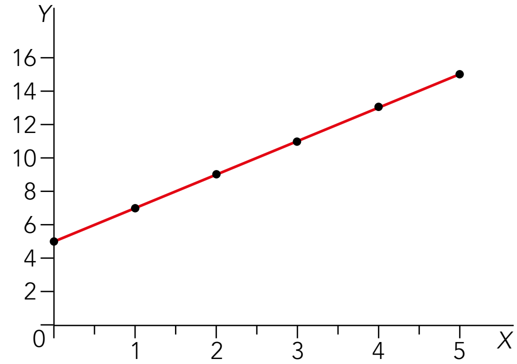
b) Calcula el vector desplazamiento entre los instantes t_1 = 2 s y t_2 = 5 s.

c) ¿En algún intervalo de tiempo coincide el módulo del vector desplazamiento con el espacio recorrido?

a) Para determinar la ecuación de la trayectoria sustituimos en *y* el valor de t^2 por *x*. Por tanto, la ecuación es:

$$y = 5 + 2 \cdot x$$

Que se corresponde con la ecuación de una recta. Su representación gráfica es la siguiente:



b) El vector posición es:

$$\vec{r}\,(t) = t^2 \cdot \vec{i} + (5 + 2 \cdot t^2) \cdot \vec{j}$$

El vector desplazamiento entre t_2 y t_1 es:

$$\Delta \vec{r} = (t_2^2 - t_1^2) \cdot \vec{i} + [(5 + 2 \cdot t_2^2) - (5 + 2 \cdot t_1^2)] \cdot \vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = (25 - 4) \cdot \vec{i} + [(5 + 2 \cdot 25) - (5 + 2 \cdot 4)] \cdot \vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = 21 \cdot \vec{i} + 42 \cdot \vec{j}$$

c) Para que el módulo del vector desplazamiento coincida con el espacio recorrido, el movimiento ha de ser rectilíneo (este lo es) y no cambiar de sentido. Para comprobar si en algún momento se produce cambio de sentido (el módulo de alguna componente de la velocidad cambia de signo), calculamos el vector velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2 \cdot t + \vec{i} + 4 \cdot t \cdot \vec{j}$$

Luego, podemos afirmar que el módulo del vector desplazamiento y el espacio recorrido siempre coinciden, ya que ninguna de las componentes de la velocidad cambia de signo en ningún momento.

6 **Un vehículo describe una circunferencia de radio *R* = 20 m, en sentido horario con celeridad constante, de modo que tarda 4 s en cada vuelta. Si situamos el origen del sistema de referencia en el centro de la circunferencia, calcula:**

a) La celeridad del movimiento.

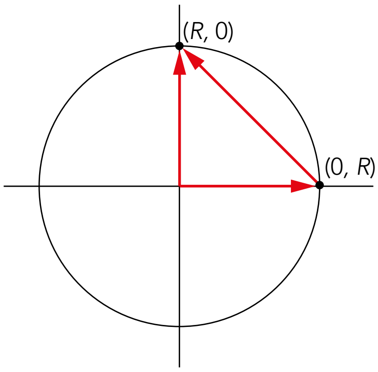
b) El vector velocidad media entre las posiciones (0, *R*) y (*R*, 0).

¿Coincide en este caso la celeridad con el módulo de la velocidad media? ¿A qué se debe?

a) La celeridad del movimiento se define como el espacio recorrido entre el tiempo que tarda en recorrerlo:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 10 \cdot \pi \text{ m/s}$$

b) La velocidad media se calcula dividiendo el vector desplazamiento entre el tiempo. Representando los puntos que nos da el enunciado:



Como tarda 4 s en dar una vuelta completa, en un cuarto de vuelta se invertirá 1 s. Con esto, la velocidad media será:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t} = \frac{(20 \cdot \vec{j} - 20 \cdot \vec{i}\,)}{1 \text{ s}} = 20 \cdot (-\vec{i} + \vec{j}\,) \text{ m/s}$$

Y su módulo es:

$$v_m = \sqrt{(20 \text{ m/s})^2 + (20 \text{ m/s})^2} = 20 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$

La celeridad no coincide con la velocidad media debido a que para la velocidad media se considera el vector desplazamiento, que es menor al espacio recorrido. Por tanto, su valor es menor.

7 Un móvil se encuentra inicialmente en la posición (x = 2 m, y = 8 m). Si se desplaza con velocidad media $\vec{v}_m = (2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\,)$ m/s, ¿en qué posición se encontrará en t = 4 s? ¿A qué distancia del origen?

La velocidad media es el vector desplazamiento entre el tiempo empleado. Si inicialmente se encuentra en el punto (2, 8) y después de 4 s se encuentra en (x, y):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{t} = \frac{(x - 2) \cdot \vec{i} + (y - 8) \cdot \vec{j}}{4} = 2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}$$

Conocida la expresión vectorial de la velocidad media, la posición en que se encontrará el móvil en el eje X y en el eje Y es:

Eje X: $$\frac{x - 2}{4} = 2 \text{ m} \rightarrow x = 10 \text{ m}$$

Eje Y: $$\frac{y - 8}{4} = -6 \text{ m} \rightarrow y = -16 \text{ m}$$

La distancia del origen será el módulo del vector posición, por tanto:

$$d_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10^2 \text{ m} + (-16 \text{ m})^2} = 18{,}87 \text{ m}$$

8 **La ecuación intrínseca de un movimiento viene dada por $s = (3 + 2 \cdot t - 5 \cdot t^2)$ m. Calcula:**

a) La celeridad media en los 3 primeros segundos.

b) La celeridad instantánea.

¿Se podría determinar, con estos datos, el vector velocidad? ¿Por qué?

a) La celeridad media viene dada por el espacio recorrido entre el tiempo:

$$c_m = \frac{|s_3 - s_0|}{t} = \frac{|(3 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2) - (3 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2)|\ \text{m}}{3\ \text{s}} = 13\ \text{m/s}$$

b) La celeridad instantánea se calcula al derivar el espacio frente al tiempo:

$$c_{ins} = \frac{\text{d}s}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\,(3 + 2 \cdot t - 5 \cdot t^2)}{\text{d}t} = (2 - 10 \cdot t)\ \text{m/s}$$

No se conoce la trayectoria y, por tanto, no se puede calcular el vector velocidad; solo su módulo.

9 **¿Qué significado tiene que la aceleración de un móvil que se mueve en línea recta, supuesta constante, es de 2 m/s^2?**

Su significado es que, cada segundo que pasa, la celeridad aumenta en 2 m/s.

10 **Indica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) En un MCU, la aceleración es nula.

b) En un movimiento circular, $\vec{a}_n$ no varía.

c) Si la velocidad y la aceleración forman un ángulo de 30°, la celeridad es constante.

d) Si la velocidad y la aceleración forman un ángulo de 150°, la aceleración tangencial es negativa.

a) Falsa. Un movimiento circular siempre tiene aceleración normal (o centrípeta).

b) Falso. Si el movimiento circular es acelerado, la aceleración normal varía.

c) Falso. En las condiciones descritas, la aceleración tiene componente tangencial, y la celeridad no es constante.

d) Verdadero. Con el ángulo indicado, la componente tangencial de la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad.

Página 217

11 **El vector posición de un móvil viene dado por $\vec{r} = [(2 - t2) \cdot \vec{i} - 3 \cdot t2 \cdot \vec{j}\,]$ m:**

a) Calcula y representa la ecuación de la trayectoria.

b) Determina los vectores velocidad y aceleración instantánea y sus módulos.

c) Calcula los valores medios de estas magnitudes entre t = 2 s y t = 7 s.

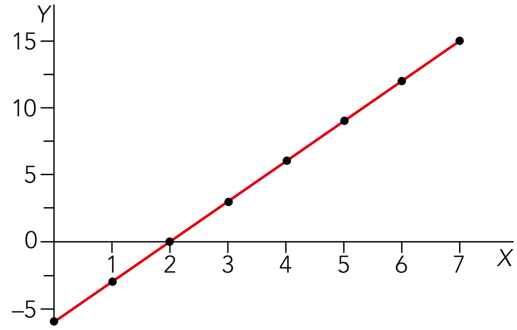
d) Halla las componentes intrínsecas de la aceleración.

e) ¿De qué tipo de movimiento se trata?

a) Conocido el vector posición, calculamos la ecuación de la trayectoria expresando y en función de x. Si partimos de las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 - t^2 \\ y &= -3 \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} t^2 &= 2 - x \\ y &= -3 \cdot (2 - x) \end{aligned}\right\} y = -6 + 3 \cdot x$$

Gráficamente, obtenemos esta representación:



b) Para determinar el vector velocidad, derivamos el vector posición respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\,[(2 - t^2) \cdot \vec{i} - 3 \cdot t^2 \cdot \vec{j}\,]}{dt} = (-2 \cdot t \cdot \vec{i} - 6 \cdot t \cdot \vec{j}\,)\ \text{m/s}$$

El vector aceleración será la derivada del vector velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(-2 \cdot t \cdot \vec{i} - 6 \cdot t \cdot \vec{j}\,)}{dt} = (-2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\,)\ \text{m/s}^2$$

Sus módulos vienen dados por la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de sus componentes *x* e *y*:

$$|\vec{v}\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2 \cdot t)^2 + (-6 \cdot t)^2} = \sqrt{40 \cdot t^2} = 6{,}32 \cdot t\ \text{m/s}$$

$$|\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}\ \text{m/s}^2 = 6{,}32\ \text{m/s}^2$$

c) La velocidad media es el vector desplazamiento entre la diferencia de tiempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_7 - \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{(-45 \cdot \vec{i} - 135 \cdot \vec{j}\,)\text{m}}{5\ \text{s}} = (-19 \cdot \vec{i} - 27 \cdot \vec{j}\,)\text{m/s}$$

La aceleración media se obtiene de la variación de velocidad entre el tiempo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_7 - \vec{v}_2}{\Delta t} = \frac{(-10 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j}\,)\ \text{m}}{5\ \text{s}} = (-2 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\,)\ \text{m/s}^2$$

d) Para el cálculo de las componentes intrínsecas, hallamos el módulo de la velocidad; conocidas v_x y v_y:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 \cdot t^2 + 36 \cdot t^2} = \sqrt{40 \cdot t^2} = 6{,}32 \cdot t\ \text{m/s}$$

La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,(6{,}32 \cdot t)}{dt} = 6{,}32\ \text{m/s}^2$$

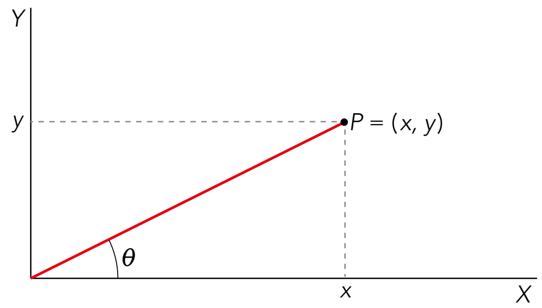
Calculamos el módulo de la aceleración, conociendo sus componentes a_x y a_y:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2\ \text{m/s}^2)^2 + (6\ \text{m/s}^2)^2} = \sqrt{40}\ \text{m}^2/\text{s}^4 = 6{,}32\ \text{m/s}^2$$

La aceleración tangencial coincide con el módulo de la aceleración, lo que indica que la aceleración normal es nula.

e) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

12 **Para describir un movimiento es necesario fijar un sistema de referencia. Los más utilizados son los cartesianos, pero no son los únicos. Para localizar un punto en el plano también es frecuente usar coordenadas polares. En estos sistemas de referencia lo que se proporciona es la distancia al origen, *r*, y el ángulo que forma el vector posición con el semieje positivo del eje *X*, θ. Se muestra en la siguiente figura.**



a) Si un objeto se localiza en las coordenadas cartesianas (3, 8), ¿cuáles serán sus coordenadas polares?

b) Si las coordenadas polares de un punto son (4, 120°), ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas?

c) ¿Cuáles son las ecuaciones generales para transformar coordenadas cartesianas en polares, y viceversa?

a) Si las coordenadas cartesianas son (3, 8), de la figura se puede deducir que:

$$r = \sqrt{3^2 + 8^2} = 8{,}54$$

$$\text{sen } \theta = \frac{8}{8{,}54} \Rightarrow \theta = 69{,}5°$$

b) Si las coordenadas polares son (4, 120°), de la figura se puede deducir que:

$$x = 4 \cdot \cos 120° = -2$$

$$y = 4 \cdot \text{sen } 120° = 3{,}46$$

c) En general, para transformar unas coordenadas en otras se procede como sigue:

$$(x, y) \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\, \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$(r, \theta) \Rightarrow \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \text{sen } \theta \end{cases}$$

Movimientos rectilíneos

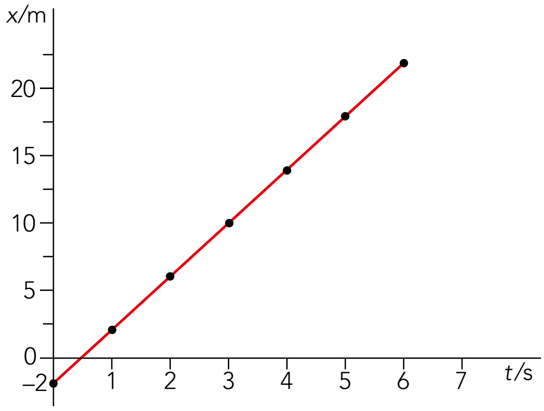
13 **Dibuja la gráfica posición-tiempo y velocidad-tiempo de los movimientos de ecuaciones:**

a) $x = (-2 + 4 \cdot t)$ **m.**

b) $x = (3 - 9 \cdot t)$ **m.**

Determina, en cada caso, los valores iniciales de posición y velocidad y los del instante $t = 3$ **s.**

a) Para la función $x = (-2 + 4 \cdot t)$, obtenemos la siguiente gráfica:



En el punto inicial, es decir, cuando $t = 0$:

$$x_0 = (-2 + 4 \cdot 0) = -2 \text{ m}$$

La velocidad será la derivada y sustituyendo:

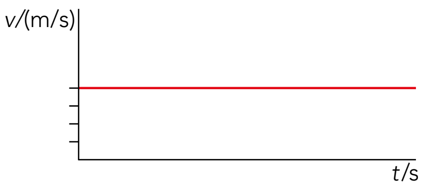
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\,(-2 + 4 \cdot t)}{dt} = 4 \text{ m/s}$$

Si $t = 3$ s, los valores de posición y velocidad son:

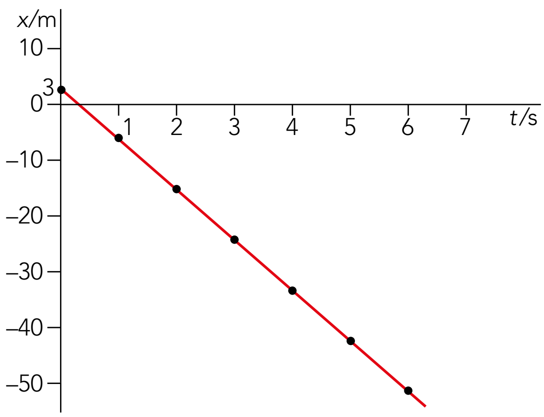
$$x_3 = (-2 + 4 \cdot 3) = 10 \text{ m}$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Por tanto, la velocidad se mantiene constante en el tiempo. Así, su gráfica es:



b) Por otra parte, para la función $x = (3 - 9 \cdot t)$, su gráfica será:



En el instante inicial, cuando $t = 0$, la posición y la velocidad en este movimiento son:

$$x_0 = (3 - 9 \cdot 0) = 3 \text{ m}$$

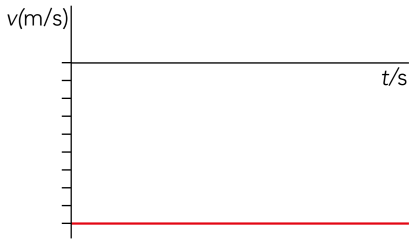
$$v_0 = \frac{dx}{dt} = \frac{d\,(3 - 9 \cdot t)}{dt} = -9 \text{ m/s}$$

Cuando $t = 3$ s, la velocidad y la posición serán:

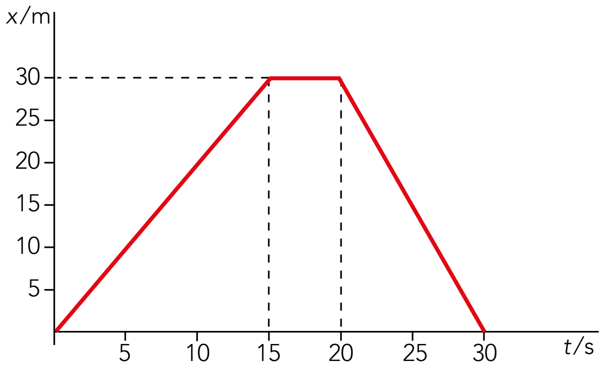
$$x_3 = (3 - 9 \cdot 3) = -24 \text{ m}$$

$$v_3 = -9 \text{ m/s}$$

En este caso, igual que en el anterior, la velocidad se mantiene constante también. Por tanto, su gráfica será similiar a la del caso anterior:



14 **La gráfica *x*-*t* del movimiento de un cuerpo es:**



Describe el movimiento en cada tramo, y calcula:

a) Las ecuaciones de la posición y la velocidad en cada tramo.

b) La distancia al origen en *t* = 10 s, *t* = 17 s y *t* = 25 s.

c) El vector velocidad media entre *t* = 10 s y *t* = 25 s.

d) El módulo del vector desplazamiento en cada tramo, y el total.

a) Las ecuaciones de la posición y la velocidad son:

Tramo I, desde $t_0 = 0$ hasta $t_1 = 15$ s; es un MRU:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 \text{ m}}{15 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

$$x = v \cdot t \rightarrow x = 2 \cdot t \text{ m}$$

Tramo II, desde $t_1 = 15$ s hasta $t_2 = 20$ s, está en reposo. La posición no varía con el tiempo. Sus ecuaciones serán:

$$x = 30 \text{ m}$$

$$v = 0$$

Tramo III, desde $t_2 = 20$ s hasta $t_3 = 30$ s; es un MRU:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-30 \text{ m}}{10 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + v \cdot \Delta t \rightarrow x = [30 - 3 \cdot (t - 20)] \text{ m}$$

b) Como se puede ver en la gráfica, o calcular de las expresiones *x*-*t* correspondientes a cada caso, la distancia al origen será:

$$t = 10 \text{ s} \rightarrow x_{10} = 20 \text{ m}$$
$$t = 17 \text{ s} \rightarrow x_{17} = 30 \text{ m}$$
$$t = 25 \text{ s} \rightarrow x_{25} = 15 \text{ m}$$

En el último caso, debemos recordar que el móvil ha recorrido 45 m y que está a 15 m del origen, que son los que le quedan por recorrer. A partir de t = 15 s, el móvil se acerca al origen.

c) El vector velocidad media entre t = 10 s y t = 25 s es:

$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{(15 \text{ m} - 20 \text{ m}) \cdot \vec{i}}{15 \text{ s}} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

d) El módulo del vector desplazamiento en cada tramo será:

Tramo I:

$$\Delta\vec{r}_{\text{I}} = (30 \text{ m} - 0 \text{ m}) \cdot \vec{i} = 30 \cdot \vec{i} \text{ m} \rightarrow |\Delta\vec{r}_{\text{I}}| = 30 \text{ m}$$

Tramo II: el vector desplazamiento es nulo.

Tramo III:

$$\Delta\vec{r}_{\text{III}} = (0 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{i}) \text{ m} = -30 \cdot \vec{i} \text{ m} \rightarrow |\Delta\vec{r}_{\text{III}}| = 30 \text{ m}$$

El total será:

$$\Delta\vec{r}_{\text{total}} = (30 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{i}) \text{ m} = 0 \cdot \vec{i} \text{ m} \rightarrow |\Delta\vec{r}_{\text{total}}| = 0 \text{ m}$$

15 Desde el origen de coordenadas, con una diferencia de 10 s, parten dos móviles en la misma dirección y sentido. El primero se mueve a 15 m/s. ¿A qué velocidad constante ha de moverse el segundo para alcanzarlo en 20 s? Resuelve el problema gráficamente, y comprueba que se obtienen los mismos resultados que si se resolviera numéricamente.

La ecuación de la posición para un MRU es:

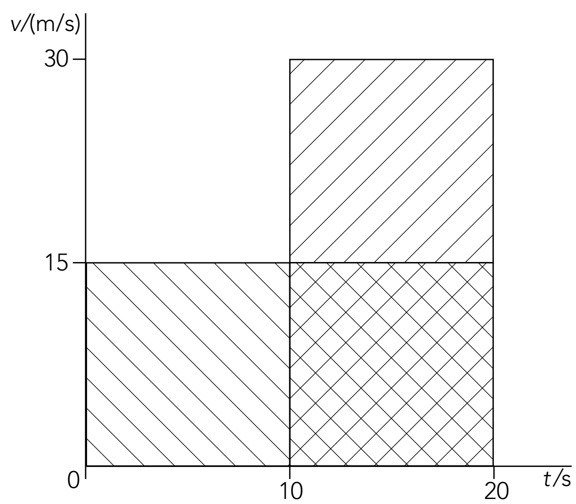
$$x = v \cdot t$$

Si planteamos las ecuaciones de los dos movimientos, y tenemos en cuenta que cuando se encuentran se cumple que $x_1 = x_2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = v_1 \cdot t_1 = 15 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} \\ x_2 = v_2 \cdot (t_2 - t_1) = v_2 \cdot 10 \text{ s} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} 15 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} = v_2 \cdot 10 \text{ s} \\ v_2 = 30 \text{ m/s} \end{array}$$

Gráficamente, al representar la velocidad frente al tiempo, el área será el espacio recorrido. Para que sea la misma área, la velocidad debe ser el doble de la primera, como podemos ver en la gráfica de la derecha.

Otra opción sería representar las gráficas *x*-*t* de los dos movimientos y determinar gráficamente la pendiente de la segunda recta.



16 **Un móvil, inicialmente en reposo, adquiere una velocidad de 20 m/s en 15 s. Determina las ecuaciones de la posición, la velocidad y aceleración. Representa gráficamente estas magnitudes y determina sus módulos en el instante *t* = 10 s.**

Si consideramos un MRUA:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Se considera que parte del origen de coordenadas; al partir del reposo, v_0 será nula. Calculamos su aceleración:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s}}{15 \text{ s}} = 1,\widehat{3} \text{ m/s}^2$$

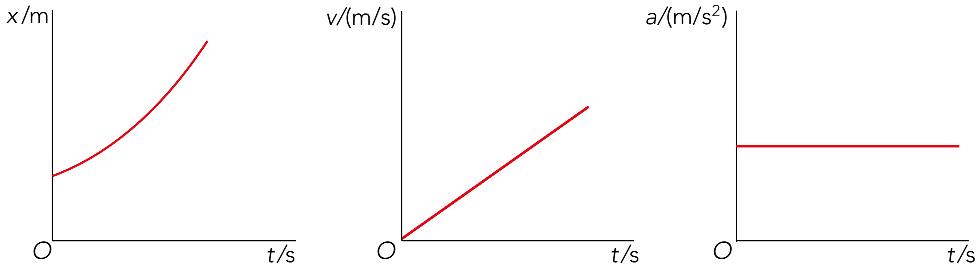
La ecuación del espacio es:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,\widehat{3} \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow x = 0,67 \cdot t^2 \text{ m}$$

Y la de la velocidad será:

$$v = a \cdot t \qquad\qquad v = 1,33 \cdot t \text{ m/s}$$

Gráficamente, podemos representarlas así:



Para t = 10 s, los valores del espacio, la velocidad y la aceleración son:

$$x_{10} = 0,67 \cdot 10^2 = 66,67 \text{ m}$$

$$v_{10} = 1,33 \cdot 10 = 13,33 \text{ m/s}$$

$$a_{10} = 1,33 \text{ m/s}^2$$

17 **Un camión circula por una recta a 100 km/h. Detrás de él, a una distancia de 30 m, lo hace una moto a la misma velocidad. En un instante (*t* = 0), el motorista decide adelantar al vehículo, invirtiendo 10 s en situarse 20 m delante. ¿Qué espacio recorre cada vehículo durante el adelantamiento?**

Para determinar el espacio recorrido por ambos vehículos, primero calculamos el espacio recorrido por el camión, que sigue un MRU:

$$\Delta x_{\text{camión}} = v \cdot t = 27,78 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = 277,8 \text{ m}$$

El espacio recorrido por el coche será 50 m más: 30 m antes de adelantarlo y 20 m al situarse delante:

$$\Delta x_{\text{coche}} = 30 \text{ m} + 277,8 \text{ m} + 20 \text{ m} = 327,8 \text{ m}$$

18 **La aceleración de frenado de un vehículo es de 5 m/s². Calcula:**

a) **La distancia de frenado cuando circula a 60 km/h, y cuando lo hace a 120 km/h.**

b) **La distancia de frenado en ambos casos, si el tiempo de reacción del conductor es de 1 s.**

c) **Sin tener en cuenta el tiempo de reacción, ¿qué relación existe entre el tiempo y la velocidad inicial?**

Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado (aceleración negativa). Las ecuaciones del movimiento son:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow v = v_0 + a \cdot t$$

a) En primer lugar, pasamos las velocidades al SI de unidades (m/s):

$$v_{01} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 16{,}67\ \text{m/s}$$

$$v_{02} = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 33{,}33\ \text{m/s}$$

Para determinar la distancia de frenado, debemos conocer el tiempo que tarda en recorrer dicha distancia. Al frenar, la velocidad final será nula y conocida la velocidad inicial, podemos determinarlo:

- Para v = 60 km/h: $0\ \text{m/s} = 16{,}67\ \text{m/s} - 5\ \text{m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 3{,}33\ \text{s}$

$$d_{60} = 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 3{,}33\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{m/s}^2 \cdot (3{,}33\ \text{s})^2 = 27{,}8\ \text{m}$$

- Para v = 120 km/h: $0\ \text{m/s} = 33{,}33\ \text{m/s} - 5\ \text{m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 6{,}67\ \text{s}$

$$d_{120} = 33{,}33\ \text{m/s} \cdot 6{,}67\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}67\ \text{s})^2 = 111{,}1\ \text{m}$$

b) El tiempo de reacción es el tiempo que transcurre desde que el conductor ve el obstáculo hasta que pisa el freno y el vehículo comienza a frenar. Por tanto, durante ese tiempo el vehículo circula a la velocidad inicial uniformemente y recorre una distancia inicial que incrementa la distancia de frenado calculada en el apartado anterior:

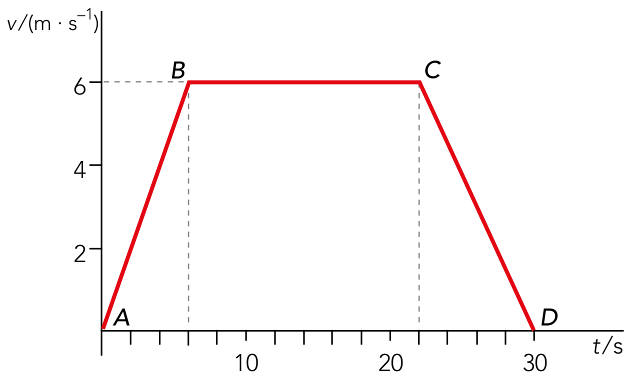
- Para v = 60 km/h: $d'_{60} = 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 1\ \text{s} + 27{,}8\ \text{m} = 44{,}5\ \text{m}$
- Para v = 120 km/h: $d'_{120} = 33{,}33\ \text{m/s} \cdot 1\ \text{s} + 111{,}1\ \text{m} = 144{,}4\ \text{m}$

c) Al ser la velocidad final 0, la relación entre el tiempo y la velocidad inicial viene determinada por la expresión:

$$0 = v_0 - a \cdot t \rightarrow t = \frac{v_0}{a} \rightarrow t = \left(\frac{v_0}{5}\right)$$

Página 218

19 Calcula la aceleración en cada tramo y el espacio total recorrido por el móvil representado por la gráfica:



Tramo I: se trata de un MRUA. El valor de su aceleración y del espacio que recorre son:

$$a_I = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6\ \text{m/s} - 0}{6\ \text{s}} = 1\ \text{m/s}^2$$

$$\Delta x_I = x_0 + v_0 \cdot t_I + \frac{1}{2} \cdot a_I \cdot t_I^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1\ \text{m/s}^2 \cdot (6\ \text{s})^2 = 18\ \text{m}$$

Tramo II: es un MRU. En este caso, su aceleración es nula, pues va a velocidad constante, y el espacio que recorre es:

$$a_{II} = 0$$
$$\Delta x_{III} = v_{II} \cdot t = 6\ \text{m/s} \cdot 16\ \text{s} = 96\ \text{m}$$

Tramo III: es un MRUA. En este tramo, para hallar el espacio, vamos a suponer que $x_0 = 0$. Así, su aceleración y su posición serán:

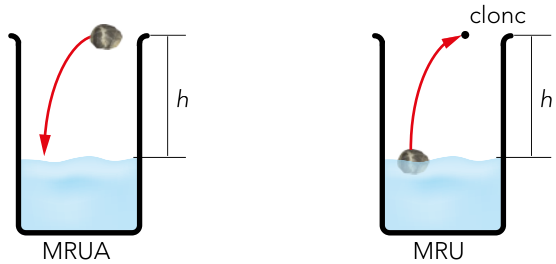
$$a_{III} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0-6)\ \text{m/s}}{8\ \text{s}} = -0{,}75\ \text{m/s}^2$$
$$\Delta x_{III} = x_0 + v_{II} \cdot t_{III} + \frac{1}{2} \cdot a_{III} \cdot t_{III}{}^2 = 0 + 6\ \text{m/s} \cdot 8\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}75\ \text{m/s}^2 \cdot 8^2 = 24\ \text{m}$$

El espacio total recorrido es la suma de los espacios recorridos en los tres tramos:

$$x = \Delta x_I + \Delta x_{II} + \Delta x_{III} = 18\ \text{m} + 96\ \text{m} + 24\ \text{m} = 138\ \text{m}$$

20 Para medir la profundidad de un pozo se puede dejar caer una piedra desde su boca y medir el tiempo que tardamos en oír el impacto con el agua. Determina la ecuación que nos permite obtener esta profundidad en función del tiempo medido; ten en cuenta el tiempo que tarda en llegar el sonido, con velocidad v_s.

Para poder realizar el ejercicio, representamos primero lo que ocurre al tirar la piedra al pozo:



La caída de la piedra al pozo es un MRUA, pues es un movimiento tipo caída libre. El sonido que se escucha cuando la piedra impacta en el fondo (clonc) es un MRU, pues la velocidad del sonido es constante. Ambos movimientos recorren la misma distancia: h, la altura del pozo (ecuaciones [1] y [2]). Además, el tiempo que tarda en escucharse el sonido es la suma del tiempo que tarda la piedra en caer más el tiempo que tarda en subir el sonido (ecuación [3]). Por tanto, podemos plantear:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_c^2 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \qquad [1]$$
$$h = v_s \cdot t_s \rightarrow t_s = \frac{h}{v_s} \qquad [2]$$
$$t = t_c + t_s \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v_s} \qquad [3]$$

A partir de este punto, ya solo realizamos cálculos matemáticos:

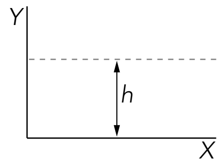
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v_s} \rightarrow \left(t - \frac{h}{v_s}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\right)^2$$
$$t^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t \cdot \frac{h}{v_s} = \frac{2 \cdot h}{g} \rightarrow \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t \cdot \frac{h}{v_s} - 2 \cdot \frac{h}{g} + t^2 = 0$$

Por tanto, equiparando esto a una ecuación de segundo grado completa, podemos decir que:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{v_s^2}}_{A} \cdot h^2 - \underbrace{\frac{2 \cdot (v_s + g \cdot t)}{v_s \cdot g}}_{B} \cdot h + \underbrace{t^2}_{C} = 0$$

21 Un objeto en caída libre recorre la cuarta parte de la altura inicial en los últimos 0,75 s. ¿Desde qué altura se dejó caer? ¿Con qué velocidad impacta con el suelo? Elabora un listado con los pasos que has seguido para resolver el problema.

De acuerdo con el enunciado del problema, la altura inicial, $y = h$, es:



Por tanto, las ecuaciones de la posición y la velocidad, de acuerdo con el sistema de referencia anterior, son:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = -g \cdot t$$

El tiempo total de caída, T, corresponde a la posición $y\,(T) = 0$; por tanto:

$$y\,(T) = 0 \;\rightarrow\; h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2 = 0 \;\rightarrow\; T = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \qquad [1]$$

Durante los últimos 0,75 s (t_0 = 0,75 s), el objeto recorre un cuarto de la altura total. Por tanto, en el instante de tiempo $T - t_0$, el objeto habrá recorrido 3/4 de la altura inicial, y se encontrará a una altura h/4 respecto al suelo; así, respecto al S. R. elegido, la posición del objeto será:

$$y\,(T - t_0) = \frac{h}{4} \;\rightarrow\; \frac{h}{4} = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (T - t_0)^2 \;\rightarrow\; \frac{3}{4} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (T - t_0)^2$$

De donde despejamos la diferencia de tiempo que tarda en recorrer los 3/4 de altura que desconocemos:

$$T - t_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot h}{2 \cdot g}} \qquad [2]$$

Si igualamos ahora las expresiones [1] y [2], resulta:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} - t_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot h}{2 \cdot g}} \;\rightarrow\; t_0 = \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Si se despeja h se tiene:

$$h = \frac{t_0^2 \cdot 2 \cdot g}{(2 - \sqrt{3})^2}$$

Al sustituir los valores de que disponemos, resulta:

$$h = \frac{(0{,}75 \text{ s})^2 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{(2 - \sqrt{3})^2} = 153{,}6 \text{ m}$$

El tiempo total, T, puede obtenerse a partir de las expresiones [1] o [2]; así, para [1], más sencilla, se tiene:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 153{,}6 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 5{,}59 \text{ s}$$

La velocidad de impacto con el suelo, sin tener en cuenta su signo, será:

$$v = g \cdot T \;\rightarrow\; v = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 5{,}59 \text{ s} = 54{,}9 \text{ m/s}$$

22 **Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota a 25 m/s. ¿En qué instantes la celeridad es 10 m/s? Desde un punto de vista físico, ¿por qué se obtienen dos valores? ¿A qué altura está la pelota en estos instantes? Representa, para esos dos puntos, los vectores posición, velocidad y aceleración.**

Teniendo en cuenta que el movimiento es una ascensión libre seguida de una caída libre, diremos que las ecuaciones que lo definen son:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = v_0 - g \cdot t \rightarrow t = \frac{v - v_0}{-g}$$

El enunciado nos dice que la celeridad es de 10 m/s, es decir:

$$c = 10 \text{ m/s} \rightarrow v = \pm 10 \text{ m/s}$$

Por tanto, si sabemos que la velocidad inicial son 25 m/s, podemos calcular el tiempo de ascenso y de descenso, en unidades del SI:

Ascenso: $v = 10 \text{ m/s} \;\; 8 \;\; t_1 = \dfrac{10 - 25}{-9{,}81} = 1{,}53 \text{ s}$

Descenso: $v = -10 \text{ m/s} \;\; 8 \;\; t_2 = \dfrac{-10 - 25}{-9{,}81} = 3{,}57 \text{ s}$

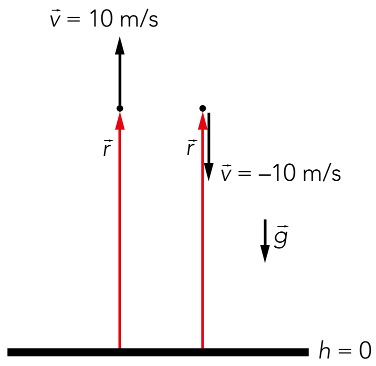
Así, las alturas recorridas en esos tiempo son:

Ascenso: $h = 25 \cdot 1{,}53 - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}53^2 = 26{,}77 \text{ m}$

Descenso: $h = 25 \cdot 3{,}57 - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}57^2 = 26{,}74 \text{ m}$

Luego, como esperábamos, los valores son prácticamente iguales. Así, la altura a la que se encuentra la pelota es de 26,75 m, cuando la celeridad es de 10 m/s.

La representación de los vectores posición, velocidad y aceleración en esos puntos es:

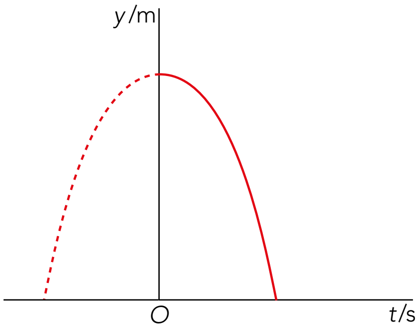


23 **La altura a la que se encuentra un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que lleva moviéndose. Por ello, cuando se resuelve la ecuación *y*(*t*) = 0 se obtienen dos soluciones, una de ellas negativa. ¿Qué significado podríamos darle a la solución negativa, que siempre desechamos?**

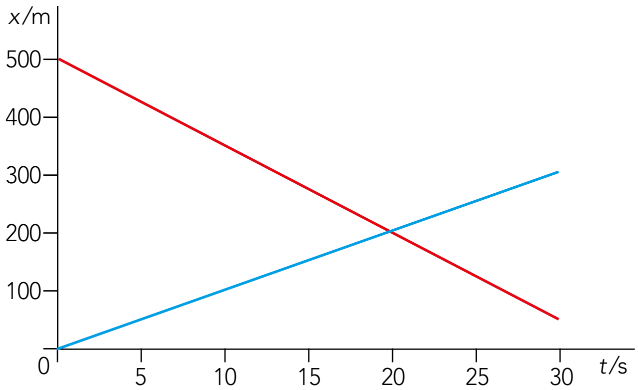
La ecuación a la que nos referimos es:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

La solución corresponde gráficamente al corte de la función parabólica con el eje de las *X* (el tiempo). Dado que valores negativos de tiempo no tienen sentido físico, se desecha el valor. Podemos comprobarlo al observar su representación:



24 **Observa el siguiente gráfico y explica a qué situación cotidiana puede hacer referencia, indicando los valores de las magnitudes cinemáticas de los movimientos que se representan.**



La gráfica representa los movimientos uniformes de dos móviles que se desplazan sobre la trayectoria en sentidos contrarios. Por ejemplo, dos vehículos que se cruzan en una carretera (no necesariamente una recta, aunque podría serlo).

El primero se mueve en el sentido positivo de la trayectoria y recorre 300 m en 30 s, por lo que su celeridad es v_1 = 10 m/s; el segundo lo hace en sentido negativo recorriendo 450 m en 30 s, por lo que su celeridad es v_2 = 15 m/s. Los dos vehículos se cruzan a los 20 s de empezar a estudiar el movimiento, a 200 m del origen de movimientos

25 **En un lazamiento vertical ascendente, ¿de qué variables depende el tiempo que se tarda en alcanzar la altura máxima? ¿Qué relaciones de proporcionalidad guarda con cada una de ellas?**

La ascensión libre viene descrita por las ecuaciones:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2 \quad ; \quad v = v_0 - g \cdot t$$

Cuando la altura sea máxima, la velocidad en ese punto es nula, por tanto:

$$h = h_{máx} \rightarrow v = 0 \rightarrow v_0 = g \cdot t_v \rightarrow t_v = \frac{v_0}{g}$$

Luego, el tiempo de vuelo, es decir, el que tarda en alcanzar la altura máxima, depende de la velocidad inicial y de la gravedad. Las relaciones de proporcionalidad son:

$t_v \propto v_0$; directamente proporcional

$t_v \propto \frac{1}{g}$; inversamente proporcional

26 **Dos vehículos, *A* y *B*, circulan por una carretera recta sobre la que situamos el eje *X* de nuestro sistema de coordenadas. Cuando el vehículo que circula con velocidad constante $\vec{v} = 90 \cdot \hat{i}$ km/h, pasa por el origen de coordenadas, el *B* comienza, desde el reposo, un movimiento uniformemente acelerado en sentido contrario desde la posición $x = 500$ m. ¿Con qué aceleración debe describir *B* su movimiento para cruzarse con *A* en $x = 300$ m? ¿Qué velocidad lleva en ese momento, en km/h?**

Como los dos movimientos se realizan sobre el eje *X* podemos trabajar con los módulos de las magnitudes.

Las ecuaciones del movimiento de *A* son:

$$x_A = v_A \cdot t$$

Las ecuaciones del movimiento de *B* son ($v_{0B} = 0$):

$$x_B = x_{0B} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v_B = -a \cdot t$$

Como se tienen que cruzar en $x = 300$ m, en primer lugar, calculamos el tiempo que tarda *A* en llegar a esa posición (unidades SI):

$$x_A = 300 = 25 \cdot t \Rightarrow t = 12 \text{ s}$$

Este es el tiempo que debe tardar *B* en llegar a esa posición, por lo que:

$$x_B = x_{0B} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = 2 \cdot \frac{x_{0B} - x_B}{t^2} = 2 \cdot \frac{500 - 300}{12^2} = 1{,}4 \text{ m/s}^2$$

Pasado este tiempo, la celeridad de *B* es (en unidades SI):

$$v_B = -a \cdot t = -1{,}4 \cdot 12 = -16{,}8 \text{ m/s} = -60{,}5 \text{ km/h}$$

Y la velocidad:

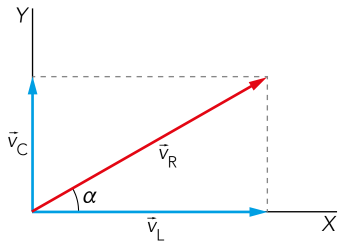
$$\vec{v} = -60{,}5 \cdot \vec{i} \text{ km/h}$$

Composición de movimientos

27 **Una lancha motora se mueve, según su panel de mandos, a 20 nudos con la proa orientada en dirección este. Si se encuentra inmersa en una corriente marina de 5 km/h dirección norte, ¿cuál es su velocidad respecto a la costa? Para moverse hacia el este respecto a costa, ¿hacia qué dirección se debería enfocar la proa?**

Dato: 1 nudo = 1,852 km/h.

La lancha y la corriente se mueven según el siguiente esquema:



Las velocidades de la lancha y de la corriente en unidades de SI son:

$$v_L = 20 \text{ nudos} \cdot 1{,}852 \frac{\text{km/h}}{\text{nudo}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 10{,}29 \text{ m/s}$$

$$v_C = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 1{,}39 \text{ m/s}$$

Según el principio de superposición, la velocidad respecto a la costa será:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_L + \vec{v}_C = v_L \cdot \vec{i} + v_C \cdot \vec{j}$$

$$v_R = \sqrt{v_L^2 + v_C^2} = \sqrt{10{,}29^2 + 1{,}39^2} = 10{,}38 \text{ m/s}$$

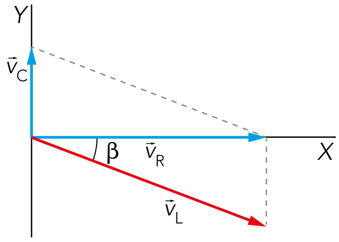
El ángulo que forman estas dos velocidades (α) es:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v_C}{v_L} = \frac{1{,}39 \text{ m/s}}{10{,}29 \text{ m/s}} = 0{,}13 \rightarrow \alpha = 7{,}7°$$

Para ir hacia el este, la dirección a la que debe enfocar la proa será aquella cuya componente *y* anule la velocidad de la corriente; esto es:

$$v_L \cdot \text{sen}\,\beta = -v_C \rightarrow \beta = \text{arcsen}\left(\frac{-v_C}{v_L}\right) = \text{arcsen}\,\frac{-1{,}39 \text{ m/s}}{10{,}29 \text{ m/s}} = -7{,}8°$$

El esquema vectorial de velocidades es:



28 **Con una piragua, una persona tarda tres minutos en recorrer 200 m cuando rema a favor de la corriente, y cinco minutos cuando lo hace en contra, en ambos casos a velocidad constante. A esta velocidad, si rema perpendicularmente a la corriente, invierte cuatro minutos en cruzar el río. Calcula la velocidad de la piragua, la velocidad de la corriente y la anchura del río. ¿En qué dirección debería remar para cruzar el río perpendicularmente a la orilla, y cuánto tiempo tardaría en hacerlo?**

Según el principio de superposición, la velocidad resultante será la suma cuando corriente y piragua vayan en el mismo sentido, y la resta, cuando su movimiento es en sentido contrario. El espacio recorrido por cada una viene dado por:

$$d = (v_p + v_r) \cdot t_1$$

$$d = (v_p - v_r) \cdot t_2$$

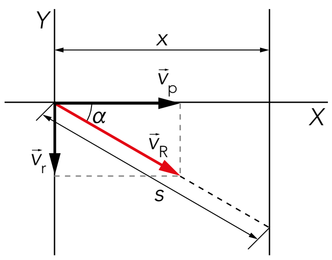
Resolviendo el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas calculamos v_p y v_r:

$$\left.\begin{array}{l} 200 = (v_p + v_r) \cdot 180 \\ 200 = (v_p - v_r) \cdot 300 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1{,}11 = v_p + v_r \\ 0{,}67 = v_p - v_r \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} v_p = 0{,}67 + v_r \\ 1{,}11 = 0{,}67 + 2 \cdot v_r \end{array}$$

$$v_r = 0{,}22 \text{ m/s}$$

$$v_p = 0{,}67 + 0{,}22 = 0{,}89 \text{ m/s}$$

Según el esquema:



Al remar perpendicularmente, la velocidad resultante será:

$$v_R = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{0{,}22^2 + 0{,}89^2} = 0{,}92 \text{ m/s}$$

El espacio recorrido en este tiempo (t = 4 min) es:

$$s = v \cdot t = 0{,}92 \text{ m/s} \cdot 240 \text{ s} = 220{,}8 \text{ m}$$

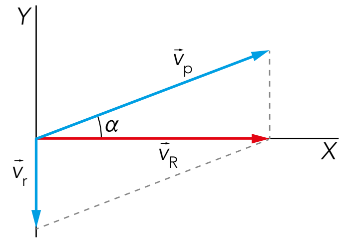
Por tanto, la anchura del río es:

$$\cos\alpha = \frac{x}{s} \rightarrow x = \cos\alpha \cdot s = \frac{0{,}89}{0{,}92} \cdot 220{,}8 \text{ m} = 213{,}6 \text{ m}$$

Para cruzarlo perpendicularmente se debe cumplir que:

$$v_p \cdot \text{sen}\,\alpha = v_r \rightarrow \alpha = \text{arcsen}\,\frac{v_r}{v_p} = \text{arcsen}\,\frac{0{,}22 \text{ m/s}}{0{,}89 \text{ m/s}} = 14{,}3°$$

El esquema vectorial de velocidades es:



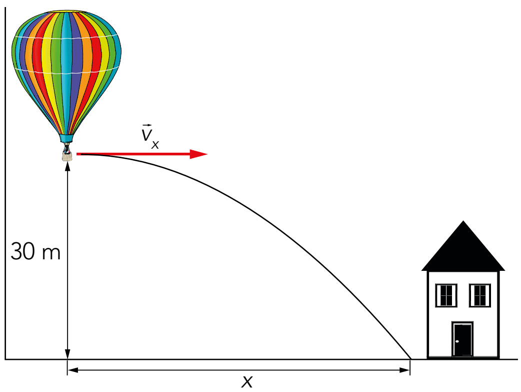
El tiempo que tarda en cruzarlo es:

$$x = v_p \cdot \cos\alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_p \cdot \cos\alpha} = \frac{213{,}6 \text{ m}}{0{,}89 \text{ m/s} \cdot \cos 14{,}3°} = 247{,}7 \text{ s}$$

29 **Un pasajero de un globo aerostático que viaja a 10 nudos con trayectoria paralela al suelo a 30 m de altura quiere soltar un paquete de modo que caiga en el patio de su casa, por encima del cual pasará el globo. Si despreciamos el rozamiento con el aire, ¿en qué punto de la trayectoria deberá soltarlo? ¿Qué tipo de movimiento describe el paquete para el pasajero del globo? ¿Y para alguien que está esperando en el patio?**

Dato: 1 nudo = 1,852 km/h.

Se trata de un tiro horizontal:



Las ecuaciones del movimiento son:

Eje X:

$$v_x = \text{cte} \rightarrow v_x = 10 \text{ nudos} \cdot 1{,}852\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 5{,}14 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

Eje Y:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow v_{0y} = 0 \rightarrow v_y = -g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow v_{0y} = 0 \rightarrow y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Aplicando estas ecuaciones, podemos calcular, en primer lugar, el tiempo de vuelo del paquete (hasta que $y = 0$ y toque el suelo):

$$0 = 30\ \text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = 6{,}12 \rightarrow t = 2{,}48\ \text{s}$$

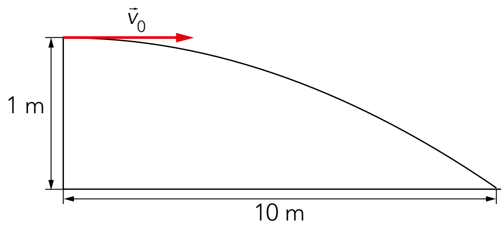
Por tanto, el punto en que se debe soltar es:

$$x = 5{,}14\ \text{m/s} \cdot 2{,}48\ \text{s} = 12{,}7\ \text{m}$$

Si se considera el sistema de referencia el globo, el tiro será una caída libre. Si consideramos un observador en el patio, es un tiro horizontal.

30 La boca de una manguera, de 2 cm de diámetro, se sitúa de modo que, a 1 m de altura, el chorro de agua sale horizontal al suelo. Si el agua se aleja 10 m, ¿cuántos litros salen por minuto? Pista: m/s · m² = m³/s.

Es un tiro horizontal, donde la velocidad inicial en el eje *Y* es 0. Según el siguiente esquema:



Las ecuaciones del movimiento son:

Eje *X*: $v_x = \text{cte}$

$$x = x_0 + v_x \cdot t \rightarrow x = v_x \cdot t$$

Eje *Y*: $v_y = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow v_{0y} = 0 \rightarrow v_y = -g \cdot t$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

El tiempo que tarda el agua en llegar al suelo será:

$$0 = 1\ \text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = 0{,}45\ \text{s}$$

Y la velocidad con la que el agua sale de la manguera es:

$$10\ \text{m} = v_x \cdot 0{,}45\ \text{s} \rightarrow v_x = \frac{10\ \text{m}}{0{,}45\ \text{s}} = 22{,}14\ \text{m/s}$$

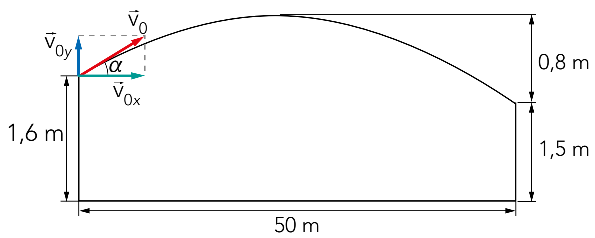
Así el caudal será la superficie de la manguera por la velocidad de salida del agua:

$$C = S \cdot v_x = \pi \cdot r^2 \cdot v_x = \pi \cdot (0{,}01\ \text{m})^2 \cdot 22{,}14\ \text{m/s} = 6{,}96 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3\text{/s} = 6{,}96\ \text{L/s}$$

Página 219

31 En una competición de tiro con arco la diana, de 80 cm de diámetro, se encuentra a 50 m de distancia, y su centro a 1,5 m del suelo. En uno de los tiros la flecha sale a 230 km/h, con un ángulo de 3,5°, desde una altura de 1,60 m. Despreciando el rozamiento con el aire, ¿impactará la flecha en la diana? En caso afirmativo, ¿con qué velocidad, y en qué dirección?

Se trata de un tiro oblicuo. La gráfica que representa este movimiento en concreto es:



Las ecuaciones para un tiro oblicuo son:

Eje *X*: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha = 63{,}89 \text{ m/s} \cdot \cos 3{,}5° = 63{,}77 \text{ m/s}$

$$x = v_{0x} \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Eje *Y*: $v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen } \alpha = 63{,}89 \text{ m/s} \cdot \text{sen } 3{,}5° = 3{,}90 \text{ m/s}$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Sustituyendo el tiempo en la ecuación de *y*, obtenemos la ecuación de la trayectoria. Así, podemos calcular *y* cuando *x* = 50 m:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

$$y = 1{,}60 \text{ m} + \frac{3{,}90 \text{ m/s}}{63{,}77 \text{ m/s}} \cdot 50 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{(50 \text{ m})^2}{(63{,}77 \text{ m/s})^2} = 1{,}64 \text{ m}$$

Por tanto, la flecha impacta contra la diana. La velocidad del impacto será:

$$v_x = v_{0x} = 63{,}77 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = v_{0y} - g \cdot \frac{x}{v_{0x}} = 3{,}90 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{50 \text{ m}}{63{,}77 \text{ m/s}} = -3{,}79 \text{ m/s}$$

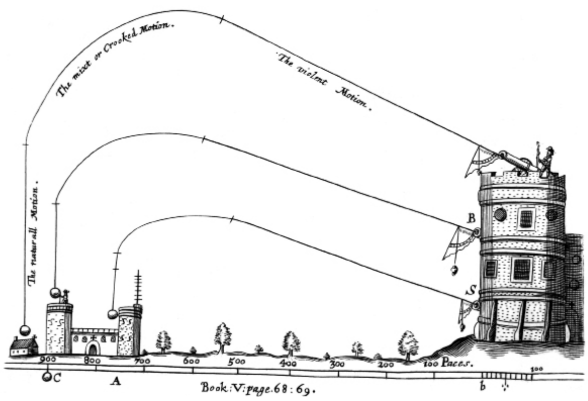
Así, el módulo de la velocidad es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{63{,}77^2 + (-3{,}79)^2} = 63{,}88 \text{ m/s}$$

Y la dirección:

$$\alpha = \text{arctg } \frac{v_y}{v_x} = \text{arctg } \frac{(-3{,}79 \text{ m/s})}{63{,}77 \text{ m/s}} = -3{,}40°$$

32 **En la Edad Media se pensaba que el movimiento de proyectiles tenía lugar según se muestra en la siguiente imagen. ¿Estaban en lo cierto? Justifícalo.**



No estaban en lo cierto, ya que en el eje *X* tiene lugar un MRU; por tanto, en ningún momento la trayectoria puede ser vertical, como se ve en el dibujo.

33 **Desde el extremo del mástil de un velero, de 30 m de altura, se deja caer un cuerpo de 2 kg. Si despreciamos el rozamiento, ¿en qué punto de la cubierta impacta? ¿En qué caso tardará más en caer, si el velero navega a 10 nudos (1 nudo = 1,852 km/h) o si navega a 20 nudos? ¿Y si fuese un cuerpo de 4 kg? Si un observador describe el movimiento como rectilíneo, y otro como parabólico, ¿dónde está cada uno?**

Teniendo en cuenta el principio de inercia, el cuerpo cae en la base del mástil. El tiempo de caída es independiente de la velocidad del velero, pues cualquiera que sea esta el cuerpo cae, en su movimiento vertical, desde la misma altura y sometido a la misma aceleración (la de la gravedad).

El tiempo también es independiente de la masa del cuerpo, como en cualquier caída libre, tipo de movimiento que se atribuiría al objeto desde un sistema de referencia anclado en el velero. Por tanto, caerá en el mismo punto y tardará lo mismo tanto si su masa es de 2 kg, como si es de 4 kg.

El observador que describe el movimiento como rectilíneo se encuentra en el velero (caída libre), y el que lo describe como parabólico se encuentra en un sistema de referencia anclado a la orilla.

34 **¿Coinciden las ecuaciones de un tiro oblicuo a 90° con las de un lanzamiento vertical ascendente?**

Sí, coinciden. Para un tiro oblicuo a 90°, no existe componente de la velocidad en el eje *X*; por tanto, el desplazamiento viene dado por la misma ecuación que en ascensión libre:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

35 **Sabiendo que en el primer cuadrante el valor del seno oscila entre 0 y 1, ¿para qué valor de α será máximo el alcance de un tiro parabólico para unos determinados valores de velocidad inicial y ángulos de lanzamiento?**

Las ecuaciones que definen el tiro oblicuo son:

Eje *X*:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$$

Eje *Y*:

$$y = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_y = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha - g \cdot t$$

Para que el alcance sea máximo, $y = 0$. Así:

$$y = 0 = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$\rightarrow\ t_v = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha}{g}$$

Por tanto, el alcance máximo es:

$$A = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ (2 \cdot \alpha)}{g}$$

Luego *A* será máximo cuando sen $(2 \cdot \alpha) = 1$. Por ello:

$$\text{sen}\ (2 \cdot \alpha) = 1\ \rightarrow\ 2 \cdot \alpha = 90°\ \rightarrow\ \alpha = 45°$$

36 Demuestra que las ecuaciones de un tiro horizontal equivalen a las de un tiro oblicuo desde la misma altura con elevación nula. Comprueba que la ecuación del alcance es dimensionalmente homogénea.

En un tiro parabólico, las ecuaciones pueden simplificarse de esta forma:

Eje *X*: $$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow x(t) = v_0 \cdot t$$

$$v_x = v_{0x} \cdot \cos\alpha \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow v_x = v_{0x}$$

Eje *Y*: $$y(t) = y_0 + v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow y(t) = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_y = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha - g \cdot t \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow v_y = -g \cdot t$$

Así, obtenemos las mismas ecuaciones que en un tiro horizontal.

La ecuación del alcance del tiro horizontal es:

$$x = \frac{v_0^2}{g}$$

El alcance tiene dimensiones de longitud:

$$[x] = \mathrm{L}$$

Las del segundo miembro son:

$$\left[\frac{v_0^2}{g}\right] = \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2 = \mathrm{L}$$

Por tanto, la ecuación es dimensionalmente homogénea.

37 Determina la celeridad inicial y el ángulo de lanzamiento de un proyectil que, lanzado desde el suelo, alcanza una altura máxima de 3 m e impacta a los 10 m del punto de lanzamiento.

Las ecuaciones de la altura máxima y el alcance del tiro parabólico son ($y_0 = 0$):

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\alpha}{2 \cdot g}$$

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha)}{g}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por sustitución (unidades SI):

$$v_0^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_{máx}}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$A = \frac{2 \cdot g \cdot h_{máx} \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha)}{\text{sen}^2\alpha \cdot g} = \frac{2 \cdot h_{máx} \cdot 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{4 \cdot h_{máx} \cdot \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4 \cdot h_{máx}}{A} = 1{,}2 \Rightarrow \alpha = 50{,}2°$$

Con este valor del ángulo de lanzamiento podemos calcular la celeridad inicial con cualquiera de las dos ecuaciones del movimiento (unidades SI):

$$v_0^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_{máx}}{\text{sen}^2\,\alpha} = 99{,}72 \Rightarrow v_0 = 10\ \text{m/s}$$

Por tanto, el proyectil se lanza a 10 m/s con un ángulo de 50,2°.

38 **Un cañón puede disparar balas de diferente masa. En ausencia de rozamiento, ¿llegarán más lejos las más ligeras? Razona tu respuesta y compruébalo en el laboratorio virtual con el que has trabajado en la sección TIC de esta unidad.**

El alcance de un tiro parabólico se relaciona con las magnitudes del lanzamiento a través de la siguiente expresión:

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \alpha)}{g}$$

Se observa que depende de la celeridad inicial, del ángulo de lanzamiento y del valor de la aceleración de la gravedad del lugar en el que se realiza. Por tanto, no depende de la masa del proyectil, por lo que independientemente de esta, el alcance será el mismo. Se puede comprobar en el interactivo mencionado sin más que lanzar varios objetos o cambiar la masa del que se lanza. El simulador permite ambas opciones.