Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

7 DERIVADAS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 1.11.1. (EA 1.11.1.)

Página 195

Resuelve

Movimiento de una partícula

Una investigadora, para estudiar el movimiento de una partícula, la ha iluminado con destellos de *flash* cada décima de segundo (0,1 s) durante cuatro segundos. Esta es la fotografía a tamaño real:

1. **Aproxima la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$ s hallando su velocidad media en los intervalos [2; 2,5] y [2; 2,1]. Para ello, toma medidas sobre la fotografía. Observa que P_2; $P_{2,1}$ y $P_{2,5}$ son las posiciones de la partícula en los instantes 2 s; 2,1 s y 2,5 s, respectivamente.**
2. **Calcula las velocidades medias anteriores tomando valores sobre la ecuación del movimiento de dicha partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$**
3. **Halla ahora las velocidades medias en los intervalos [2; 2,001] y [2; 2,000001] tomando de nuevo valores sobre la ecuación del movimiento de la partícula. ¿Podemos considerar que esta última velocidad media es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s?**

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{12,5}{0,5} = 25 \text{ mm/s} = 2,5 \text{ cm/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{3,5}{0,1} = 35 \text{ mm/s} = 3,5 \text{ cm/s}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \text{ cm} \\ s_2 = \frac{1}{2}(2,5^4 - 8 \cdot 2,5^3 + 18 \cdot 2,5^2) = 13,28 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_1 = \frac{13,28 - 12}{0,5} = 2,56 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_3 = \frac{1}{2}(2,1^4 - 8 \cdot 2,1^3 + 18 \cdot 2,1^2) = 12,37 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_2 = \frac{12,37 - 12}{0,1} = 3,77 \text{ cm/s}$$

3. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_4 = \frac{1}{2}(2,001^4 - 8 \cdot 2,001^3 + 18 \cdot 2,001^2) = 12,003997 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12,003997 - 12}{0,001} = 3,997 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_5 = \frac{1}{2}(2,000001^4 - 8 \cdot 2,000001^3 + 18 \cdot 2,000001^2) = 12,000004 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12,000004 - 12}{0,000001} = 4 \text{ cm/s}$$

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

1 ▶ MEDIDA DEL CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 196

1 Piensa y comparte en pareja. **[La decisión sobre la veracidad de las afirmaciones se puede aprovechar para trabajar esta estrategia].**

¿Verdadero o falso?

a) La T.V.M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo.

b) Si f es creciente en $[a, b]$, su T.V.M. en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su T.V.M. es negativa.

c) Si la T.V.M. de f en $[a, b]$ es 0, significa que f es constante en $[a, b]$.

a) Verdadero.

b) Verdadero. El signo de la T.V.M. depende solo del signo del numerador. Si f es creciente $f(b) > f(a)$, luego el numerador es positivo. Si f es decreciente, $f(b) < f(a)$, luego el numerador es negativo.

c) Falso. Solo podemos afirmar que $f(a) = f(b)$. Esto no quiere decir que sea constante.

2 Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

$[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{0 - 5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

3 Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable $[1, 1 + \text{h}]$.

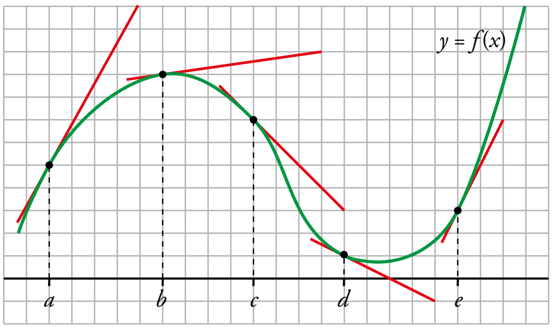
Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + \text{h}] = \frac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \frac{(1 + \text{h})^2 - 8(1 + \text{h}) + 12 - 5}{\text{h}} = \frac{\text{h}^2 - 6\text{h}}{\text{h}} = \frac{\text{h}(\text{h} - 6)}{\text{h}} = \text{h} - 6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 197

4 **Calcula $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$ y $f'(e)$.**



PUNTO	PENDIENTE
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

5 Comprobamos. **[El trabajo con la pendiente de la gráfica que propone el ejercicio puede servir para trabajar esta técnica].**

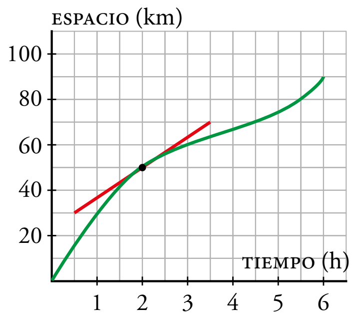
La siguiente gráfica muestra el espacio recorrido por un ciclista a lo largo de una carrera.

a) Calcula su velocidad media entre estas horas:

[1, 2], [1, 3], [1; 4,5], [1; 5,5] y [1, 6]

b) Halla la velocidad que llevaba a las 2 h.

c) Estima su velocidad a las 5 h 30 min.



Vemos los valores que toma la función en cada punto:

$f(1) = 30$ km

$f(2) = 50$ km

$f(3) = 60$ km

$f(4,5) = 70$ km

$f(5,5) = 80$ km

a) $\text{T.V.M.}[1,2] = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 20$ km/h

$\text{T.V.M.}[1,3] = \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = 15$ km/h

$\text{T.V.M.}[1;4,5] = \dfrac{f(4,5)-f(1)}{4,5-1} = \dfrac{40}{3,5} = 11,43$ km/h

$\text{T.V.M.}[1;5,5] = \dfrac{f(5,5)-f(1)}{5,5-1} = \dfrac{50}{4,5} = 11,1$ km/h

b) Aproximamos la velocidad en $t = 2$:

$$\frac{f(2,5) - f(2)}{0,5} = \frac{58 - 50}{0,5} = 16 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(2,25) - f(2)}{0,25} = \frac{54 - 50}{0,25} = 16 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(2) - f(1,5)}{0,5} = \frac{50 - 42}{0,5} = 16 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(2) - f(1,75)}{0,25} = \frac{50 - 46}{0,25} = 16 \text{ km/h}$$

Podemos decir entonces que su velocidad a las dos horas es de 16 km/h.

c) Aproximamos la velocidad en $t = 5{,}5$ (es decir, a las 5 h 30 min):

$$\frac{f(6) - f(5,5)}{0,5} = \frac{90 - 80}{0,5} = 20 \text{ km/h}$$

$$\frac{f(5,5) - f(5)}{0,5} = \frac{80 - 75}{0,5} = 10 \text{ km/h}$$

Haciendo un promedio, podemos decir entonces que su velocidad a las 5 h 30 min es de unos 15 km/h.

2 ▸ OBTENCIÓN DE LA DERIVADA A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 199

Hazlo tú

1 **Halla la derivada de la función $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.**

- $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

  $f(1+h) = \dfrac{3}{1+h-2} = \dfrac{3}{h-1}$

  $f(1) = \dfrac{3}{1-2} = -2$

  $f(1+h) - f(1) = \dfrac{3}{h-1} - (-3) = \dfrac{3h}{h-1}$

  $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \dfrac{3}{h-1}$

  $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{h-1} = -3$

- $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

  $f(-1+h) = \dfrac{3}{-1+h-2} = \dfrac{3}{h-3}$

  $f(-1) = \dfrac{3}{-1-2} = -1$

  $f(-1+h) - f(-1) = \dfrac{3}{h-3} - (-1) = \dfrac{h}{h-3}$

  $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{\frac{h}{h-3}}{h} = \dfrac{1}{h-3}$

  $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h-3} = -\dfrac{1}{3}$

- $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

  $f(5+h) = \dfrac{3}{5+h-2} = \dfrac{3}{h+3}$

  $f(5) = \dfrac{3}{5-2} = 1$

  $f(5+h) - f(5) = \dfrac{3}{h+3} - 1 = \dfrac{-h}{h+3}$

  $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \dfrac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\dfrac{1}{h+3}$

  $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{1}{h+3}\right) = -\dfrac{1}{3}$

2 **Halla la derivada de $y = \dfrac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, 4 y 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $\quad f'(1) = 1 + 7 = 8$ $\quad f'(2) = 9$ $\quad f'(3) = 10$ $\quad f'(4) = 11$ $\quad f'(5) = 12$

Piensa y practica

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La derivada de una función, $y = f(x)$, en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

c) Si $f'(2) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 2.

a) Verdadero.

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 **Halla la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa –2.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 **Halla la derivada de $y = -2x + 4$ en los puntos de abscisas –3, 0, 4 y 7. Explica por qué obtienes en todos los casos el mismo resultado.**

- $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3 + h) - f(-3) = -2(-3 + h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

  $f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

  $f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(7+h) - f(7)}{h}$

  $f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

  $f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 **Halla la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

Calculamos la derivada de forma general y la evaluamos en cada uno de los puntos pedidos.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

3 ▶ FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

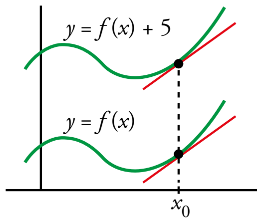
C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 3.5. (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 200

1 **[La comprensión del enunciado propuesto sirve para trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

Las rectas tangentes en un punto cualquiera, x_0, a las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f(x) + 5$ son paralelas.



Eso significa que las dos funciones tienen la misma función derivada.

Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 **Halla la función derivada de $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = x^3 + 2x$.**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 5 - x^2 - 5}{h} = \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} = h + 2x$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - x^3 - 2x}{h} = \frac{(x^2 + h^2 + 2xh)(x+h) + 2x + 2h - x^3 - 2x}{h} =$$

$$= \frac{x^3 + xh^2 + 2x^2h + x^2h + h^3 + 2xh^2 + 2h - x^3}{h} = \frac{3xh^2 + 3x^2h + h^3 + 2h}{h} =$$

$$= 3xh + 3x^2 + h^2 + 2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = 3x^2 + 2 \rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2$$

3 **Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y, a partir de ella, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(5)$.**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\dfrac{3}{x+h-2} - \dfrac{3}{x-2}}{h} = 3 \cdot \frac{\dfrac{x - 2 - x - h + 2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

4 **Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 4$ y $x = 7$.**

$$\frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}} = \frac{\sqrt{x+\mathrm{h}-3}-\sqrt{x-3}}{\mathrm{h}} = \frac{(\sqrt{x+\mathrm{h}-3}-\sqrt{x-3})\,(\sqrt{x+\mathrm{h}-3}+\sqrt{x-3})}{\mathrm{h}\,(\sqrt{x+\mathrm{h}-3}+\sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+\mathrm{h}-3-(x-3)}{\mathrm{h}\,(\sqrt{x+\mathrm{h}-3}+\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{\mathrm{h}+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}} = \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{\mathrm{h}+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 ▸ REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 201

1 Halla las funciones derivadas de estas funciones:

a) $f(x) = x^5$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **e)** $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}$

a) $f'(x^5) = 5x^4$

b) $f'\left(\frac{1}{x^2}\right) = f'(x^{-2}) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

c) $f'\left(\sqrt[3]{x}\right) = f'(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = f'(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f'\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = f'\left(\frac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = f'\left(x^{5/6}\right) = \frac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 203

Hazlo tú

1 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \frac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \frac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\frac{4}{x^{7/3}} = -\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

2 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \frac{1}{125}(5^4)^x = \frac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \frac{1}{125}625^x \ln 625 = \frac{\ln 625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \frac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x^2}$

Piensa y practica

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{x^3}\,e^x = \sqrt{3}\,x^{3/2}\,e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\,e^x + x^{3/2}\,e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^x + x\sqrt{x}\,e^x\right) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x)\,2^x - e^x \cos x\, 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \ln 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x(\cos x - \operatorname{sen} x - \ln 2 \cos x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\, x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\, x + x \cdot 3^x \ln 3 \cdot tg\, x + \frac{x \cdot 3^x}{\cos^2 x}$$

6 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot x - lon_2\, x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2 \log_2 x}{x^2 \ln 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\,x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (\operatorname{sen} x)\left(x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = (\cos x)\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + (\operatorname{sen} x)\,(2x)$$

10 $f(x) = \dfrac{2^x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x - 2^x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{2^x(\ln 2 \cdot \cos x + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$$f(x) = \frac{1}{x}5^x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}5^x + \frac{1}{x}5^x \ln 5 = 5^x \frac{x \ln 5 - 1}{x^2}$$

Página 204

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 7)$

$$f'(x) = (2x - 5)\cos(x^2 - 5x + 7)$$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$$

14 $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(\operatorname{sen}^2\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (\operatorname{sen}\square)' = \cos\square \\ \left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 6\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 3\operatorname{sen}(6x + \pi) = -3\operatorname{sen} 6x$$

15 $f(x) = \dfrac{\log x^2}{x}$

$$f(x) = \frac{2\log x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2(1 - \ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$$

16 $f(x) = \cos(3x - \pi)$

$$f'(x) = -3\operatorname{sen}(3x - \pi)$$

17 $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

18 $f(x) = x\, e^{2x+1}$

$$f'(x) = e^{2x+1} + x\, e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1}(1 + 2x)$$

19 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}\,cos\,(x^2+1) + [x\,sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{2x\,(1-x^2)\,cos\,(x^2+1) + x\,sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

6 ▶ UTILIDADES DE LA FUNCIÓN DERIVADA

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 206

Hazlo tú

1 **Escribe las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva de la función $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Para escribir la ecuación de una recta, debemos conocer un punto y su pendiente.

Hallamos la ordenada en $x = 1 \to f(1) = \dfrac{2+4}{1+1} = \dfrac{6}{2} = 3$

El punto de tangencia es (1, 3).

Hallamos la pendiente de la recta tangente: $m = f'(1)$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+4)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x-4}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$m = f'(1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Recta tangente: $y = -\dfrac{1}{2}(x-1)+3$

Recta normal: $y = 2(x-1)+3$

Página 207

Hazlo tú

1 **Halla los puntos singulares de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ y determina los intervalos donde crece o decrece.**

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x - 12 = 0 \to x^2 - x - 2 = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = 2$

$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \to (-1, 10)$ es un punto singular.

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 3 = -17 \to (2, -17)$ es otro punto singular.

Teniendo en cuenta las ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenemos que los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo $(-1, 2)$ la función decrece.

7 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 1.2.** (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.10.** (EA 1.10.1.) **CE 1.11.** (EA 1.11.1.) **CE 3.5.** (EA 3.5.1- EA 3.5.2.)

Página 209

1 **[El análisis de la función propuesta permite al alumnado trabajar la iniciativa de la dimensión productiva de esta clave].**

Dada la función $y = x^3 - 15x^2 + 63x$, halla:

Su máximo en:

a) [2, 8] **b) [2, 9]** **c) [2, 10]**

Su mínimo en:

d) [2, 8] **e) [1, 8]** **f) [0, 8]**

Llamaremos:

$f(x) = x^3 - 15x^2 + 63x \to f'(x) = 3x^2 - 30x + 63 = x^2 - 10x + 21$

Veamos dónde se anula la derivada:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \to x = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} \to x = 7,\ x = 3$$

a) En [2,8] tenemos dos puntos singulares en $x = 3$ y $x = 7$. Tenemos que ver qué valores toma la función en dichos puntos, además de en los extremos:

$f(2) = 74$

$f(3) = 81$

$f(7) = 49$

$f(8) = 56 \to$ Tiene un máximo en $x = 3$.

b) En [2,9] solamente nos falta estudiar la función en $x = 9$:

$f(9) = 81 \to$ Tiene un máximo en $x = 3$ y $x = 9$.

c) En [2,10] nos falta estudiar la función en $x = 10$:

$f(10) = 130 \to$ Tiene un máximo en $x = 10$.

d) El mínimo está en $x = 7$.

e) Nos falta estudiar la función en $x = 1$:

$f(1) = 49 \to$ Tiene dos mínimos en $x = 7$ y $x = 1$.

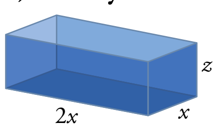
f) Nos falta estudiar la función en $x = 0$:

$f(0) = 0 \to$ El mínimo está en $x = 0$.

2 **Se quiere construir una pecera de metacrilato ortoédrica abierta por arriba, cuya base es un rectángulo el doble de largo que de ancho y con capacidad de 36 dm³. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para minimizar el gasto de material?**

Si el lado menor de la base está comprendido entre:

a) 1 dm y 2 dm **b) 4 dm y 6 dm** **c) Sin restricciones**



$$V = 36 = 2xxz = 2x^2 z \to z = \frac{18}{x^2}$$

$S(x) = 2xz + 4xz + 2x^2 = 6xz + 2x^2$

Sustituimos z en $S(x) = \dfrac{108}{x} + 2x^2$, donde $x > 0$.

a) $x \in [1, 2]$

Veamos los puntos singulares de la función, si pertenecen al intervalo, y qué ocurre en sus extremos:

$S'(x) = -\dfrac{108}{x^2} + 4x = 0 \ \rightarrow \ x = 3$ está fuera de nuestro intervalo.

$S(1) = 110$

$S(2) = 62 \ \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 2$.

Las dimensiones serán 2 dm × 4 dm × 4,5 dm.

b) $x \in [4, 6]$

Veamos qué ocurre en los extremos:

$S(4) = 59$

$S(6) = 90 \ \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 4$.

Las dimensiones serán 4 dm × 8 dm × 1,125 dm.

c) En este caso solamente sabemos que $x > 0$, y que en $x = 3$ hay un punto singular. Veamos si es mínimo viendo cómo se comporta la función en los extremos:

$\lim\limits_{x \to 0} S(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x \to \infty} S(x) = +\infty \ \rightarrow \ x = 3$ es un mínimo

Las dimensiones serán 3 dm × 6 dm × 1 dm.

8 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1- EA 3.5.2.)

Página 211

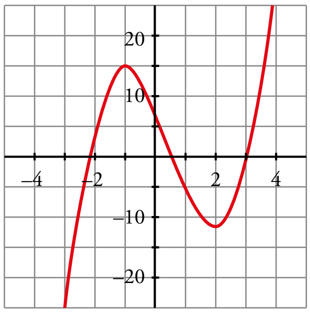
1 Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Máximo en $(-1, 15)$.

Mínimo en $(2, -12)$.



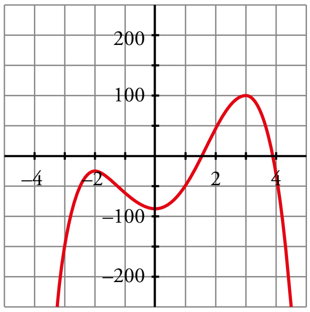
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en $(-2, -26)$ y en $(3, 99)$.

Mínimo en $(0, -90)$.



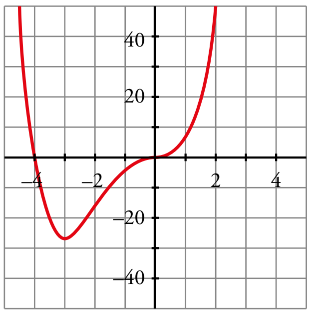
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en $(-3, -27)$.

Punto de inflexión en $(0, 0)$.

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-4, 0)$.



Página 213

2 Saco de dudas. **[Las dudas que surjan al tratar de representar las funciones pueden ser tratadas según esta técnica].**

Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

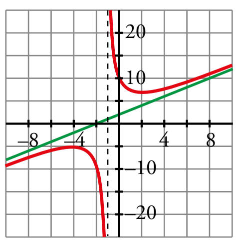
a) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

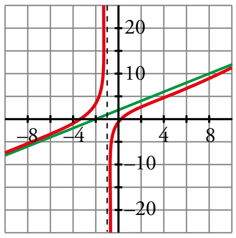
Máximo en $(-4, -5)$. Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

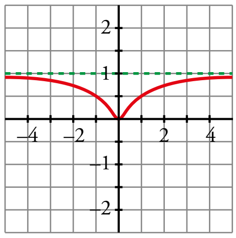


Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

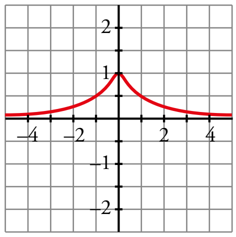
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$



Mínimo en (0, 0).

Asíntota horizontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$

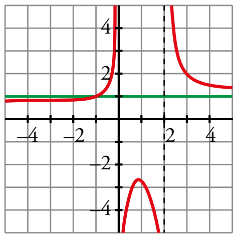


Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$= \dfrac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \to x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0,73 \\ x_2 = -2,73 \end{cases}$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

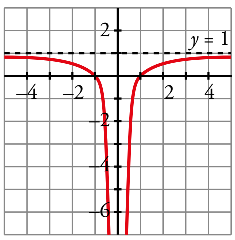
$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$



$f'(x) \neq 0 \to f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 3.5. (EA 3.5.1- EA 3.5.2.)

Página 214

1. Función derivada a partir de la definición

Hazlo tú

- **Dada $f(x) = \frac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.**

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+h)(x+1) - x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{x^2+x+hx+h-x^2-xh-x}{(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \frac{h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Reglas de derivación

Hazlo tú

- **Halla $f'(x)$ siendo: $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$**

$$f(x) = 2\,ln\frac{x+1}{x} = 2[ln(x+1) - ln\,x]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

3. Recta tangente paralela a una recta

Hazlo tú

- **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.**

Despejando y en la ecuación de la recta dada, podemos obtener su pendiente.

$y = 2x + 5 \rightarrow$ La pendiente de la recta es 2.

Las abscisas de los puntos en los que la recta tangente es paralela a la recta anterior son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 6x - 4 \rightarrow 6x - 4 = 2 \rightarrow x = 1$ es el punto en el que la tangente y la recta dada son paralelas.

Finalmente, como $f(1) = -1$, la recta buscada es $y = 2(x-1) - 1$, es decir, $y = 2x - 3$.

Página 215

4. Puntos singulares. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Hazlo tú

- **Calcula los puntos singulares y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

Veamos dónde está definida la función, eliminando los puntos donde se anula el denominador:

$Dom = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Por tanto, tendrá asíntota vertical en $x = 2$. Veamos cómo se comporta la función en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

Hallamos las abscisas de los puntos singulares resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$. Con ayuda de las ramas infinitas podemos saber si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = \frac{2x(2-x)-(-1)(x^2)}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2} = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$$

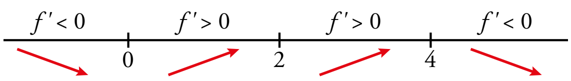
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\, x = 4$

$f(0) = 0,\, f(4) = -8 \;\rightarrow\;$ Los puntos singulares son $(0, 0)$ y $(4, -8)$.

Como el denominador de la derivada es siempre positivo en el dominio de la función, su signo dependerá del numerador:

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; (4-x) > 0 \;\rightarrow\; x > 0$ y $x < 4$ o bien $x < 0$ y $x > 4$ (sabiendo que $x = 2$ no pertenece al domino de $f(x)$).

Por tanto, f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.



Por tanto, tiene un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(4, -8)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

5. Cálculo de los coeficientes de una función a partir de sus puntos singulares

Hazlo tú

- **Halla b y c de modo que $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ pase por $(1, 0)$ y $f'(1) = 5$.**

Pasa por $(0, 5) \;\rightarrow\; f(0) = c = 5$

Pasa también por su punto singular $(2, -3) \;\rightarrow\; f(2) = 8a + 2b + 5 = -3$ (1)

Además si es punto singular, en $x = 2$ se anula la derivada de f:

$f'(x) = 3ax^2 + b \;\rightarrow\; f'(2) = 12a + b = 0 \;\rightarrow\; b = -12a$

Sustituimos en (1): $-16a = -8 \;\rightarrow\; a = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; b = -6$

La solución buscada es $y = \dfrac{1}{2}x^3 - 6x + 5$

Página 216

6. Problema de optimización

Hazlo tú

- **Halla dos números positivos cuya suma sea 34 y tales que su producto sea máximo.**

Buscamos dos números x, y que cumplan: $x + y = 34 \;\rightarrow\; y = 34 - x$

Para que su producto sea máximo definiremos la función de su producto, usando la anterior igualdad: $x \cdot y = x(34 - x) = 34x - x^2 \;\rightarrow\; f(x) = 34x - x^2$

Su gráfica es una parábola, y como el término de x^2 tiene signo negativo su vértice será su máximo. Busquemos este punto:

$f'(x) = 34 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 17 \;\rightarrow\; f(17) = 289$

Comprobamos que es máximo:

$f'(x) = 34 - 2x < 0$ si $x > 17 \rightarrow f(x)$ decrece cuando $x > 17$

$ff'(x) = 34 - 2x > 0$ si $x < 17 \rightarrow f(x)$ crece cuando $x < 17$

Por tanto, los números buscados son: $x = 17$, $y = 17$

7. Gráfica de una función racional continua

Hazlo tú

- **Estudia y representa la función** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

Su dominio de definición es $\mathbb{R}$ porque la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $y = 2$ porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$

Posición: Calculamos $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - 2 = \dfrac{-2}{x^2+1}$

- Si $x \rightarrow +\infty$, entonces $f(x) - 2 < 0$.
- Si $x \rightarrow -\infty$, entonces $f(x) - 2 < 0$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

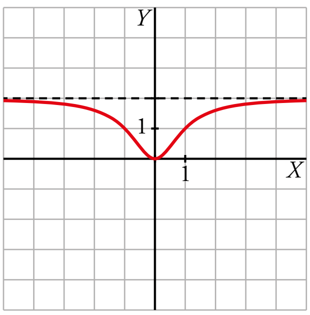
$f'(x) = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ El punto (0, 0) es un punto singular.

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
SIGNO DE $f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

El punto (0, 0) es un mínimo.

Gráfica:



Página 217

8. Estudio y representación de una función polinómica

Hazlo tú

- **Estudia y representa esta función: $f(x) = 1 + (x-3)^3$**

  - Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.
  - Ramas infinitas:

    $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 + (x-3)^3] = +\infty$

    $\lim\limits_{x \to -\infty} [1 + (x-3)^3] = -\infty$
  - Puntos singulares:

    $f'(x) = 3(x-3)^2$

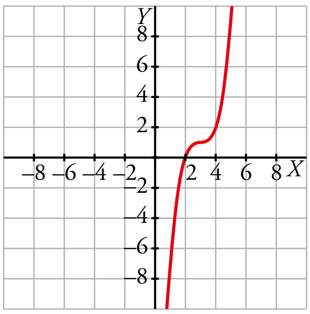
    $f'(x) = 0 \ \to \ 3(x-3)^2 = 0 \ \to \ x = 3$

    Como $f(3) = 1$, el punto $(3, 1)$ es el único punto singular.
  - Crecimiento y decrecimiento:

    Como $f'(x) = 3(x-3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, la función crece a ambos lados de $x = 3$ y no es ni máximo ni mínimo.
  - Cortes con los ejes:

    $x = 0 \ \to \ y = -26$

    $y = 0 \ \to \ 1 + (x-3)^3 = 0 \ \to \ (x-3)^3 = -1 \ \to \ x = 2$
  - Gráfica:



9. Estudio y representación de una función racional

Hazlo tú

- **Estudia y representa esta función: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 8}{x}$**

  - La función no está definida en $x = 0 \ \to \ Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
  - Asíntota vertical: $x = 0$

    Posición:

    Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

    Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$
  - Asíntotas horizontales y oblicuas:

    Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tiene una asíntota oblicua. Dividimos:

    $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \ \to$ La asíntota es $y = 2x$

Posición:

Si $x \to -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Curva bajo la asíntota.

Si $x \to +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Curva sobre la asíntota.

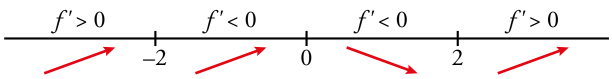
- Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 - 8 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Por tanto, $(-2, -8)$ y $(2, 8)$ son los puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



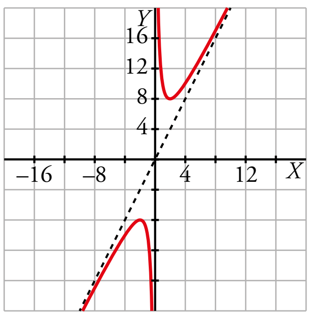
- Cortes con los ejes:

No corta al eje OY.

$y = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 + 8 = 0$ No tiene solución (no corta al eje OX).

- Gráfica:

$y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



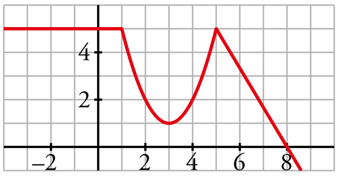
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1- EA 1.9.2.-EA 1.9.3.)

Página 218

1. Derivadas sobre la gráfica

- **Observando la gráfica de esta función $y = f(x)$:**



a) Hallar el valor de $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(6)$.

a) $f'(-2) = 0$ porque es constante en las proximidades de $x = -2$.

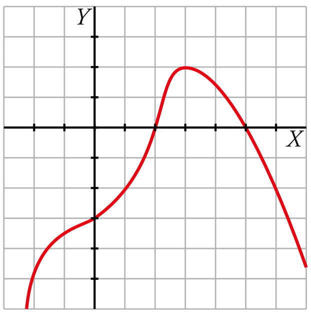
$f'(3) = 0$ porque en $x = 3$ hay un mínimo.

$f'(6) = -\dfrac{5}{3}$ porque la gráfica es la recta $y = \dfrac{-5x+40}{3}$ con pendiente $-\dfrac{5}{3}$.

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ porque la función es decreciente en estos intervalos.

2. Función polinómica

- **Representar una función polinómica sabiendo que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son (0, –3) y (3, 2), y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.**



3. Función cuadrática

- **Hallar la función de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$, que pase por (0, 2) y tal que la pendiente de la recta tangente en el punto (1, –3) valga –1.**

La ecuación de una función cuadrática es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Pasa por $(0, 2) \to 2 = c$

Pasa por $(1, -3) \to -3 = a + b + 2 \to a + b = -5$

Como la pendiente de la tangente en (1, –3) es –1, debe ocurrir que $f'(1) = -1$:

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = -1 \to 2a + b = -1$

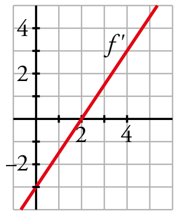
Resolvemos este sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -5 \\ 2a + b = -1 \end{array}\right\} \to a = 4,\ b = -9$$

La función cuadrática buscada es $y = 4x^2 - 9x + 2$.

4. Gráfica de la función derivada

- **Esta es la gráfica de f', función derivada de f.**



a) Obtener $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(4)$.

b) ¿Tiene f algún punto singular?

c) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de f.

a) $f'(0) = -3 \quad f'(2) = 0 \quad f'(4) = 3$

b) En $x = 2$ se anula la derivada primera. Además, esta es negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha. Por tanto, la función pasa de decreciente a creciente en $x = 2$ y este punto es un mínimo.

c) La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

5. Máximo y mínimo en un intervalo

- **Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.**

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo de este tipo pueden darse en los extremos del intervalo o en los puntos singulares.

Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \to 3x^2 - 3 = 0 \to x = -1, \ x = 1$$

El primer punto singular no lo consideramos porque queda fuera del intervalo $[0, 3]$ en el que se estudia la función. Evaluamos:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = -1 \qquad f(3) = 19$$

Por tanto, el máximo se da en $x = 3$ y vale 19. El mínimo se da en $x = 1$ y vale -1.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 219

Para practicar

Tasa de variación media. Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{f(3) - f(1)}{2}$

a) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{1/3 - 1}{2} = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Decrece

b) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{-1 - 1}{2} = -1 \rightarrow$ Decrece

c) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{7 - 1}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

d) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{8 - 2}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

2 **a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ en el intervalo [1, 1 + h].**

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

a) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1, 1 + h] $= \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{-(1 + h)^2 + 5(1 + h) - 3 - 1}{h} = \dfrac{-1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 4}{h} = 3 - h$

Para la función $g(x)$:

T.V.M. [1, 1 + h] $= \dfrac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{1 + h + 1} - \dfrac{1}{2}}{h} = \dfrac{\dfrac{2 - h - 2}{2(2 + h)}}{h} = \dfrac{-1}{2h + 4}$

b) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] = 3 – 0,5 = 2,5

Para la función $g(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] $= \dfrac{-1}{2 \cdot 0{,}5 + 4} = \dfrac{-1}{5}$

3 **a) Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

b) Calcula el crecimiento en el punto $x = -1$ de f y de g.

a) Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

b) En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

4 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ **b)** $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$ **d)** $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h^2+2h) - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h+6)}{h} = 6$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2(1+h)+1)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2h+3)^2 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h+12)}{h} = 12$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{9 - h^2 - 6h - 9}{9(h+3)^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2 - 6h}{9h(h+3)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h-6}{9(h+3)^2} = \dfrac{-2}{27}$

5 **Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de las rectas tangentes a las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x-7}$ en $x = 2$.**

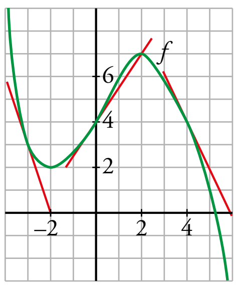
- $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4}{h} = \dfrac{8 + 4h - 4 - 4h - h^2 - 4}{h} = -h$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-h) = 0$

- $\dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3(2+h) - 7} - (-1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3h-1} + 1}{h} = \dfrac{3}{3h-1}$

$g'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{3h-1} = -3$

6 **Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.**



a) **¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?**

b) **¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?**

c) **En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?**

a) $f'(-3) = -3$ $f'(0) = \dfrac{3}{2}$ $f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva porque la pendiente de la tangente lo es. Análogamente, la derivada en $x = 3$ es negativa.

7 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por la función $s(t) = 30t - 5t^2$, donde $s(t)$ es la distancia al suelo en metros y t el tiempo en segundos. Calcula.**

a) La velocidad media entre $t = 0$ y $t = 3$.

b) La velocidad instantánea en $t = 2$ y en $t = 3$.

a) $\dfrac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \dfrac{45}{3} = 15$ m/s

b) $s'(x) = 30 - 10t$

$s'(2) = 10$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 2$

$s'(3) = 0$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 3$

8 **Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{(5x - 3)}{2}$ **b)** $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$ **d)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

a) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{5(x+h)-3}{2} - \dfrac{5x-3}{2}}{h} = \dfrac{5x + 5h - 3 - 5x + 3}{2h} = \dfrac{5}{2}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 + 7(x+h) - 1 - (x^2 + 7x - 1)}{h} = \dfrac{x^2 + 2hx + h^2 + 7x + 7h - 1 - x^2 - 7x + 1}{h} =$

$= 2x + h + 7$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$

c) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^3 - 5(x+h) - (x^3 - 5x)}{h} = \dfrac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 5x - 5h - x^3 + 5x}{h} =$

$= 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$

d) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{x+h-1}{x+h} - \dfrac{x-1}{x}}{h} = \dfrac{x(x+h-1) - (x+h)(x-1)}{hx(x+h)} = \dfrac{x^2 + hx - x - (x^2 - x + hx - h)}{hx(x+h)} =$

$= \dfrac{1}{x(h+x)}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{x(h+x)} = \dfrac{1}{x^2}$

Reglas de derivación

9 **Halla la derivada de cada una de estas funciones:**

a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 9$

b) $f(x) = (x^2 + 1)\, e^x$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = x^2\, ln\, x$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 3}$

g) $f(x) = x\, sen\, x$

h) $f(x) = 3\, cos\, x + 2tg\, x$

i) $f(x) = 3e^x + 5$

j) $f(x) = 2^x + log_2\, x$

a) $f'(x) = 4x^3 - 14x^2$

b) $f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)\, e^x = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x(x+1)^2$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - (x+1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{x^2 - 4 - 2x^2 - 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-(x^2+2x+4)}{(x^2-4)^2}$

d) $f'(x) = 2x\, ln\, x + \dfrac{x^2}{x} = 2x\, ln\, x + x$

e) $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+2x+3) - (x^3+1)(2x+2)}{(x^2-2x+3)^2} = \dfrac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 2x - 2}{(x^2-2x+3)^2}$

g) $f'(x) = sen\, x + x\, cos\, x$

h) $f'(x) = -3\, sen\, x + \dfrac{2}{cos^2\, x}$

i) $f'(x) = 3e^x$

j) $f'(x) = 2^x\, ln\, 2 + \dfrac{1}{x\, ln\, 2}$

10 **Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.**

a) $f(x) = (5x - 2)^3$

b) $f(x) = 3\, cos\, (x + \pi)$

c) $f(x) = sen\, \dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+7}{x}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = tg\, (3x)$

h) $f(x) = x \cdot sen\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot ln\, x}$

j) $f(x) = (x + ln\, x)^2$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f'(x) = -3sen\,(x + \pi)$

c) $f'(x) = cos\, \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\, cos\, \dfrac{x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+7}{x}}} \cdot \dfrac{x - (x+7)}{x^2} = \dfrac{-7}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+7}}$

f) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{8}\, e^{2x+1} + \dfrac{x^3}{8}\, e^{2x+1} \cdot 2 = \dfrac{e^{2x+1}}{8}(2x^3 + 3x^2)$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{cos^2(3x)} \cdot 3 = \dfrac{3}{cos^2(3x)}$

h) $f'(x) = sen\, x^2 + x\, cos\, x^2 \cdot 2x = sen\, x^2 + 2x^2\, cos\, x^2$

i) $f'(x) = \sqrt{7} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{ln\, x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{ln\, x}}$

j) $f'(x) = 2(x + ln\, x)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 2\left(x + 1 + ln\, x + \dfrac{ln\, x}{x}\right)$

11 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 1}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{ln\, x}{x}\right)^2$

c) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{1 - x^2}}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{3x}{1 - x^2}\right)^2$

e) $f(x) = \dfrac{x}{3} log_2(1 - x^2)$

f) $f(x) = e^{-x}\, ln\, \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{(5x + 2)^2}$

h) $f(x) = ln\left(\dfrac{1}{4x} - \dfrac{x}{2}\right)$

a) $f(x) = (e^x + 1)^{1/3}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}(e^x + 1)^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(e^x + 1)^2}}$

b) $f'(x) = 2\dfrac{ln\, x}{x} \cdot \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - ln\, x}{x^2} = \dfrac{2\, ln\, x(1 - ln\, x)}{x^3}$

c) $f(x) = -3(1 - x^2)^{-1/2}$

$f'(x) = -3\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \dfrac{-3x}{(1 - x^2)^{3/2}} = \dfrac{-3x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$

d) $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{3x}{1 - x^2} \cdot \dfrac{3(1 - x^2) - 3x \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{6x(3x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3} = \dfrac{18x(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{3} log_2(1 - x^2) + \dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{1}{1 - x^2} \cdot \dfrac{1}{ln\, 2} \cdot (-2x) = \dfrac{log_2(1 - x^2)}{3} - \dfrac{2x^2}{3(1 - x^2)\, ln\, 2}$

f) $f(x) = e^{-x}(-ln\, x) = -e^{-x}\, ln\, x$

$f'(x) = -\left(-e^{-x}\, ln\, x + e^{-x} \cdot \dfrac{1}{x}\right) = e^{-x}\left(ln\, x - \dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = (5x + 2)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x + 2)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x + 2}}$

h) $f(x) = ln\left(\dfrac{1 - 2x^2}{4x}\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1 - 2x^2}{4x}} \cdot \dfrac{-4x \cdot 4x - (1 - 2x^2) \cdot 4}{(4x)^2} = \dfrac{4x}{1 - 2x^2} \cdot \dfrac{-8x^2 - 4}{(4x)^2} = \dfrac{-4(2x^2 + 1)}{4x(1 - 2x^2)} = \dfrac{2x^2 + 1}{x(2x^2 - 1)}$

12 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(t) = \sqrt{t} \cdot \left(\dfrac{3t+5}{32}\right)$

b) $f(t) = \dfrac{3t^2+2t}{1-t}$

c) $f(t) = \dfrac{t}{ln\, t} + (ln\, t)^2$

d) $f(t) = \sqrt{e^{3t-2}}$

e) $f(t) = e^{\sqrt{2t}}$

f) $f(t) = cos\left(\dfrac{3t+\pi}{2}\right) + tg^2\, t$

a) $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\left(\dfrac{3t+5}{32}\right) + \sqrt{t}\left(\dfrac{3}{32}\right) = \dfrac{3t+5}{64\sqrt{t}} + \dfrac{3\sqrt{t}}{32} = \dfrac{9t+5}{64\sqrt{t}}$

b) $f'(t) = \dfrac{(6t+2)(1-t)-(3t^2+2t)(-1)}{(1-t)^2} = \dfrac{-3t^2+6t+2}{(1-t)^2}$

c) $f'(t) = \dfrac{ln\, t - t/t}{(ln\, t)^2} + 2\, ln\, t\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{ln\, t} - \dfrac{1}{(ln\, t)^2} + \dfrac{2\, ln\, t}{t}$

d) $f'(t) = \dfrac{3}{2}e^{3t-2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{e^{3t-2}}} = \dfrac{3\sqrt{e^{3t-2}}}{2}$

d) $\dfrac{e^{\sqrt{2t}}}{\sqrt{2t}}$

f) $-\dfrac{3}{2}sen\left(\dfrac{3t+\pi}{2}\right) + 2tg\, t\, \dfrac{1}{cos^2 t}$

13 Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = ln\, \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = ln\,(x \cdot e^{-x})$

c) $f(x) = ln\,(1-3x^2)^4$

d) $f(x) = log_2 \sqrt[3]{5x-x^2}$

e) $f(x) = ln\, \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

f) $f(x) = log\, \dfrac{(3x-5)^3}{x}$

g) $f(x) = log_2 \sqrt{\dfrac{x-1}{x^3}}$

h) $f(x) = log\, \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \dfrac{-4x}{x^4-1}$

b) $f(x) = ln\, x + ln\, e^{-x} = ln\, x - x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

c) $f(x) = 4ln\,(1-3x^2)$

$f'(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{1-3x^2} \cdot (-6x) = \dfrac{24x}{3x^2-1}$

d) $f(x) = log_2\,(5x-x^2)^{1/3} = \dfrac{1}{3}log_2\,(5x-x^2)$

$f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5x-x^2} \cdot \dfrac{1}{ln\, 2} \cdot (5-2x) = \dfrac{5-2x}{3(5x-x^2)\, ln\, 2}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2+1)]$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$

f) $f(x) = 3\log(3x-5) - \log x$

$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{\ln 10\,(3x^2-5x)}$

g) $f(x) = \log_2\left(\frac{x-1}{x^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x-1}{x^3}\right) = \frac{1}{2}[\log_2(x-1) - 3\log_2 x]$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)\ln 2} - \frac{3}{x}\right)$

h) $f(x) = -\frac{x}{2}\log(e)$

$f'(x) = -\frac{\log(e)}{2}$

Página 220

Recta tangente y recta normal

14 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$

d) $f(x) = \ln x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \frac{\pi}{2}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x-2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-1}(x-2) + 0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \frac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \frac{1}{4}(x-3) + 2$, es decir, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

La recta normal es $y = \frac{-1}{1/4}(x-3) + 2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \frac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x+1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-8}(x+1) - 3$, es decir, $y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$, es decir, $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

15 Cabezas pensantes. **[Antes de buscar los puntos, el alumnado podrá compartir en pequeños grupos el método que hay que seguir para encontrarlos].**

Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = 4\sqrt{x+3}$ **c)** $y = ln\,(4x - 1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \;\to\; 2x - 2 = 2 \;\to\; x = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \;\to\; \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \;\to\; \sqrt{x+3} = 1 \;\to\; x = -2$

d) $f'(x) = \dfrac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \;\to\; \dfrac{4}{4x-1} = 2 \;\to\; 4x - 1 = 2 \;\to\; x = \dfrac{3}{4}$

16 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ **paralela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \;\to\; y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente –2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \;\to\; 2x + 4 = -2 \;\to\; x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x + 3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \rightarrow 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \rightarrow y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 5 \rightarrow \frac{5}{(x+2)^2} = 5 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$$

Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x + 1) - 4$

Si $x = -3 \rightarrow f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x + 3) + 6$

17 Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$ **d)** $y = x^3 - 12x$

Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(1) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(3) = -27 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = 16 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

$f(2) = -16 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

18 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje X.**

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = -2, \; x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \rightarrow f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$

Las rectas normales son: en $x = -2, \; y = -\dfrac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2, \; y = \dfrac{1}{4}(x - 2)$.

Puntos singulares: crecimiento y decrecimiento

19 **Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$

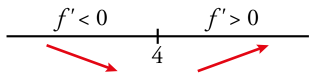
b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$

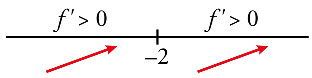


Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 12x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$



Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.

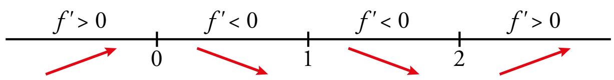
Intervalo de crecimiento, $\mathbb{R}$.

c) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0, \; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento, $(0, 1) \cup (1, 2)$.

d) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x + 2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

20 **Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:**

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = 1/x$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

21 **Halla los puntos singulares de estas funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $y = 3x^2 - x^3$ **c)** $y = x^4 - 8x^2 + 10$

d) $y = -3x^4 - 12x$ **e)** $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ **f)** $y = \dfrac{x^3 + 4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0 \to x = \dfrac{1}{3},\ x = 1$

Como $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \to 6x - 3x^2 = 0 \to x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \;\to\; 4x^3 - 16x = 0 \;\to\; x = -2,\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(-2) = -6,\; f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (-2, -6) \text{ y } (2, -6) \text{ son mínimos.}$$

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \;\to\; -12x^3 - 12 = 0 \;\to\; x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (-1, 9) \text{ es un máximo.}$$

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \;\to\; x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto $(0, 3)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (0, 3) \text{ es un máximo.}$$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

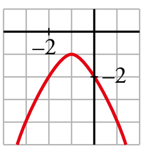
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \;\to\; x = \sqrt[3]{2}$

Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

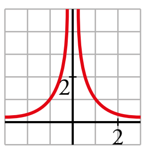
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } \left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right) \text{ es un mínimo.}$$

22 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:**

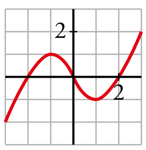
a)



b)



c)



a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

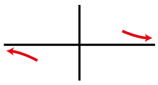
23 **De una función polinómica sabemos que:**

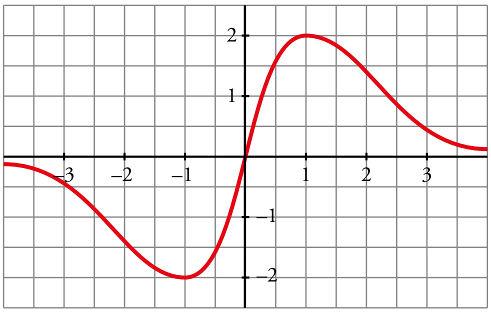
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es igual a 0 solo en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes solo en (0, 0) y en (4, 0).**

Represéntala gráficamente.

24 **Representa una función continua f de la que sabemos que:**

- **Sus puntos de tangente horizontal son (–1, –2) y (1, 2).**
- **Sus ramas infinitas son así:**

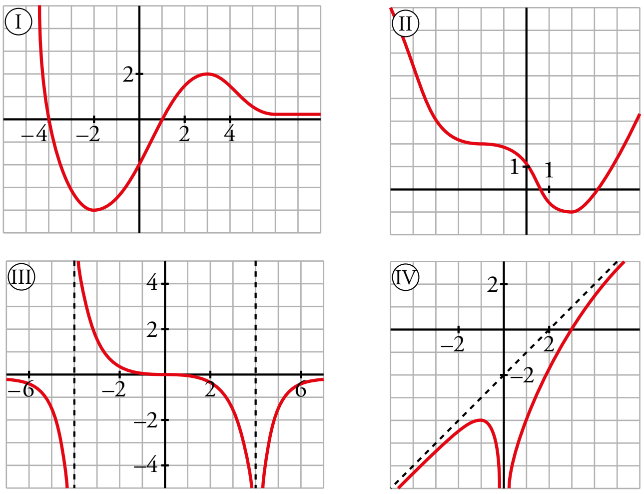




25 **En las siguientes gráficas describe:**

a) Dominio de definición, ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva repecto a ellas.

b) Puntos de tangente horizontal, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.



a) • Función I:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

• Función II:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

No tiene asíntotas.

• Función III:

$Dom = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = -4$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ cuando se acerca a la asíntota por la izquierda, y a $+\infty$ cuando se acerca por la derecha.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal también cuando $x \to +\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

• Función IV:

$Dom = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. En ambos casos la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) • Función I:

Los puntos de pendiente horizontal son $(-2, -4)$ y $(3, 2)$.

El punto $(-2, -4)$ es un mínimo. El punto $(3, 2)$ es un máximo.

La función crece en $(-2, 3)$ y decrece en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

• Función II:

Tiene un punto de pendiente horizontal en $(-1, 2)$ y otro en $(-2, 2)$.

El punto $(-1, 2)$ es un mínimo. El punto $(-2, 2)$ es un punto singular pero no es ni máximo ni mínimo.

La función crece en $(2, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 2)$.

• Función III:

Tiene un punto de pendiente horizontal en $(0, 0)$.

No tiene ni máximos ni mínimos.

La función crece en $(4, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, -4) \cup (4, 4)$.

• Función IV:

Tiene un punto de pendiente horizontal en $(-1, -4)$.

Solo tiene un punto singular, el máximo $(-1, -4)$.

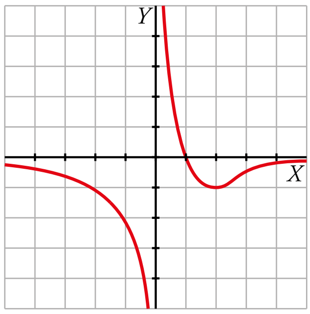
La función crece en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0)$.

26 Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:

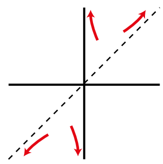
- **Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$; Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$; Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en $(2, -1)$.**



27 Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, $(-1, -2)$ y $(1, 2)$; sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

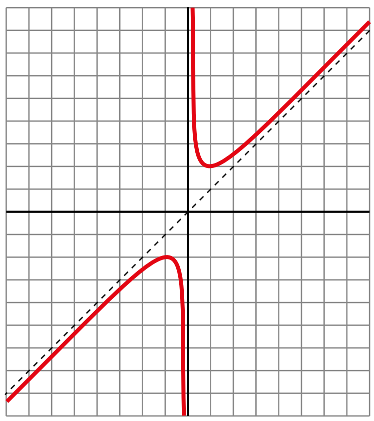
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x = -1,\ x = 1$

Puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.



Página 221

28 **Representa $y = f(x)$ de la que conocemos:**

- **Asíntota vertical: $x = 2$**

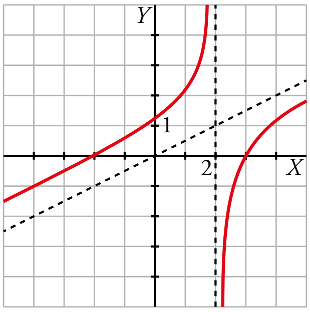
  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$; Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

- **Asíntota oblicua: $y = x/2$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < x/2$; Si $x \to -\infty$, $f(x) > x/2$

- **Cortes con los ejes: (0, 1), (–2, 0), (3, 0)**

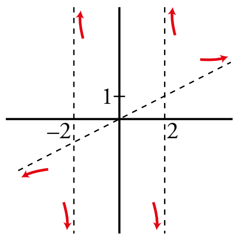
¿Tiene máximo o mínimo la función que has representado?

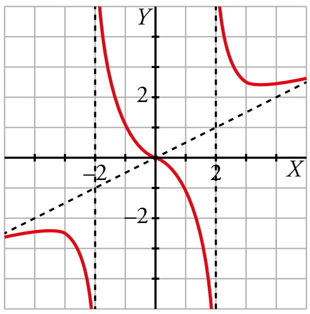


29 **Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:**

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.





30 **Dada la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ comprueba que:**

- **Tiene derivada nula en (0, 0).**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**

Estudia la posición de la curva con respecto a la asíntota y represéntala.

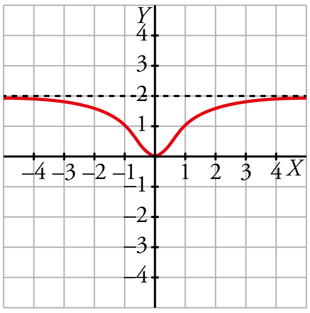
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en (0, 0) es nula.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

• $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.



Para resolver

31 a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

b) Halla la abscisa del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$

Punto $(-3, 2)$.

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

32 Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en $A(2, 1)$ y que pasa por $B(5, -2)$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \rightarrow 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \rightarrow 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

33 Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \rightarrow g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \rightarrow x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$

34 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por (1, 1).**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \ \to \ 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \ \to \ b = \ \ 0 \\ f(1) = 1 \ \to \ 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

35 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la tangente en (2, –1) vale 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \ \to \ 1 = c \\ f(2) = -1 \ \to \ -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \ \to \ 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

36 **Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:**

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

c) $f(x) = 12x - x^3$

d) $f(x) = -x^4 + 4x^2$

a) Buscamos sus puntos singulares:

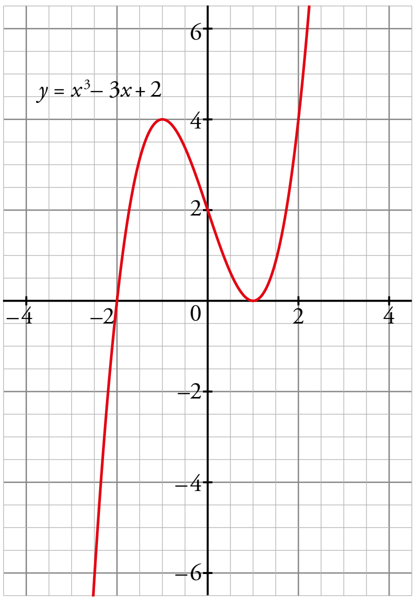
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \ \to \ x = 1; x = -1 \ \to$ Puntos singulares $A(1, 0)$ y $B(-1, 4)$.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Por tanto, $A(1, 0)$ tiene que ser un mínimo y $B(-1, 4)$ un máximo:



b) Buscamos sus puntos singulares:

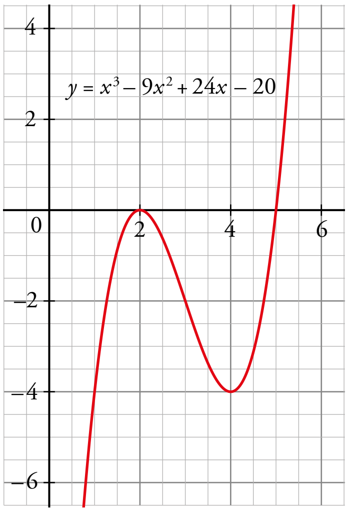
$f'(x) = 12 - 3x^2 \;\to\; x = 4, x = -2 \;\to\; A(4, -4)$ y $B(-2, 0)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Vemos que $A(4, -4)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 0)$ un máximo:



c) Buscamos sus puntos singulares:

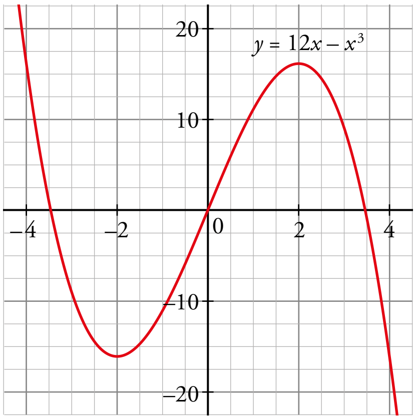
$f'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \;\to\; x = -2, x = 2 \;\to\; A(-2, -16)$ y $B(2, 16)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Vemos que $A(-2, -16)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 16)$ un máximo:



d) Buscamos sus puntos singulares:

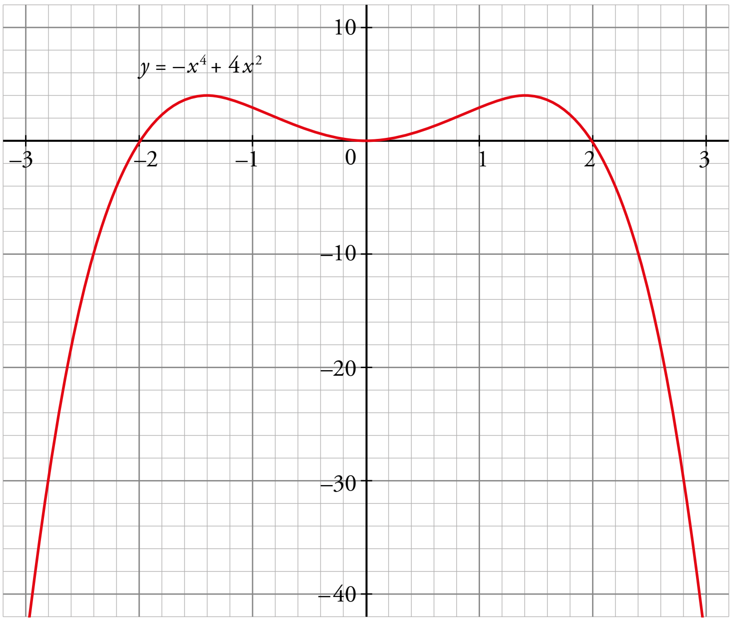
$f'(x) = -4x^3 + 8x = 0 \;\to\; x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2} \;\to\; A(0,0),\; B\left(\sqrt{2}, 4\right),\; C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Y entonces $A(0, 0)$ tiene que ser un mínimo, y $B\left(\sqrt{2}, 4\right)$ y $C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son máximos:



37 Estudia y representa.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^4 + 4x^3$

c) $f(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

d) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

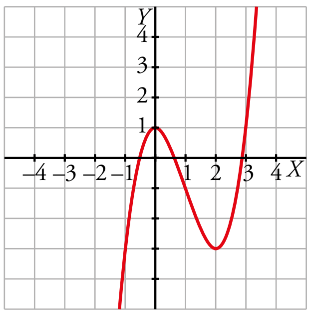
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 6x = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 2$

$f(0) = 2,\;\; f(2) = -3 \;\to$ Los puntos singulares son (0, 1) y (2, –3).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



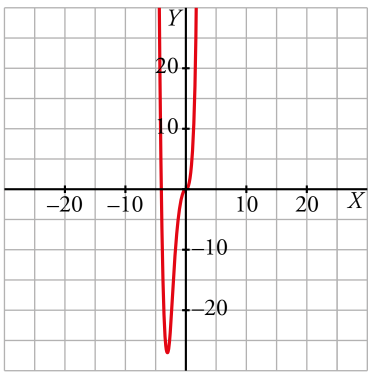
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\to\; 4x^3 + 12x^2 = 0 \;\to\; x = -3,\; x = 0$

$f(-3) = -27,\; f(0) = 0 \;\to$ Los puntos singulares son (–3, –27) y (0, 0).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

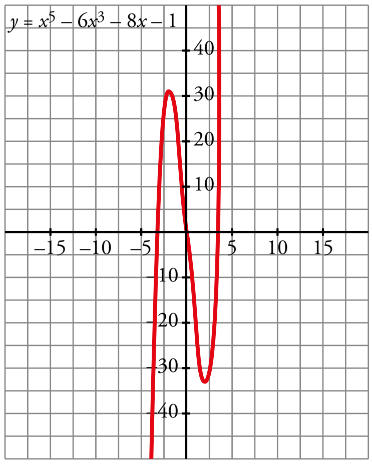


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -33 \;\rightarrow\; (2, -33) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = 31 \;\rightarrow\; (-2, 31) \end{cases}$$

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$

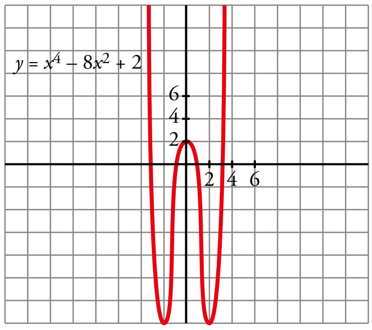


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 2 \;\rightarrow\; (0, 2) \\ x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -14 \;\rightarrow\; (2, -14) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = -14 \;\rightarrow\; (-2, -14) \end{cases}$$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$

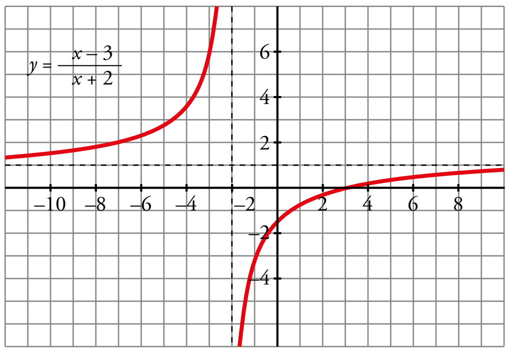


38 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

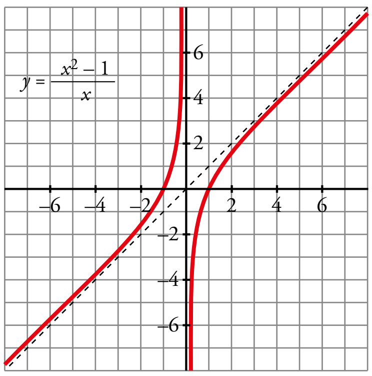
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



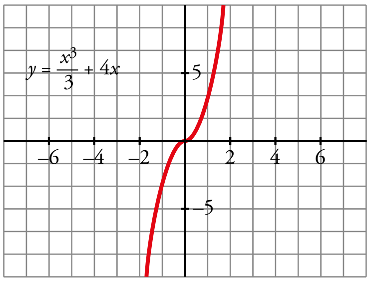
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(-1, 0)$



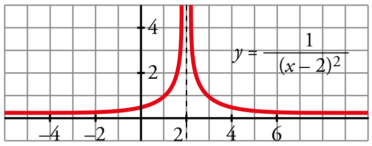
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es (0, 0).



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



39 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$

b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

c) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x+2}$

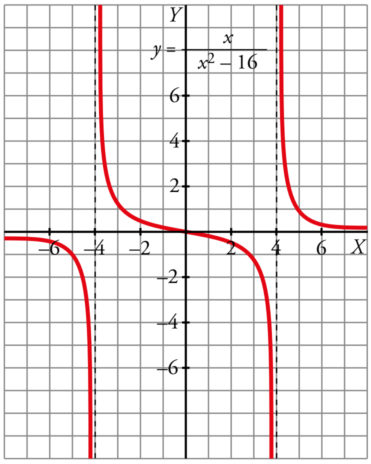
f) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4,\ x = 4$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

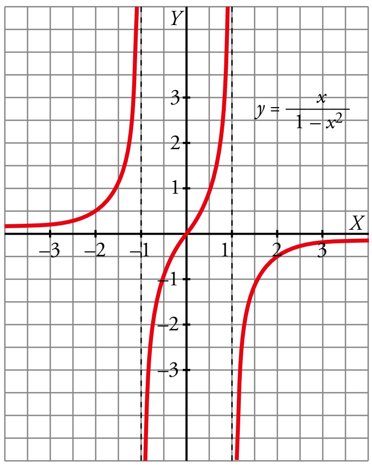


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1,\ x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

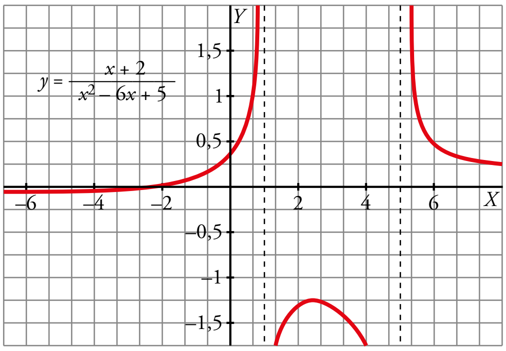
Asíntotas verticales: $x = 5,\ x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

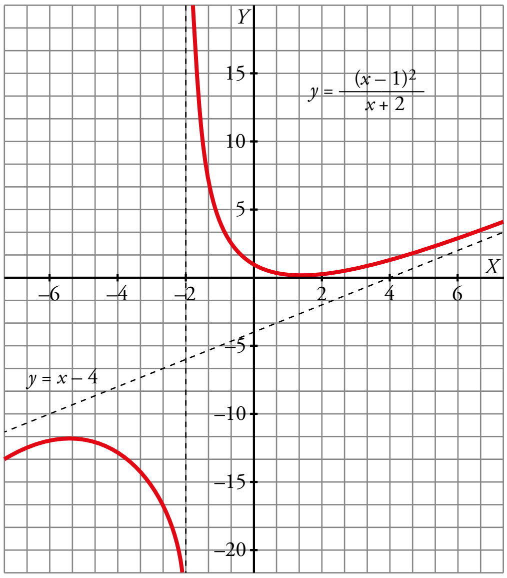
Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

(1, 0), (–5, 12)



e) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

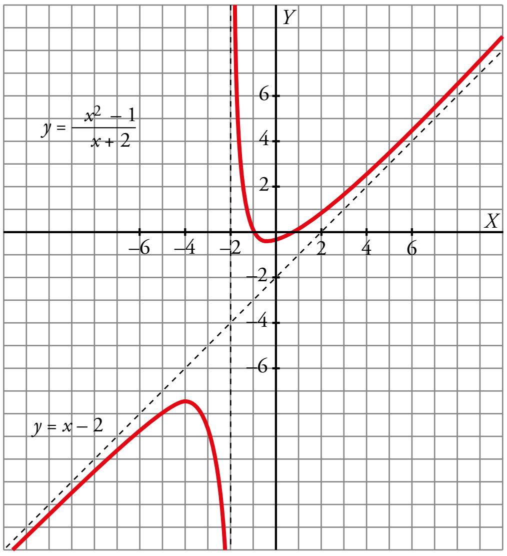
Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–0,26; –0,54), (–3,73; –7,46)



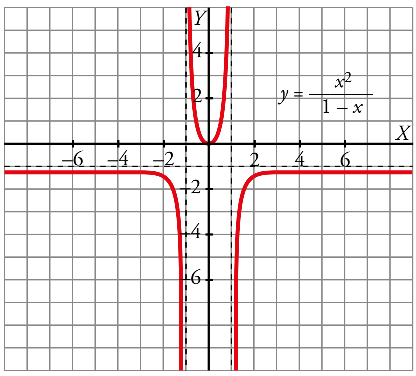
f) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1,\ x = -1$

Asíntota horizontal: $y = -1$

No hay asínto tas oblicuas.

Punto de tangente horizontal: (0, 0)



40 **Dada la parábola $y = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.**

$f(0) = 5$ y $f(3) = -4$. Por tanto, la pendiente de la cuerda que pasa por estos puntos es $\frac{-4-5}{3-0} = -3$.

Tratamos de encontrar el punto que cumple la igualdad $f'(x) = -3$:

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = -3 \to 6 - 6x = -3 \to x = \frac{3}{2}$

Como $f\left(\frac{3}{2}\right) = 5 + 6 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$, la recta tangente es $y = -3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{29}{4}$

41 **Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto $(1, 3)$ y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.**

Pasa por $(1, 3) \to f(1) = 3 \to a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 3 \to a + b = 3$

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, $f'(1) = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 4 \to 3a \cdot 1^2 + b = 4 \to 3a + b = 4$

Ahora, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ 3a + b = 4 \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$$

42 **Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.**

a) $y = x^2 - 6x - 4,\ x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5,\ x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2,\ x \in [-2, 4]$

d) $y = \frac{x}{x^2 + 1},\ x \in [0, 2]$

Hallamos los puntos singulares que quedan dentro de los diferentes intervalos, evaluamos en ellos y en los extremos de los intervalos.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \to 2x - 6 = 0 \to x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12x + 12 = 0 \to x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 6x = 0 \to x = 0,\ x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale -20.

d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 1$

$f(0) = 0 \qquad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \qquad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

43 El área de un rectángulo, en función de su base x, viene dada por la expresión $S(x) = 20x - x^2$, $x \in [8, 18]$. Halla el área máxima y el área mínima en ese intervalo.

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo de este tipo pueden darse en los extremos del intervalo o en los puntos singulares.

$S'(x) = 20 - 2x$

$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; 20 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 10$

Evaluamos:

$S(8) = 20 \cdot 8 - 8^2 = 96 \qquad S(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 100 \qquad S(18) = 20 \cdot 18 - 18^2 = 36$

El área máxima es 100 y se alcanza en $x = 10$.

El área mínima es 36 y se alcanza en $x = 18$.

44 El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$.

El coste medio por unidad es: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$M'(q) = \dfrac{(6q+5)\,q - (3q^2+5q+75)}{q^2} = \dfrac{6q^2+5q-3q^2-5q-75}{q^2} = \dfrac{3q^2-75}{q^2} = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; q^2 = 25 \;\rightarrow\; q = 5$ unidades

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175;\; M(5) = 35$

45 El coste de producción, en una empresa de electrodomésticos, de x unidades fabricadas, viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10\,000$, $C(x)$ en euros. El precio de venta de una unidad es 880 €.

a) Escribe la función que nos da el beneficio de la empresa si se venden todas las unidades fabricadas.

b) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál será ese beneficio?

a) El beneficio es igual a los ingresos por ventas menos los costes de producción.

$B(x) = 880x - (x^2 + 80x + 10\,000) = -x^2 + 800x - 10\,000$

b) La gráfica de la función anterior es una parábola abierta hacia abajo. Por tanto, el máximo se alcanza en su vértice.

$x_0 = \dfrac{-800}{-2} = 400 \;\rightarrow\; B(400) = -400^2 + 800 \cdot 400 - 10\,000 = 150\,000$ €

El beneficio máximo es de 150 000 € y se obtiene fabricando 400 unidades.

Página 222

46 **[El análisis de la función propuesta por el enunciado permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión personal)].**

La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

a) $f'(x) = \dfrac{60\,(x^2+9)-60x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{60x^2+540-120x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-60x^2+540}{(x^2+9)^2} = 0 \to x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio).

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \to$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:

b) Beneficio máximo en $x = 3 \to$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

47 ODS Meta 6.4. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un debate sobre las medidas más efectivas para racionalizar el consumo de agua].**

El consumo de agua de una empresa en m^3 durante el primer semestre varía según la función $C(t) = 8t^3 - 84t^2 + 240t$, $1 \le t \le 6$.

¿En qué meses de este primer semestre se producen los consumos máximo y mínimo? ¿Cuáles fueron esos consumos?

La función es un polinomio de tercer grado, por lo que no tiene asíntotas.

Veamos dónde se anula su derivada, dentro del intervalo de definición de la función, [1,6]:

$C'(t) = 24t^2 - 168t + 240 = 0 \to t^2 - 7t + 10 = 0 \to t = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} \to x = 2, x = 5$

Veamos el valor que toma la función para estos valores de t:

$$C(2) = 208 \qquad C(5) = 100$$

Como la función es continua en todo $\mathbb{R}$, sabemos que tendrá un mínimo en $t = 5$ y un máximo en $t = 2$. Por tanto, en el segundo mes tendrá un consumo máximo de 208 m^3 y en el quinto mes un consumo mínimo de 100 m^3.

48 **Halla dos números positivos cuya suma sea 12 y que el producto del cuadrado del mayor por el menor sea máximo.**

Buscamos dos números x e y que cumplen:

$x = 2a$, $y = 2t$

donde $t > a > 0$; $a, t \in \mathbb{N}$

Además: $x + y = 12 \to 2a + 2t = 12 \to x = 6 - t$

Definimos la función: $f(t) = (2t)^2\ 2(6 - t) = 48t^2 - 8t^3$

Buscamos sus puntos singulares:

$f'(t) = -24t^2 + 96t = 0 \ \rightarrow\ t = 0;\ t = \dfrac{96}{24} = 4$

Descartamos la primera solución ya que por el enunciado sabemos que ninguno de los dos números puede ser 0, por lo que tenemos el punto singular (4, 256) de $f(t)$.

Si $t \in (0, 4) \ \rightarrow\ f' > 0 \ \rightarrow\ f$ creciente

Si $t > 4 \ \rightarrow\ f' < 0 \ \rightarrow\ f$ decreciente

Por lo que hemos encontrado un máximo. Por tanto, los números son:

$$x = 2a = 4 \qquad\qquad y = 2t = 8$$

49 Con una barra de hierro de 10 m queremos construir una portería. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que el área de la misma sea máxima?

Llamamos x a la medida de los postes y z a la del larguero.

Sabemos que $10 = 2x + z \ \rightarrow\ z = 10 - 2x$

Su área será: $A = z \cdot x = (10 - 2x)x = 10x - 2x^2$

Para que sea máxima: $A'(x) = 10 - 4x = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{10}{4} = 2,5 \ \rightarrow\ z = \dfrac{20}{4} = 5$

50 Encuentra dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.

Sean x, y los números positivos.

$xy = 100 \ \rightarrow\ y = \dfrac{100}{x}$

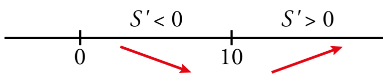
La suma es $S = x + y = x + \dfrac{100}{x}$

Queremos encontrar la suma mínima:

$S' = 1 - \dfrac{100}{x^2}$

$S' = 0 \ \rightarrow\ 1 - \dfrac{100}{x^2} = 0 \ \rightarrow\ x = \pm 10 \ \rightarrow\ x = 10$ (solo es válido el resultado positivo)

Veamos si es un mínimo:



Por tanto, cuando $x = 10$, $y = \dfrac{100}{10} = 10$, se obtiene la suma mínima, que es $S = 20$.

51 El área de un rectángulo es 180 cm². ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo?

Llamamos z a su base y x a su altura.

Área $= zx = 180 \ \rightarrow\ z = \dfrac{180}{x}$

Perímetro $= 2x + 2z = 2x + 2\left(\dfrac{180}{x}\right)$

$P(x) = 2x + \dfrac{360}{x} \ \rightarrow\ P'(x) = 2 - \dfrac{360}{x^2} = 0$ para que sea mínimo $\rightarrow\ x = \pm 6\sqrt{5}$

Descartamos la solución negativa ya que x es la medida de uno de los lados.

$x = 6\sqrt{5} \ \rightarrow\ z = \dfrac{180}{6\sqrt{5}} = \dfrac{30}{\sqrt{5}} = \dfrac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$

Por tanto, se trata de un cuadrado.

Sabemos que $x = 6\sqrt{5}$ es mínimo ya que:

$P'(x) < 0$ si $0 < x < 6\sqrt{5} \ \rightarrow P$ decrece

$P'(x) > 0$ si $x > 6\sqrt{5} \ \rightarrow P$ crece

52 a) Calcula el valor que debe tener k para que la función $f(x) = x - \dfrac{k}{x}$ tenga un máximo en $x = 1$.

b) Después de hallar k, estudia y representa la función obtenida.

a) Si $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$, entonces $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2}$$

$$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 1 + \frac{k}{1} = 0 \;\rightarrow\; k = -1$$

Por tanto, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ y $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

b) • Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty \;\rightarrow\; \text{La recta } x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Posición:

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \;\rightarrow\; f(-0{,}01) = -0{,}01 + \dfrac{1}{-0{,}01} = -100{,}01 \;\rightarrow\; \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \;\rightarrow\; f(0{,}01) = 0{,}01 + \dfrac{1}{0{,}01} = 100{,}01 \;\rightarrow\; \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

• Por la expresión de $f(x)$, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

Calculamos $f(x) - x = \dfrac{1}{x}$ para estudiar su posición:

— Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - x > 0 \;\rightarrow\; f(x)$ está encima de la asíntota.

— Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - x < 0 \;\rightarrow\; f(x)$ está debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

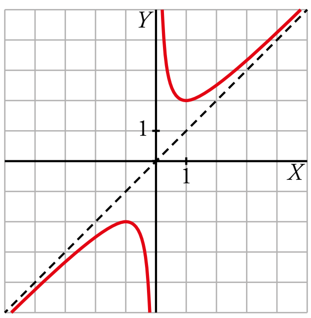
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 1$$

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

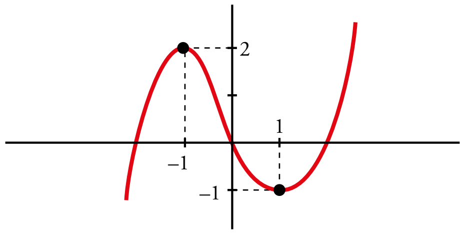
Los puntos (1, 2) y (–1, –2) son puntos singulares.

• Gráfica:



Cuestiones teóricas

53 Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo $[-1, 1]$ y positiva para cualquier otro valor de x.

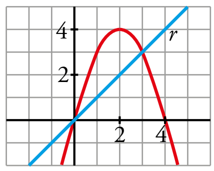


54 Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

55 ¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r? En caso afirmativo, hállalo.



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4 - 2x = 1 \;\to\; x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

56 Si $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?

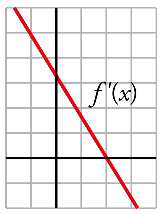
a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

b) La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto $(2, 0)$.

La correcta es la b).

57 Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.



a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$, es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$, es decreciente, pues $f' > 0$.

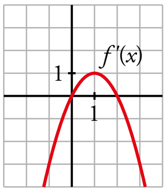
58 La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

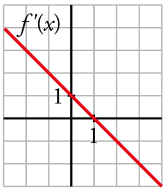
Despejamos y de la ecuación de la recta tangente: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

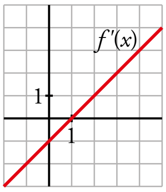
$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, es decir, $f'(2) = \frac{4}{3}$.

Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de tangencia, $f(2) = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = 3$.

59 ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en el punto de abscisa $x = 1$? ¿Por qué?

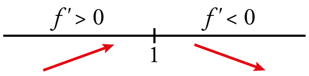
a)


b)


c)


La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

Además,



En consecuencia, $x = 1$ es un máximo.

60 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.

b) Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.

c) Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) < 0$.

d) Si $f'(5) = 0$ y f es creciente para cualquier otro valor de x, entonces f no tiene tangente horizontal en $x = 5$.

e) Si la derivada de una función cuadrática es $y = 4x - 6$ la abscisa del vértice de esa parábola es $x = \frac{3}{2}$.

a) Verdadero.

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

d) Falso. Tiene un punto de inflexión, es decir, de tangente horizontal.

e) Verdadero. El vértice se encuentra donde se anula la derivada, ya que es allí donde la función pasa de crecer a decrecer.

$$f'(x) = 4x - 6 = 0 \to 4x = 6 \to x = \frac{3}{2}$$

Para profundizar

61 Dada la función $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.

La recta tangente y la función coinciden en el punto de tangencia cuyas coordenadas son:

$x = -2 \to y = 2(-2) - 3 = -7$

Por tanto, la función pasa por el punto (–2, –7), es decir, $f(-2) = -7$.

Por otra parte, $f'(-2) = 2$, ya que la pendiente de la recta tangente es 2.

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = -7 \\ 6 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) + a = 2 \end{array}\right\} \to a = 26,\ b = 13$$

62 **[La comprensión del enunciado requiere por parte del alumnado trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.

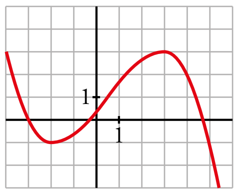
- Pendiente de la recta tangente:

  $f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$
- Punto de tangencia: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \rightarrow (1, -4 + k)$
- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$
- Para que pase por (0, 0), debe verificarse:

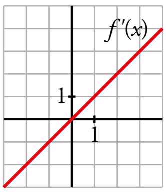
  $0 = -4 + k + 3 \rightarrow k = 1$

63 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**

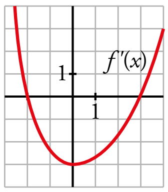


¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:

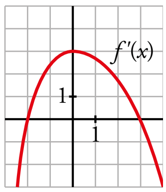
a)



b)



c)

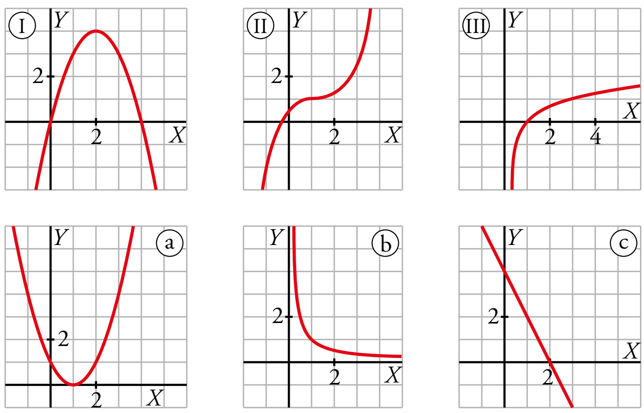


La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.

Como $f(x)$ crece en el intervalo $(-2, 3)$, $f'(x) > 0$ y esto solo ocurre en el apartado c). El resto de la gráfica de c) es coherente con la de $f(x)$.

Página 223

64 **Asocia a cada una de las gráficas I, II, III la gráfica de su función derivada.**



I → c II → a III → b

65 **De todos los conos cuya generatriz mide 10 m, halla la altura y el radio del que tiene el volumen máximo.**

Llamamos b y h a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el perímetro es 36, se tiene que $2b + 2\text{h} = 36 \rightarrow \text{h} = 18 - b$

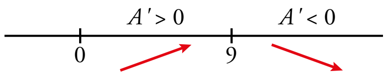
Buscamos el rectángulo de área máxima:

$A = b\text{h} = b(18 - b)$

Hallamos los puntos singulares:

$A' = 0 \ \rightarrow \ A' = 18 - 2b = 0 \ \rightarrow \ b = 9$

Estudiamos si el valor obtenido es un máximo:



Por tanto, para $b = 9$ el área es máxima.

Calculamos h: $h = 18 - 9 = 9$ y obtenemos el área máxima $A = 81 \text{ m}^2$.

66 Halla la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 30 cm cuya área sea la mayor posible.

** **Llama x a la mitad de la base.***

Si llamamos x a la mitad de la base y h a la altura del triángulo, el lado desigual mide $2x$ y cada uno de los lados iguales mide $\dfrac{30-2x}{2} = 15 - x$.

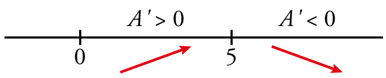
Por el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{(15-x)^2 - x^2} = \sqrt{225 - 30x}$

El área del triángulo es $A = \dfrac{2x\sqrt{225-30x}}{2} = x\sqrt{225-30x}$

$$A' = \sqrt{225-30x} + \frac{x(-30)}{2\sqrt{225-30x}} = \frac{225-30x-15x}{\sqrt{225-30x}} = \frac{225-45x}{\sqrt{225-30x}}$$

$$A' = 0 \ \rightarrow \ \frac{225-45x}{\sqrt{225-30x}} = 0 \ \rightarrow \ 225 - 45x = 0 \ \rightarrow \ x = 5 \text{ cm}$$

Comprobamos si hemos obtenido un máximo.



En efecto, $x = 5$ cm es un máximo. La base mide 10 cm, la altura mide $h = \sqrt{225-150} = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

67 De todos los ortoedros de base cuadrada y área total igual a 20 cm^2 halla las dimensiones del que tiene el mayor volumen.

Supongamos que x es el lado de la base cuadrada y que y es la altura del ortoedro.

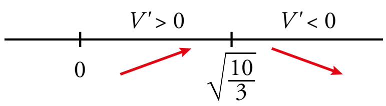
El área total es igual a 20 cm^2 $\rightarrow \ 2x^2 + 4xy = 20 \ \rightarrow \ y = \dfrac{10-x^2}{2x}$

El volumen del ortoedro es $V = x^2 y = x^2\,\dfrac{10-x^2}{2x} = \dfrac{10x - x^3}{2}$.

Hallamos el valor de x que da el volumen máximo.

$$V' = \frac{10-3x^2}{2}$$

$V' = 0 \ \rightarrow \ \dfrac{10-3x^2}{2} = 0 \ \rightarrow \ x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ (el resultado negativo no tiene sentido).



La altura es $y = \dfrac{10 - \sqrt{10/3}^2}{2\sqrt{10/3}} = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ y el volumen máximo, $V = \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{10}{3}} \text{ cm}^3$.

68 **Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos:**

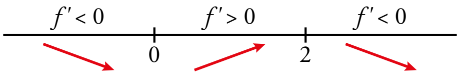
a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **b)** $y = ln\,(x^2 + 1)$

a) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 2$$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

$f(2) = \dfrac{4}{e^2} \;\to\; \left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento: $(0, 2)$.

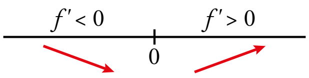
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \;\to\; x = 0$$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(0, +\infty)$.

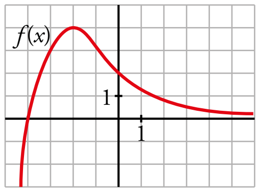
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 3.5. (EA 3.5.1.-EA 3.5.2.)

Página 223

1 Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde las preguntas.



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$

2 Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$

c) $f(x) = cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

c) $f'(x) = -\dfrac{3}{2}\, sen\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right) = 3\dfrac{x^4}{(x-2)^2}\cdot\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2-4x)}{(x-2)^4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Punto de tangencia: $x = 1,\ y = ln\ 1^2 = 0 \rightarrow P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \rightarrow f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x-1) \rightarrow y = 2x - 2$

5 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1-x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?**

$f(x) = 2 + (1-x)^3 \rightarrow f'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$

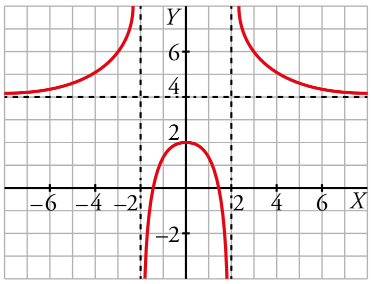
$f'(x) = 0 \rightarrow -3(1-x)^2 = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 + (1-1)^3 = 2$

Punto singular: (1, 2).

Como $f'(x) = -3(1-x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6 **Observa la gráfica y describe:**



a) Sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Sus puntos singulares y sus intervalos de crecimiento.

a) • Asíntotas verticales: rectas $x = -2$ y $x = 2$

Posición:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

• Asíntota horizontal: recta $y = 4$

Posición:

Si $x \rightarrow +\infty,\ f(x) > 4$

Si $x \rightarrow -\infty,\ f(x) < 4$

b) El punto (0, 2) es un máximo de la función.

Los intervalos de crecimiento son $(-\infty, 2) \cup (-2, 0)$.

Los intervalos de decrecimiento son $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

7 **Representa la función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

- **Dominio de definición: $\mathbb{R}$**
- **Mínimo: (0, 0)**
- **Asíntota horizontal: $y = 2$**
- **Si $x \rightarrow +\infty,\ f(x) < 2$**
- **Si $x \rightarrow -\infty,\ f(x) < 2$**

¿A cuál de estas funciones corresponde esa gráfica?

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

La función del apartado b) no puede ser porque tiene asíntotas verticales y no se afirma nada sobre esto en el enunciado.

La función del apartado a) no puede ser porque es negativa a la izquierda de 0, y, por tanto, el punto (0, 0) no sería un mínimo de la función.

La gráfica se corresponde con la función del apartado c).

8 **a) Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 12x + 6$. ¿Tiene máximo o mínimo?**

b) Represéntala gráficamente.

a) Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$$

Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

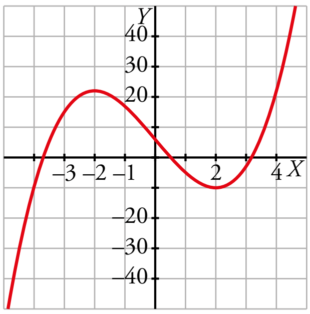
$x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 6 = 22$

$x = 2 \rightarrow f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 6 = -10$

Los puntos (–2, 22) y (2, –10) son puntos singulares.

El punto (–2, 22) es un máximo y el (2, –10) es un mínimo por la posición de las ramas infinitas.

b) Gráfica:



9 **En la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$, estudia las asíntotas, su posición con respecto a la curva, los puntos singulares y represéntala.**

La función está definida para todo valor que no anule el denominador:

$Dom = \mathbb{R} - \{x = 3,\ x = -3\}$

Veamos dónde se anula su derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada para saber el crecimiento y decrecimiento de la función. Como el denominador es siempre positivo:

$f'(x) > 0 \rightarrow x < 0$ la función crece

$f'(x) < 0 \rightarrow x > 0$ la función decrece

Por tanto, $x = 0$ es un máximo y $f(0) = \dfrac{1}{9} \rightarrow$ Máximo en $\left(0; \dfrac{1}{9}\right)$

Tendrá asíntotas verticales donde se anula el denominador:

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = 3, x = -3$

Veamos cómo se acerca la función a dichas asíntotas:

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

Sabemos que tendrá asíntotas horizontales porque el grado del denominador y numerador es el mismo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1} = 1 \;\rightarrow\; \text{Asíntota horizontal en } y = 1$$